PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 95 (1963)

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES SÉRIES À TERMES CONSTANTS

Lazar Karadžić

(Reçu le 11 décembre 1962)

Lorsqu'on écrit la série

$$\sum_1^{\infty} a_n b_n \qquad (a_n>0,\ \lim_{n\to\infty} a_n=0;\ 0<b_n<1,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n<1), \tag{1}$$

sous la forme

$$\sum_1^{\infty} a_n b_n=\sum_1^{\infty} a_n\left(1-e^{\lg(1-b_n)}\right)$$

alors ses termes

$$a_n b_n=a_n\left(1-e^{\lg(1-b_n)}\right), \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

d'après la figure dans le travail [1], peuvent être considérés comme surfaces des secteurs entre les arcs-limites coaxiaux

$$a_n=\overset{\frown}{A_n B_n},\ \overset{\frown}{A_{n+1} B_{n+1}} \qquad \left(\overline{A_n A_{n+1}}=\overline{B_n B_{n+1}}=-\lg(1-b_n)\right).$$

Si

$$a_n\leqslant \overset{\frown}{A_{n+1} B_{n+1}}=a_n(1-b_n), \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

alors la somme de la série (1) est aussi — comme il résulte se façon évidente de la figure — inférieure ou égale au nombre a_1. D'où le résultat suivant:

Si les termes de la série (1) *satisfont la condition*

$$a_{n+1}\leqslant a_n(1-b_n) \tag{2}$$

alors

$$\sum_1^{\infty} a_n b_n\leqslant a_1.$$

Si les termes de la série (1) ne satisfont pas la condition (2), il peut arriver qu'il existe un certain nombre M, tel que, si l'on écrit la série donnée sous la forme

$$\sum_1^{\infty} a_n b_n=\sum_1^{\infty} M a_n \frac{b_n}{M} \qquad (M>0),$$

soit satisfaite la condition suivante

$$a_{n+1}\leqslant a_n\left(1-\frac{b_n}{M}\right). \tag{3}$$

Si un tel nombre M existe effectivement, alors

$$\sum_{1}^{\infty} a_n b_n \leqslant M a_1.$$

Soient $a_n = f(n)$ et $b_n = \varphi(n)$, où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions monotones. Il résulte de (3)

$$M > \frac{a_n b_n}{a_n - a_{n+1}} = \frac{f(n)\ \ \varphi(n)}{f(n) - f(n+1)} = \frac{f(n)\ \ \varphi(n)}{-f'(\xi_n)} \qquad (n < \xi_n < n+1).$$

De là, lorsque les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ décroissent d'une façon monotone dans l'intervalle $(0, \infty)$, il en résulte la relation suivante

$$M \geqslant \frac{f(\xi_n)\ \ \varphi(\xi_n)}{-f'(\xi_n)}.$$

Soit

$$M \leqslant \frac{f(x)\ \ \varphi(x)}{-f'(x)}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Il s'ensuit

$$f(x) \leqslant f(1)\, e^{-M^{-1}\int_1^x \varphi(x)\, dx}.$$

Il résulte de ce qu'on vient d'exposer ci-dessus le

Théorème 1 — *Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont positives et décroissent d'une façon monotone dans l'intervalle* $[1, \infty)$ *et si*

(4) $$f(x) \leqslant f(1)\ e^{-M^{-1}\int_1^x \varphi(x)\, dx} \qquad (M > 0),$$

alors

$$\sum_{1}^{\infty} a_n b_n \leqslant M a_1$$

où $a_n = f(n)$ et $\varphi(n) = b_n$.

Si, par exemple,

$$\varphi(x) = 1/x \lg x \lg_2 x \ldots \lg_p x \quad (\lg_2 x = \lg \ \ \lg x, \ldots)$$

à la relation (4) correspond la relation suivante

$$\frac{f(x)}{f(k)} \leqslant e^{-M^{-1}\int_k^x \frac{dx}{x \lg x \ldots \lg_p x}} = \left(\frac{\lg_p k}{\lg_p x}\right)^{\frac{1}{M}} \qquad (\lg_p k > 0).$$

De là, si l'on pose

$$f(x) = \left(\frac{1}{\lg_p x}\right)^{\frac{1}{M}},$$

il suit, d'après la proposition précitée,

$$s = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n \lg n \ldots \lg_p^{\alpha} n} < \frac{1}{(\alpha - 1)\lg_p^{\alpha-1} k} \qquad (\alpha > 1),$$

car

$$M = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Cette proposition peut être appliquée à la série trigonométrique

$$\sum_{1}^{\infty} g(n) \cos nx$$

lorsque $x \to 0$. Si l'on écrit $\varphi(t, x) = g(t) \cos tx$, la fonction correspondante à (4) $f(t, x)$ satisfera la relation

$$f(t, x) \leqslant f(1, x)\, e^{-M^{-1} \int_{x}^{xt} g(t) \cos tx\, dt}$$

$$= f(1, x)\, e^{-(Mx)^{-1} \int_{x}^{xt} g\left(\frac{u}{x}\right) \cos u\, du}$$

où $xt < \frac{\pi}{2}$. Si la fonction monotone $g(t)$ possède la propriété: $g(t) \to 0$, $t \to \infty$, $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{g(kt)}{g(t)} = 1$ $\left(0 < k \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, l'inégalité ci-haut peut être écrite sous la forme

$$f(t, x) \leqslant f(1, x)\, e^{-C\,(Mx)^{-1} g\left(\frac{1}{x}\right) \int_{x}^{xt} \cos u\, du}$$

(C est une constante indépendante de x et de t). Donc, si

$$M \sim x^{-1} g\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \infty,$$

alors

$$f(t, x) = e^{-C(\sin tx - \sin x)}.$$

De ce qu'on vient d'exposer et en vertu du théorème 1 résulte le

Théorème 2 — *Si la fonction* $g(t)$ *est positive et décroît d'une façon monotone dans l'intervalle* $(1, \infty)$ *et si*

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{g(kt)}{g(t)} = 1, \quad 0 < k \leqslant \frac{\pi}{2}$$

alors

$$\sum_{1}^{\infty} g(n) \cos nx \sim x^{-1} g\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Karadžić: *Certains théorèmes se rapportant aux séries à termes constants,* ces Publications, № 93 (1963).