PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 106 (1963)

FORMULE DE DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE EN ÉLÉMENTS SIMPLES SUIVIE DE QUELQUES APPLICATIONS

D. D. Adamović, D. S. Mitrinović et *D. Ž. Djoković*

(Reçu le 13 mars 1963)

1. Soit $m, n \in N$, où N désigne l'ensemble de tous les nombres naturels. Un théorème bien connu conduit à l'identité suivante

$$(*)\qquad \frac{1}{x^m(1-x)^n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{x^k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{B_l}{(1-x)^l} \qquad (x \neq 0 \wedge x \neq 1),$$

où les $A_k\,(k=1,2,\ldots,m)$ et les $B_l\,(l=1,2,\ldots,n)$ sont des constants à déterminer.

Nous allons démontrer les formules suivantes

$$(1)\qquad A_k = \binom{m+n-1-k}{n-1} \qquad (k=1,2,\ldots,m),$$

$$(2)\qquad B_l = \binom{m+n-1-l}{m-1} \qquad (l=1,2,\ldots,n),$$

c'est-à-dire que la décomposition

$$(3)\qquad \frac{1}{x^m(1-x)^n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\binom{m+n-1-k}{n-1}}{x^k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\binom{m+n-1-l}{m-1}}{(1-x)^l} \qquad (x \neq 0 \wedge x \neq 1)$$

est valable pour tous les nombres naturels m et n.

L'identité (*) peut être écrite sous la forme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{p=1}^{m} A_p x^{m-p} + x^m \sum_{q=1}^{n} \frac{B_q}{(1-x)^q}.$$

On en déduit, pour $k=1,2,\ldots,m$,

$$\left\{\frac{1}{(1-x)^n}\right\}^{(m-k)} = A_k (m-k)! + x\,\varphi_k(x),$$

où la fonction $\varphi_k(x)$ prend une valeur finie pour $x=0$. En posant $x=0$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} \left\{\frac{1}{(1-x)^n}\right\}^{(m-k)} \Bigg|_{x=0} = \frac{n(n+1)\cdots(n+m-k-1)}{(m-k)!}$$

$$= \binom{n+m-k-1}{m-k} = \binom{m+n-k-1}{n-1} \qquad (k=1,2,\ldots,m).$$

Nous avons donc démontré les formules (1). On en déduit immédiatement la validité des formules (2) en remarquant que les constants B_l jouent le rôle des constants A_k dans l'identité obtenue de (*) par la substitution $x=1-t$.

Notons une autre démonstration de la formule (3). Désignons par (P_ν) l'assertion que les formules (1) sont vraies pour la valeur ν du nombre n et pour toute valeur du nombre m. D'après la remarque par laquelle s'achève la première démonstration, il suffit de démontrer

$$(P_\nu) \quad (\forall \nu \in N).$$

Comme l'on a, pour tout $m \in N$,

$$\frac{1}{x^m(1-x)}=\frac{1}{x^m}\frac{1-x^m}{1-x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x^m}\sum_{k=0}^{m-1}x^k+\frac{1}{1-x}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x^k}+\frac{1}{1-x}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\binom{m+1-1-k}{1-1}}{x^k}+\sum_{l=1}^{1}\frac{\binom{m+1-1-l}{m-1}}{1-x} \qquad (x\neq 0 \wedge x\neq 1),$$

(P_1) est vrai. Si l'on suppose la validité de (P_ν), c'est-à-dire de l'identité suivante

$$\frac{1}{x^m(1-x)^\nu}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\binom{m+\nu-1-k}{\nu-1}}{x^k}+\sum_{l=1}^{\nu}\frac{B_l}{(1-x)^l}$$

pour tout $m \in N$, on aura, pour tout $m \in N$,

$$\frac{1}{x^{m+1}(1-\alpha x)^\nu}=\sum_{k=1}^{m+1}\alpha^{m+1-k}\frac{\binom{m+\nu-k}{\nu-1}}{x^k}+\alpha^{m+1}\sum_{l=1}^{\nu}\frac{\binom{n+\nu-1-l}{m-1}}{(1-\alpha x)^l}$$

$$(x\neq 0 \wedge \alpha x\neq 1).$$

Après la dérivation par rapport au paramètre α, on obtient

$$\text{(4)} \qquad \frac{\nu}{x^m(1-\alpha x)^{\nu+1}}=\sum_{k=1}^{m}(m+1-k)\alpha^{m-k}\frac{\binom{m+\nu-k}{\nu-1}}{x^k}+\cdots$$

