PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 96 (1963)

UN THÉORÈME DU DOMAINE DES SÉRIES À TERMES CONSTANTS

Lazar Karadžić

(Reçu le 11 décembre 1962)

La surface p_n bornée d'arcs-limites $\overset{\frown}{P_0 A_0}$, $\overset{\frown}{P_n A_n}$ $(\overset{\frown}{P_0 A_0} = \overset{\frown}{P_n A_n})$ d'équidistante $A_0 A_n$ de la droite $P_0 P_n$ et du segment de cette droite entre les points P_0 et P_n est

$$p_n = \overline{P_0 P_n} \text{ sh } a \qquad (\text{sh } a = \overset{\frown}{P_0 A_0}).$$

Nous avons divisé cette surface par les arcs-limites $\overset{\frown}{P_1 A_1}, \ldots, \overset{\frown}{P_{n-1} A_{n-1}}$ en parties (voir la fig. 1). Des points A_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, on a tracé les droites parallèles à la droite donnée $P_0 P_n$ jusqu'à l'intersection avec l'arc-limite suivant au point $A_k{}'_{+1}$. De cette façon-ci on a obtenu une suite de quadrilatères curvilignes $P_k P_{k+1} A_k{}'_{+1} A_k$. Si $\overset{\frown}{P_k A_k} = \overset{\frown}{P_{k+1} A_{k+1}} = 1$ et si $\overline{P_k P_{k+1}} = \overline{A_k A_k{}'_{+1}} = -\lg (1 - a_k)$ $(0 < a_k < 1)$, alors la surface de ce quadrilatère curviligne est égale au nombre a_k. Par conséquent, les termes de la série

$$(1) \qquad \sum_1^{\infty} a_n \qquad (0 < a_n < 1)$$

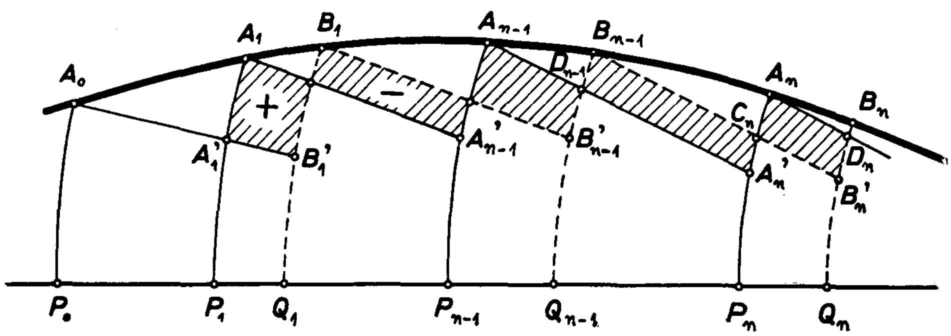

Fig. 1

peuvent être considérés comme surfaces des quadrilatères curvilignes formés de la façon susmentionnée. De même $a_n = \overset{\frown}{A_n' A_n}$.

Si $\overset{\frown}{P_0 A_0} = 1$, il résulte évidemment de la figure

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < -\lg \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) = p \quad \left(p = \sum_1^n p_k\right).$$

Il est également évident que les suites

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}, \quad \left\{\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\right\}$$

sont équiconvergentes.

Si l'on représentait aussi les termes de la série

$$\sum_{1}^{\infty} b_n \quad (0<b_n<1) \tag{2}$$

selon le procédé exposé ci-dessus dans la même figure, alors la série

$$\sum_{1}^{\infty} a_n-b_n \tag{3}$$

représenterait la somme algébrique des surfaces de forme $C_n B_n' D_n A_n$, dont les surfaces, pour $n=1, 2, 3, \ldots$, sont respectivement:

$$a_1\left(1-\frac{1-b_1}{1-a_1}\right), \quad \left(1-\frac{1-b_1}{1-a_1}\right)\left(1-\frac{(1-a_1)(1-a_2)}{1-b_1}\right), \ldots$$

Il suit de là:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n-b_n=a_1\left(1-\frac{1-b_1}{1-a_1}\right)-\left(1-\frac{1-b_1}{1-a_1}\right)\left(1-\frac{(1-a_1)(1-a_2)}{1-b_1}\right)$$

$$+\left(1-\frac{(1-a_1)(1-a_2)}{1-b_1}\right)\left(1-\frac{(1-b_1)(1-b_2)}{(1-a_1)(1-a_2)}\right)-\ldots$$

La série (3), comme il résulte de la figure de façon évidente, converge si l'ensemble de points: A_n, A_n', B_n, B_n' converge vers un point situé sur l'équidistante. Ce cas se produit si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-b_k}{1-a_k}=1.$$

De même, la série (3) converge si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-b_k}{1-a_k}=C \quad (0<C<\infty),$$

car cette condition se réduit à la condition plus haut en ajoutant une constante déterminée à la série (3). Si la suite

$$\{\alpha_n\}=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{1-b_k}{1-a_k}\right\} \tag{4}$$

a sur le segment fini plusieurs points d'accumulation dont $0<\lim \alpha_n$ la série (3) est alors bornée et divergente, mais si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n=0$ ou si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n=\infty$ la série (3) diverge.

