PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 98 (1963)

FORMULE D'ADDITION DES POLYNÔMES ULTRASPHÉRIQUES PAR RAPPORT AU PARAMÈTRE

Letterio Toscano

(Reçu le 15 novembre 1962)

1. Les polynômes ultrasphériques $P_n^{(\alpha)}(x)$ peuvent s'introduire soit par la relation différentielle

$$P_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\frac{(2\alpha,n)}{(\alpha+1/2,n)}(1-x^2)^{-\alpha+1/2}D_x^n(1-x^2)^{\alpha+n-1/2}\qquad \left(D_x\equiv\frac{d}{dx}\right)$$

soit par les relations hypergéométriques

$$P_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(2\alpha,n)}{n!}\,{}_2F_1\left(-n,\ 2\alpha+n;\ \alpha+\frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right),$$

$$P_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha,n)}{n!}(2x)^n\,{}_2F_1\left(-\frac{n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ -\alpha-n+1;\frac{1}{x^2}\right),$$

soit enfin par le développement en série

$$(t^2-2xt+1)^{-\alpha}=\sum_0^\infty{}_n\, t^n P_n^{(\alpha)}(x)\qquad(|t|<1).$$

Ce développement donne

$$\begin{aligned}&\sum_0^\infty{}_n\, t^n P_n^{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)}(x)\\&=(t^2-2xt+1)^{-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)}\\&=(t^2-2xt+1)^{-\alpha_1}(t^2-2xt+1)^{-\alpha_2}\cdots(t^2-2xt+1)^{-\alpha_m}\\&=\sum_0^\infty{}_{i_1}\sum_0^\infty{}_{i_2}\cdots\sum_0^\infty{}_{i_m}t^{i_1+i_2+\cdots+i_m}P_{i_1}^{(\alpha_1)}(x)\,P_{i_2}^{(\alpha_2)}(x)\cdots P_{i_m}^{(\alpha_m)}(x).\end{aligned}$$

Après identification des coefficients de t^n, on obtient sans peine la formule d'addition par rapport au paramètre α

(1) $$P_n^{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)}(x)=\sum P_{i_1}^{(\alpha_1)}(x)\,P_{i_2}^{(\alpha_2)}(x)\cdots P_{i_m}^{(\alpha_m)}(x)$$

où $$i_1+i_2+\cdots+i_m=n\qquad(m>1).$$

2. Le cas $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 1/2$ est remarquable parce que de (1) on obtient la formule pour les polynômes de *Legendre* $P_n^{(1/2)}(x) = P_n(x)$:

$$P_n^{(m/2)}(x) = \sum P_{i_1}(x)\, P_{i_2}(x) \cdots P_{i_m}(x). \tag{2}$$

Si m est un nombre naturel impair $(m = 2k+1)$, on peut écrire

$$P_n^{(k+1/2)}(x) = \sum P_{i_1}(x)\, P_{i_2}(x) \cdots P_{i_{2k+1}}(x). \tag{3}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} D_x P_n^{(\alpha)}(x) &= 2\alpha P_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \\ D_x^k P_n^{(\alpha)}(x) &= 2^k (\alpha, k)\, P_{n-k}^{(\alpha+k)}(x), \\ D_x^k P_n(x) &= 2^k (1/2, k)\, P_{n-k}^{(k+1/2)}(x), \\ D_x^k P_{n+k}(x) &= (2k-1)!!\, P_n^{(k+1/2)}(x), \end{aligned}$$

d'où l'on parvient à la formule

$$D_x^k P_{n+k}(x) = (2k-1)!! \sum P_{i_1}(x)\, P_{i_2}(x) \cdots P_{i_{2k+1}}(x) \tag{4}$$
$$(i_1 + i_2 + \cdots + i_{2k+1} = n; \quad k \geqslant 1).$$

La formule (4) a été démontrée par *D. Djoković* seulement pour $k = 1, 2, 3$ de façon compliquée (*Nouvelle formule relative aux polynômes de Legendre*, ces Publications № 66, 1961)*.

3. Si l'on pose $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_m = \alpha$, $x = y/\sqrt{\alpha}$ dans (1), il vient

(5)
$$\alpha^{-n/2} P_n^{(m\alpha)}(y/\sqrt{\alpha}) = \sum \alpha^{-i_1/2} P_{i_1}^{(\alpha)}(y/\sqrt{\alpha})\, \alpha^{-i_2/2} P_{i_2}^{(\alpha)}(y/\sqrt{\alpha}) \cdots \alpha^{-i_m/2} P_{i_m}^{(\alpha)}(y/\sqrt{\alpha}).$$

Pour la suite du raisonnement introduisons la formule-limite

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-n/2} P_n^{(\alpha)}(y/\sqrt{\alpha}) = \frac{2^{n/2}}{n!} H_n(y/\sqrt{2})$$

de passage des polynômes ultrasphériques à ceux d'*Hermite*, définis par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} D_x^n e^{-x^2/2}.$$

