PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 105 (1963)

NOTE SUR LA DÉCOMPOSITION DES CYCLES

Dragomir Ž. Djoković

(Reçu le 17 janvier 1963)

Soit P une permutation d'un ensemble E, fini ou non, c'est-à-dire une application buinivoque de E sur E. La transformée de $a\,(\in E)$ par P, désignons par $(a)P$.

Désignons par

(1) $$(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}) \quad (i_k \in E)$$

la permutation C (le cycle de l'ordre n), pour laquelle on a

$$(i_m)\,C = i_{m+1} \quad (m = 0, 1, \ldots, n-2), \quad (i_{n-1})\,C = i_0.$$

Le cycle C de l'ordre infini

(2) $$(\ldots, i_{-4}, i_{-3}, i_{-2}, i_{-1}, i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots) \quad (i_k \in E)$$

est défini par $(i_m)\,C = i_{m+1}$ (m entier quelconque).

I. Maurer [1] a démontré que chaque cycle C, fini ou infini, peut s'écrire sous la forme suivante

(3) $$C = P_1 P_2,$$

où P_1 et P_2 sont deux permutations pour lesquelles on a $P_1^2 = P_2^2 = I$ (I permutation identique). Il a formé deux permutations particulières P_1 et P_2 de l'ordre deux pour lesquelles l'égalité (3) a lieu.

Nous allons examiner toutes les répresentations (3) d'un cycle C à condition que P_1 soit une identité sur les éléments ne faisant pas partie du cycle C.

Théorème. *Il existe précisément une répresentation* (3) *du cycle* C, *pour laquelle on a* $P_1^2 = P_2^2 = I$, $(i_0)\,P_1 = i_k$ (k *fixe*). *Cette répresentation est donnée par*

(4) $$(i_m)\,P_1 = i_{k-m}$$

(5) $$(i_m)\,P_2 = (i_{m-1})\,P_1 = i_{k-m+1} \qquad (m \textit{ entier}).$$

On suppose que $i_{m+n} \equiv i_m$, *si l'ordre de* C *est fini et égal à* n.

Démonstration. Supposons que la répresentation cherchée existe et posons

(6) $$(i_m)\,P_1 = i_{f(m)} \qquad (m \textit{ entier}).$$

En utilisant la relation (3) et la définition des cycles (1) et (2), on trouve

$$(i_m)\,P_1 P_2 = (i_m)\,C = i_{m+1}.$$

Par application de la permutation P_2, il vient

(7) $$(i_m)\,P_1 = (i_{m+1})\,P_2,$$

car $P_2^2 = I$. En partant de (7), on trouve successivement:

$$\begin{aligned} i_{f(m)} &= (i_m)\,P_1 \\ &= (i_{m+1})\,P_2 \\ &= (i_{m+1})\,P_1 P_1 P_2 \\ &= (i_{m+1})\,P_1 C \\ &= (i_{f(m+1)})\,C \\ &= i_{f(m+1)+1}, \end{aligned}$$

ou bien

(8) $$f(m+1) = f(m) - 1.$$

La solution de l'équation aux différences finies (8) satisfaisant à la condition $f(0) = k$ est

(9) $$f(m) = k - m.$$

La relation (4) est une conséquence de (6) et de (9). D'après (7), on vérifie la relation (5).

Inversement, si les permutations P_1 et P_2 sont définies par (4) et (5), il vient

$$\begin{aligned} (i_m)\,P_1 P_2 &= (i_{k-m})\,P_2 \\ &= (i_{k-m-1})\,P_1 \\ &= i_{k-(k-m-1)} \\ &= i_{m+1} \\ &= (i_m)\,C. \end{aligned}$$

Donc, $C = P_1 P_2$.

Par application des formules (4) et (5), on obtient

$$\begin{aligned} (i_m)\,P_1 P_1 &= (i_{k-m})\,P_1 \\ &= i_{k-(k-m)} \\ &= i_m, \\ (i_m)\,P_2 P_2 &= (i_{k-m+1})\,P_2 \\ &= i_{k-(k-m+1)+1} \\ &= i_m. \end{aligned}$$

Donc, $P_1^2 = P_2^2 = I$ et enfin, $(i_0)\,P_1 = i_{k-0} = i_k$.

Le théorème est ainsi établi.

Désignons par S (symétrie) la permutation

(10) $$(i_m)S = i_{-m}.$$

Si l'ordre de C est fini $(=n)$, il faut appliquer la convention $i_{m+n} \equiv i_m$. Étant donné que

$$(i_m)CS = (i_{m+1})S = i_{-m-1},$$

$$(i_m)SC^{-1} = (i_{-m})C^{-1} = i_{-m-1},$$

on doit avoir

(11) $$CS = SC^{-1}.$$

On trouve également deux relations suivantes

(12) $$S^2 = I,$$

(13) $$SC = C^{-1}S.$$

Les permutations P_1 et P_2, définies par (4) et (5), peuvent s'écrire sous la forme que voici

(14) $$P_1 = SC^k, \quad P_2 = SC^{k+1}.$$

Conséquences. 1. Il existe précisément une répresentation (3) du cycle C pour laquelle on a

$$P_1^2 = P_2^2 = I, \ (i_k)P_1 = i_r \quad (k, r \text{ fixes}).$$

2. Il existe précisément une répresentation (3) du cycle C pour laquelle

$$P_1^2 = P_2^2 = I, \ (i_k)P_2 = i_r \quad (k, r \text{ fixes}).$$

3. Si l'ordre du cycle C est fini et égal à n, le nombre total des répresentations (3) pour lesquelles $P_1^2 = P_2^2 = I$ est égal à n. Si l'ordre de C est infini, le nombre des répresentations correspondantes est $\aleph_0$.

Remarque. Cette Note est, à la vérité, suggérée par l'article [1] de *I. Maurer*. Nous avons pensé que le résultat est nouveau. Cependant, grâce à une observation de *J. Browkin* de Varsovie (qui a lu cette Note en manuscript) il résulte que le théorème indiqué est une conséquence immédiate du fait géometrique suivant: *Toute rotation est une superposition de deux symétries (qui ne changent pas le centre de la rotation). Une de ces symétries peut être choisie arbitrairement, et l'autre sera déjà déterminée d'une façon univoque.*

RÉFÉRENCE

[1] I. Maurer: *Despre descompunerea ciclurilor*, Gazeta matematică şi fizică, serie A, vol. X (LXIII), No. 11, 1958, p. 656—657.