Si

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_k)}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-b_k)}=O(1), \quad n\to\infty,$$

la série (3) converge alors absolument, car la surface du n-ième quadrilatère curviligne $C_n B_n' D_n A_n$ se comporte asymptotiquement comme n-ième terme d'une série absolument convergente.

De ce qu'on vient d'exposer, il résulte ce

Théorème. — *Si les termes des séries divergentes* (1) *et* (2) *satisfont les conditions:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-b_k}{1-a_k}=C \qquad (0<C<\infty) \tag{6}$$

la série (3) *converge. Cette série diverge si la condition* (5) *est remplie et la suite* (4) *est une suite-nulle ou bien illimitée; elle est bornée et diverge si ses termes satisfont la condition* (5) *et la suite* (4) *possède sur le segment de longueur finie plusieurs points d'accumulation dont* $0<\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$.

Le résultat suivant est facile à démontrer.

Si les termes de la série (3) *satisfont les conditions:*

$$a_n-b_n>0, \quad 1<\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-b_k}{1-a_k}=C<\infty$$

alors

$$\sum_{1}^{\infty} a_n-b_n<\lg C.$$

Dans les travaux [1] et [2] on traite un cas spécial du problème de la convergence des séries ayant la forme (3). Dans ces séries la constante arbitraire C doit avoir la valeur $C=1$.

Supposons que les séries (1) et (2) ont les formes spéciales suivantes

$$\begin{aligned}&\sum_{1}^{\infty}\frac{d_n}{s_n} \quad \left(s_n=\sum_{1}^{n} d_k\to\infty,\ n\to\infty;\ d_k>0\right),\\ &\sum_{1}^{\infty}\frac{d_n'}{s_n'} \quad \left(s_n'=\sum_{1}^{n} d_k'\to\infty,\ n\to\infty;\ d_k'>0\right);\end{aligned} \tag{7}$$

ou bien

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\sum_1^\infty \frac{c_n}{r_n} \quad \left(r_n=\sum_{k=n}^\infty c_k \to 0,\ n\to\infty;\ c_n>0\right),\\ &\sum_1^\infty \frac{c_n'}{r_n'} \quad \left(r_n'=\sum_1^\infty c_k' \to 0,\ n\to\infty;\ c_n'>0\right). \end{aligned}$$

Si les termes des séries divergentes (7) et (8) satisfont la condition (5), ils satisfont alors la condition (6) à partir de $k=2$. La suite (4) ne peut, dans ce cas-ci, que converger vers un nombre $C\neq 0$.

D'après ce qu'on vient d'exposer ci-dessus, nous obterons le résultat suivant:

Si les termes des séries divergentes (7) *satisfont les conditions:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{s_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n'}{s_n'}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_n'}=g \qquad (0<g<\infty)$$

alors la série

$$\sum \frac{d_n}{s_n}-\frac{d_n'}{s_n'}$$

converge.

Si les termes des séries divergentes (8) *satisfont la condition*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_n'}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{r_n'}=t \qquad (0<t<\infty)$$

alors la série

$$\sum_1^\infty \frac{c_n}{r_n}-\frac{c_n'}{r_n'}$$

converge.

Si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{s_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n'}{s_n'}=0;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{d_n s_n'}{d_n' s_n}=1;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n r_n'}{c_n' r_n}=1,$$

et si les suites $\left\{\frac{s_n'}{s_n}\right\}$ *et* $\left\{\frac{r_n'}{r_n}\right\}$ *possèdent sur le segment de longueur finie plusieurs points d'accumulation dont*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n'}{s_n}>0 \ \textit{et} \ \lim_{n\to\infty}\frac{r_n'}{r_n}>0,$$

alors les suites

$$\left\{\sum_1^n \frac{d_n}{s_n}-\frac{d_n'}{s_n'}\right\},\ \left\{\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{r_k}-\frac{c_k'}{r_k'}\right\}$$

sont oscillatoires.

Si $\frac{d_n}{s_n}-\frac{d_n'}{s_n'}>0$ et $\frac{c_n}{r_n}-\frac{c_n'}{r_n'}>0$, alors

$$\sum_1^\infty \frac{d_n}{s_n}-\frac{d_n'}{s_n'}<\lg\frac{d_1'}{d_1}g \qquad \left(\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{s_n'}=g\right),$$

$$\sum_1^\infty \frac{c_n}{r_n}-\frac{c_n'}{r_n'}<\lg\frac{s'}{s}t \qquad \left(s=r_1=\sum_1^\infty c_n;\ s'=r_1';\ \lim\frac{r_n'}{r_n}=t\right),$$

$$\left(\frac{d_1'}{d_1}g=C,\ \frac{s'}{s}t=C\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Karadžić: *Certains résultats se rapportant aux séries à termes constants.* Ces Publications, № 55 (1961).

[2] L. Karadžić: *Un théorème se rapportant aux séries semi-convergentes.* Ces Publications, № 57 (1961).