PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA—SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 93 (1963)

CERTAINS THÉORÈMES SE RAPPORTANT AUX SÉRIES À TERMES CONSTANTS

Lazar Karadžić

(Reçu le 11 décembre 1962)

La fig. 1 représente, dans le plan de Lobatchewsky, la suite de quadrilatères curvilignes $A_n A_{n+1} B_n{}'_{+1} B_n$, $n=1, 2, 3, \ldots$, dont les côtés $\overset{\frown}{A_n B_n}$ et $\overset{\frown}{A_{n+1} B_{n+1}}$ sont des arcs-limites coaxiaux et $A_n A_{n+1}$ et $B_n B_n{}'_{+1}$ les segments des parallèles.

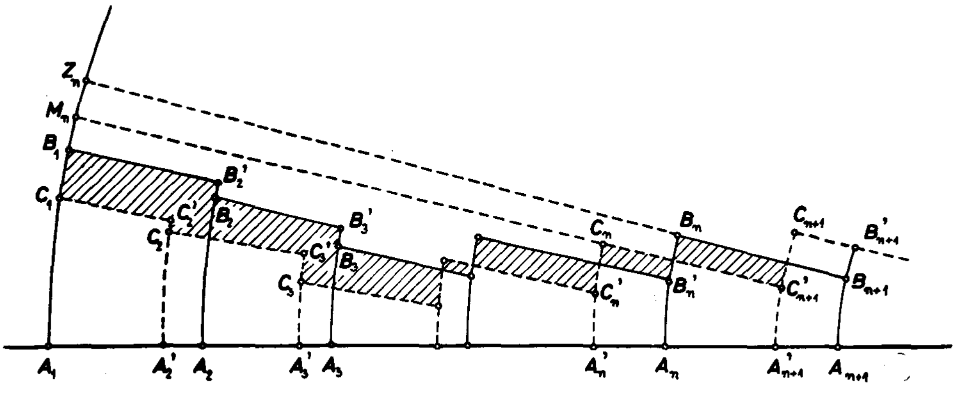

Fig. 1

Si l'on écrit $a_n = \overset{\frown}{A_n B_n}$, $-\lg(1-b_n) = A_n A_{n+1} = B_n B_n{}'_{+1}$ où $0 < b_n < 1$, alors l'expression

$$a_n b_n = a_n \left(1 - e^{\lg(1-b_n)}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

représente la surface du quadrilatère curviligne $A_n A_{n+1} B_n{}'_{+1} B_n$.

Supposons que la droite $B_n B_n{}'_{+1}$ coupe l'arc-limite qui passe par les points A_1 et B_1 au point L_n. Si la suite des arcs-limites $\overset{\frown}{A_1 L_n}$ est bornée, c'est-à-dire si

$$\text{(1)} \qquad \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (1-b_k)} = O(1), \qquad n \to \infty,$$

alors la série

$$\text{(2)} \qquad \sum_1^{\infty} a_n b_n \qquad (a_n > 0,\ 0 < b_n < 1)$$

converge.

La figure ci-dessus représente, outre la suite de quadrilatères curvilignes $\{A_n A_{n+1} B_n'{}_{+1} B_n\}$, selon le même procédé, également une autre suite de quadrilatères curvilignes $\{A_n' A_n'{}_{+1} C_n'{}_{+1} C_n\}$. Si l'on écrit $c_n = \widehat{A_n' C_n}$ et

$$-\lg(1-d_n) = A_n' A_n'{}_{+1} = C_n C_n'{}_{+1}, \quad \text{où} \quad 0 < d_n < 1,$$

alors l'expression

$$c_n d_n = c_n (1 - e^{\lg(1-d_n)}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

représente la surface du quadrilatère curviligne $A_n' A_n'{}_{+1} C_n'{}_{+1} C_n$.

Soit M_n le point d'intersection de la droite $C_n C_n'{}_{+1}$ avec l'arc-limite qui passe par les points A_1 et B_1. Par conséquent, si la suite des arcs-limites $\widehat{A_1 M_n}$ est bornée, c'est-à-dire si

$$\frac{c_n}{\prod_{k=1}^{n-1}(1-d_k)} = O(1), \quad n \to \infty, \tag{3}$$

alors la série

$$\sum_1^{\infty} c_n d_n \qquad (c_n > 0, \ 0 < d_n < 1) \tag{4}$$

converge.