Étant donné que

$$\frac{m+1-k}{\nu}\binom{m+\nu-k}{\nu-1}=\binom{m+\nu-k}{\nu},$$

l'identité (4) pour $\alpha=1$ devient

$$\frac{1}{x^m(1-x)^{\nu+1}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\binom{m+(\nu+1)-1-k}{(\nu+1)-1}}{x^k}+\cdots \qquad (x\neq 0 \wedge x\neq 1),$$

où les trois points remplacent la partie de l'expression ne contenant pas les fractions $\frac{1}{x^k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Nous avons donc démontré

$$(P_1) \wedge (P_\nu) \Rightarrow (P_{\nu+1}) \qquad (\forall \nu \in N),$$

d'où

$$(P_\nu) \qquad (\forall \nu \in N), \quad \text{c. q. f. d.}$$

2. En remplaçant dans (3) x par $\dfrac{x-a}{b-a}$ $(a \neq b)$, on obtient

$$(5) \qquad \frac{1}{(x-a)^m (x-b)^n} = \frac{(-1)^n}{(b-a)^{m+n}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{(b-a)^k \binom{m+n-k-1}{n-1}}{(x-a)^k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{(a-b)^l \binom{m+n-l-1}{m-1}}{(x-b)^l} \right\}$$

$$(x \neq a, b \wedge a \neq b).$$

En faisant $x=0$, on en tire la formule sommatoire que voici:

$$\sum_{k=1}^{m} \left(1-\frac{b}{a}\right)^k \binom{m+n-1-k}{n-1} + \sum_{l=1}^{n} \left(1-\frac{a}{b}\right)^l \binom{m+n-1-l}{m-l} = (-1)^m \frac{(b-a)^{m+n}}{a^m b^n} \qquad (ab \neq 0).$$

3. L'identité (3) peut servir comme une source de formules sommatoires et autres.

3.1. En posant $x=1/2$, l'identité (3) prend la forme simple suivante

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m+n-1-k}{n-1} 2^k + \sum_{l=1}^{n} \binom{m+n-1-l}{m-1} 2^l = 2^{m+n}.$$

Pour $x=-1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m+n-1-k}{n-1} + \sum_{l=1}^{n} \binom{m+n-1-l}{m-1} 2^{-l} = (-1)^m 2^{-n}.$$

3.2. On a

$$(6) \qquad \frac{1}{x^m (1-x)^n} = \frac{\left\{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}^{m+n}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m+n} (-1)^\mu \binom{m+n}{\mu} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\mu-n}$$

$$= \sum_{\mu=n+1}^{m+n} (-1)^\mu \binom{m+n}{\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu-n} (-1)^\nu \binom{\mu-n}{\nu} \frac{1}{x^\nu} + \cdots,$$

où les trois points désignent la partie de l'expression qui ne contient pas les fractions $\dfrac{1}{x^k}$ $(k=1,2,\ldots,m)$.

En confrontant les identités (6) et (3), on arrive à

$$\sum_{\mu=n+k}^{m+n} (-1)^{\mu+k} \binom{m+n}{\mu} \binom{\mu-n}{k} = \binom{m+n-1-k}{n-1} \qquad (k=1,2,\ldots,m;\ m,n \in N).$$

3.3. Partons maintenant de la formule suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^\beta)^m}\,dx = (-1)^{m+1}\,\pi\,\frac{\binom{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}}{m-1}}{\beta\sin\pi\frac{\alpha+1}{\beta}}$$

$$\left(\beta>0\wedge -1<\alpha<\beta m-1;\ \frac{\alpha+1}{\beta}\notin N\wedge m\in N\right),$$

que l'on peut obtenir, après le changement de variable $x=t^{1/\beta}$, au moyen d'intégration complexe.

En mettant à profit la formule (5), on obtient le résultat que voici

$$(7)\qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x^\beta+a)^m(x^\beta+b)^n}\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{(a-b)^{m+n}\beta\sin\pi\frac{\alpha+1}{\beta}}\left\{a^{(\alpha+1)/\beta}\sum_{k=1}^{m}\binom{m+n-1-k}{n-1}\binom{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}}{k-1}\left(\frac{b}{a}-1\right)^k\right.$$

$$\left.+\,b^{(\alpha+1)/\beta}\sum_{l=1}^{n}\binom{m+n-1-l}{m-1}\binom{\frac{\alpha+1-\beta}{\beta}}{l-1}\left(\frac{a}{b}-1\right)^l\right\}$$

$$(a,b,\beta>0\wedge a\neq b\wedge -1<\alpha<\beta-1;\ m,n\in N).$$

La formule (12) conduit immédiatement au résultat suivant

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(ax^2+2bx+c)^m(ax^2+2bx+d)^n}\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{a(c-d)^{m+n}}\left\{\sqrt{ac-b^2}\sum_{k=1}^{m}\binom{m+n-1-k}{n-1}\binom{-\frac{1}{2}}{k-1}\left(\frac{a(d-c)}{ac-b^2}\right)^k\right.$$

$$\left.+\sqrt{ad-b^2}\sum_{l=1}^{n}\binom{m+n-1-l}{m-l}\binom{-\frac{1}{2}}{l-1}\left(\frac{a(c-d)}{ad-b^2}\right)^l\right\}$$

$$(a>0\wedge ac-b^2>0\wedge ad-b^2>0\wedge c\neq d;\ m,n,\in N).$$

Les intégrales figurant dans (7) et (8) ne se trouvent pas indiquées dans le recueil d'intégrales suivant:

W. Gröbner und N. Hofreiter, *Integraltafel*, II Teil, Bestimmte Integrale, dritte, verbesserte Auflage, Wien 1961.

4. Si l'on prend comme point de départ la fonction

$$\frac{1}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n}}\qquad (k_1,k_2,\ldots,k_n\in N),$$

on peut obtenir des résultats semblables à ceux indiqués plus haut, mais ils seront plus compliqués.