De même

$$\begin{aligned} \alpha^{-n/2} P_n^{(m\alpha)}(y/\sqrt{\alpha}) &= \frac{(-1)^n}{n!\, 2^n} \alpha^{-n/2} \frac{(2m\alpha, n)}{(m\alpha + 1/2, n)} (1 - y^2/\alpha)^{-m\alpha+1/2} \\ &\quad \times D_{y/\sqrt{\alpha}}^n (1 - y^2/\alpha)^{m\alpha+n-1/2} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!\, 2^n} \frac{(2m\alpha, n)}{(m\alpha + 1/2, n)} (1 - my^2/m\alpha)^{-m\alpha} (1 - y^2/\alpha)^{1/2} \\ &\quad \times D_y^n (1 - my^2/m\alpha)^{m\alpha} (1 - y^2/\alpha)^{n-1/2}. \end{aligned}$$

* La formule (4) a été déjà démontrée par *B. S. Popov* (*voir*: D. S. Mitrinović: *Zbornik matematičkih problema* I, treće izdanje, Beograd 1962, p. 435—436) (Remarque de la Rédaction).

Faisant tendre α vers l'infini, on obtient

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n/2} P_n^{(m\alpha)}(y/\sqrt{\alpha}) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{(y\sqrt{m})^2} D_y^n e^{-(y\sqrt{m})^2};$$

Étant donné que

$$\begin{aligned}(-1)^n e^{(y\sqrt{m})^2} D_y^n e^{-(y\sqrt{m})^2} &= (-1)^n e^{(y\sqrt{2m})^2/2} D_y^n e^{-(y\sqrt{2m})^2/2} \\ &= (-1)^n (2m)^{n/2} e^{(y\sqrt{2m})^2/2} D^n_{y\sqrt{2m}} e^{-(y\sqrt{2m})^2/2} \\ &= (2m)^{n/2} H_n(y\sqrt{2m}),\end{aligned}$$

on arrive à la formule

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n/2} P_n^{(m\alpha)}(y/\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{n!}(2m)^{n/2} H_n(y\sqrt{2m}).$$

Par suite, l'application des formules-limite dans (5) établit la formule d'addition connue (en remplaçant $y\sqrt{2}$ par y)

$$m^{n/2} H_n(y\sqrt{m}) = \sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \cdots i_m!} H_{i_1}(y) H_{i_2}(y) \cdots H_{i_m}(y) \tag{6}$$

$$(i_1+i_2+\cdots+i_m=n).$$

4. Nous considérons enfin la relation (1) pour $2m$ paramètres

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \; 1-\alpha_1, \; 1-\alpha_2, \ldots, \; 1-\alpha_m.$$

Il résulte

$$P_n^{(m)}(x) = \sum P_{i_1}^{(\alpha_1)}(x) \cdots P_{i_m}^{(\alpha_m)}(x) P_{j_1}^{(1-\alpha_1)}(x) \cdots P_{j_m}^{(1-\alpha_m)}(x) \tag{7}$$

$$(i_1+i_2+\cdots i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m=n).$$

D'autre part, on a

$$P_n^{(m)}(x) = P_n^{(2m,1/2)}(x) = \sum P_{r_1}(x) \cdots P_{r_{2m}}(x) \quad (r_1+r_2+\cdots+r_{2m}=n) \tag{8}$$

et encore

$$P_n^{(m)}(x) = P_n^{(1+1+\cdots+1)}(x) = \sum P_{s_1}^{(1)}(x) \cdots P_{s_m}^{(1)}(x) \quad (s_1+s_2+\cdots+s_m=n)$$

formule qui, en raison de $P_n^{(1)}(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, devient

$$\sin^m\theta\, P_n^{(m)}(\cos\theta) = \sum \sin(s_1+1)\theta \sin(s_2+1)\theta \cdots \sin(s_m+1)\theta. \tag{9}$$

Par rapprochement des (7), (8), (9) nous obtenons

$$\sum P_{i_1}^{(\alpha_1)}(x) \cdots P_{i_m}^{(\alpha_m)}(x) P_{j_1}^{(1-\alpha_1)}(x) \cdots P_{j_m}^{(1-\alpha_m)}(x) = \sum P_{r_1}(x) \cdots P_{r_{2m}}(x) \tag{10}$$

$$(i_1+i_2+\cdots+i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m=n; \quad r_1+r_2+\cdots+r_{2m}=n),$$

$$\begin{aligned}\sin^m\theta \sum P_{r_1}(\cos\theta) P_{r_2}(\cos\theta) \cdots P_{r_{2m}}(\cos\theta) \\ = \sum \sin(s_1+1)\theta \sin(s_2+1)\theta \cdots \sin(s_m+1)\theta\end{aligned} \tag{11}$$

$$(r_1+r_2+\cdots+r_{2m}=n; \quad s_1+s_2+\cdots+s_m=n).$$