La série (2) peut converger même si la suite (1) n'est pas bornée. Afin d'établir, dans ce cas-ci, la convergence de cette série, on procède de la façon suivante. Lorsqu'on écrit la série (2) sous la forme

$$\sum_1^{\infty} a_n b_n = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \lambda_n b_n \quad (\lambda_n > 0, \ 0 < b_n \lambda_n < 1),$$

elle converge si

$$\frac{a_n}{\lambda_n} \frac{1}{\prod_1^{n-1}(1-b_k \lambda_k)} = O(1), \quad n \to \infty.$$

Donc, lorsque la série (2) converge, il existe une suite de nombres $\{\lambda_n\}$ qui satisfait cette relation, mais lorsque la série (2) diverge, il n'existe pas de telle suite $\{\lambda_n\}$ qui satisferait cette relation. De même, la série (4) converge s'il existe une telle suite de nombres $\{\mu_n\}$ $(\mu_n > 0)$ qui avec les termes de cette série satisferait la relation

$$\frac{c_n}{\mu_n} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}(1-d_k \mu_k)} = O(1), \quad n \to \infty \quad (0 < d_k \mu_k < 1).$$

La figure ne fait pas voir seulement la somme partielle des séries (2) et (4), mais aussi leur différence. Ainsi, par exemple, la somme partielle de la série

$$\sum_1^{\infty} a_n b_n - c_n d_n$$

$$\left(a_n, \ c_n > 0; \ a_n, \ c_n \to 0, \ n \to \infty; \ 0 < b_n, \ d_n < 1; \ \overline{\lim_{n \to \infty}} \, b_n < 1; \ \overline{\lim_{n \to \infty}} \, d_n < 1\right) \tag{5}$$

représente, d'après la figure, la somme algébrique des surfaces limitées par les parties des parallèles et des arcs-limites.

De la figure il s'ensuit de façon évidente que la série (5) converge lorsque

$$\overline{C_n\ B_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

où $\overline{C_n\ B_n}$ est la distance entre les points C_n et B_n. Cette condition est satisfaite lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1-d_k}{1-b_k} = 1 \tag{6}$$

$$\left(a_n = \widehat{A_n\ B_n},\ C_n = \widehat{A_n'\ C_n},\ \overline{A_1\ A_n} = -\lg \prod_{k=1}^{n} (1-b_k),\ \overline{A_1\ A_n'} = -\lg \prod_{k=1}^{n} (1-d_k)\right).$$

La série (5) converge aussi dans le cas où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1-d_k}{1-b_k} = C \quad (0 < C < \infty), \tag{7}$$

car, en ajoutant une constante déterminée à cette série, cette condition peut être réduite à la condition (6).

La condition pour que la série (5) converge absolument dépend de la vitesse avec laquelle les suites (6) resp. (7) convergent et cette même vitesse est conditionnée par la suite des arcs-limites

$$\left\{ \widehat{M_n L_n} \right\} = \left\{ \widehat{A_1\ L_n} - \widehat{A_1 M_n} \right\}. \tag{8}$$

Si cette suite est bornée, la série (5) converge absolument. De cette façon-si on réduit le critère au moyen duquel on établit la convergence absolue de la série (5) au même principe que dans le cas des séries (2) et (4). Ainsi, aux conditions (1) et (3) pour la convergence des séries (2) et (4), la condition correspondante pour la série (5), d'après (8) est

$$\frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (1-b_k)} - \frac{c_k}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (1-d_k)} = O(1), \quad n \to \infty, \tag{9}$$

ou bien cette autre

$$\frac{a_n}{c_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-d_k}{1-b_k} - C = O\left(\frac{1}{c_n} \prod_{k=1}^{n-1} (1-d_k)\right), \quad n \to \infty,$$

$$(0 < C < 1).$$

De ce que l'on vient d'exposer ci-dessus il résulte le

Théorème 1 — *Si les termes des séries divergentes* (2) *et* (4) *satisfont la condition* (7), *la série* (5) *converge; pourtant, s'ils satisfont, outre la condition* (7), *la condition* (9) *également la série* (5) *converge alors absolument.*

Lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1-d_k}{1-b_k} = \infty,$$

la série (5) peut soit converger ou diverger. Dans ce cas-ci la série (5) doit être écrite sous la forme

$$\sum_1^\infty a_n b_n - c_n d_n = \sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n} b_n \lambda_n - \frac{c_n}{\mu_n} d_n \mu_n \qquad (\lambda_n, \mu_n > 0)$$

$$\left(\frac{a_n}{\lambda_n}, \frac{c_n}{\mu_n} \to 0, \ n \to \infty; \ 0 < b_n \lambda_n, \ d_n \mu_n < 1; \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \ b_n \lambda_n < 1, \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \ d_n \mu_n < 1\right)$$

et il faut vérifier sur les suites

$$\left\{\frac{a_n \mu_n}{c_n \lambda_n}\right\}, \quad \left\{\prod_{k=1}^n \frac{1-d_k \mu_k}{1-b_k \lambda_k}\right\}$$

si la série converge d'après le théorème formulé ci-dessus.

D'après ce qu'on vient d'exposer ci-dessus on peut formuler le

Théorème 2 — *S'il existe une telle suite de nombres* $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n > 0)$ *et* $\{\mu_n\}$ $(\mu_n > 0)$ *qui satisferait, avec les termes des séries divergentes* (2) *et* (4), *les conditions:*

$$\frac{a_n}{\lambda_n}, \frac{c_n}{\mu_n} \to 0, \ n \to \infty; \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \ \lambda_n b_n < 1; \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \ \mu_n d_n < 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n \mu_n}{c_n \lambda_n} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1-d_k \mu_k}{1-b_k \lambda_k} = C \qquad (0 < C < \infty),$$

alors la série (5) *converge; pourtant, si les termes des séries divergentes satisfont, outre ces conditions-ci, également la condition*

$$\frac{a_n}{\lambda_n \prod_{k=1}^{n-1} (1-b_k \lambda_k)} - \frac{c_n}{\mu_n \prod_{k=1}^{n-1} (1-d_k \mu_k)} = O(1), \qquad n \to \infty,$$

la série (5) *converge alors absolument.*

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = 1$, et la suite

$$\{\alpha_n\} = \left\{\prod_{k=1}^n \frac{1-d_k}{1-b_k}\right\}$$

bornée. Si cette suite possède plusieurs points d'accumulation, la série (5) diverge alors. Le résultat suivant s'ensuit de façon évidente.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = 1$ *et si* $0 < \underline{\lim_{n\to\infty}} \ \alpha_n < \overline{\lim_{n\to\infty}} \ \alpha_n = C < \infty$,

la série (5) *est bornée et divergente.*

Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n} = 1,$$

alors, pour la série (5), lorsqu'on l'écrit sous la forme

$$\sum_1^\infty a_n b_n - c_n d_n = \sum_1^\infty \frac{a_n b_n}{\lambda_n} \lambda_n - \frac{c_n d_n}{\mu_n} \mu_n,$$

on peut formuler, d'après le théorème 2, le résultat suivant:

S'il existe une telle suite de nombres $\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n<1,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\lambda_n<1)$ *et* $\{\mu_n\}$ $(0<\mu_n<1,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\mu_n<1)$ *qui satisferait, avec les termes des séries divergentes* (2) *et* (4), *les conditions:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{\lambda_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n d_n}{\mu_n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n \mu_n}{c_n d_n \lambda_n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\mu_k}{1-\lambda_k}=C<\infty\,,$$

la série (5) *converge alors; pourtant si ces conditions-ci sont satisfaites, outre la suite*

$$\{\alpha_n\}=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\mu_k}{1-\lambda_k}\right\}$$

qui possède plusieurs points d'accumulation, à savoir $0<\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\alpha_n<\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\alpha_n=C<\infty$, *la série* (5) *est alors bornée et divergente.*

Supposons que les termes des suites $\{S_n\}$ et $\{T_n\}$ satisfont les conditions:

$$0<S_1<S_2<\cdots<S_n\to\infty,\ n\to\infty;$$

$$0<T_1<T_2<\cdots<T_n\to\infty,\ n\to\infty;$$

$$S_{n+1}-S_n\to 0,\ n\to\infty;\quad T_{n+1}-T_n\to 0,\ n\to\infty.$$

Les séries

(10) $$\sum_1^\infty S_{n+1}-S_n \quad\text{et}\quad \sum_1^\infty T_{n+1}-T_n$$

étant divergentes, on peut appliquer à la série

$$\sum_1^\infty (S_{n+1}-S_n)-(T_{n+1}-T_n)$$

le théorème 2. Par conséquent, on peut formuler le résultat suivant:

S'il existe une telle suite de nombres $\{\lambda_n\}$ $\left(0<\lambda_n<1,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\lambda_n<1\right)$ *et* $\{\mu_n\}$ $\left(0<\mu_n<1,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\mu_n<1\right)$ *qui satisferait, avec les termes des séries divergentes* (10) *les conditions:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{\lambda_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{T_{n+1}-T_n}{\mu_n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(S_{n+1}-S_n)\,\mu_n}{(T_{n+1}-T_n)\,\lambda_n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\mu_k}{1-\lambda_k}=C\quad(0<C<1)$$

alors la suite

$$\{S_n-T_n\}$$

converge; si, pourtant, celles-ci sont satisfaites à l'exeption de la suite

$$\{\alpha_n\}=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\mu_k}{1-\lambda_k}\right\}$$

qui est bornée et possède plusieurs points d'accumulation ($\varliminf_{n\to\infty}\alpha_n>0$) *la suite* $\{S_n-T_n\}$ *est alors aussi bornée et possède plusieurs points d'accumulation*

Les résultats exposés ci-dessus peuvent être appliqués aux séries semi-convergentes. Soit donnée une telle série

$$\sum_{1}^{\infty} a_n. \tag{11}$$

Ecrivons la suite des sommes partielles de cette série sous la forme

$$s_n=\sum_{1}^{n} a_k=S_p-T_q \qquad (p+q=n)$$

où la suite $\{S_p\}=\left\{\sum_{k=1}^{p} a_{m_p}\right\}$ contient uniquement les termes positifs et la suite $\{T_q\}=\left\{-\sum_{k=1}^{q} a_{n_k}\right\}$ uniquement les termes négatifs de la suite $\{s_n\}$. De cette hypothèse il suit de façon évidente

$$0<S_1<S_2<\ldots<S_p\to\infty,\ p\to\infty;$$
$$0<T_1<T_2<\ldots<T_q\to\infty,\ q\to\infty.$$

Lorsqu'on écrit la suite $\{s_n\}$ sous la forme

$$s_n=S_p-T_p+\sum_{k=p}^{q} a_{n_k} \qquad (p<q)$$

ou bien

$$s_n=S_q-T_q+\sum_{k=q}^{p} a_{m_k} \qquad (q>p),$$

alors la suite $\left\{\sum_{k=p}^{q} a_{n_k}\right\}$ resp. la suite $\left\{\sum_{k=q}^{p} a_{m_k}\right\}$ est une suite-nulle sous la condition $p-q=O(1)$, p, $q,\to\infty$. De là, en appliquant les résultats exposés ci-desus, on peut formuler ce

Théorème 3 — *Supposons que la série*

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \qquad (a_n\to 0,\ n\to\infty)$$

soit semi-convergente et que sa somme partielle $s_n=\sum_{k=n}^{n} a_n$ *contienne* p *termes positifs et* q *termes négatifs dont* $a_{m_p}>0$ *et* $a_{n_q}<0$ ($m_p\leqslant n$, $n_q\leqslant n$; $p-q=0\,(1)$, p, $q\to\infty$). *S'il existe une telle suite de nombres* $\{\lambda_n\}$ ($0<\lambda_n<1$, $\varlimsup_{n\to\infty}\lambda_n<1$) *et* $\{\mu_n\}$ ($0\leqslant\mu_n<1$, $\varlimsup_{n\to\infty}\mu_n<1$) *qui satisferait, avec les termes des suites divergentes*

$$\sum_{k=1}^{p} a_{m_p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{p} a_{n_p}$$

les conditions

$$\lim_{p\to\infty}\frac{a_{m_p}}{\lambda_p}=\lim_{p\to\infty}\frac{a_{n_p}}{\mu_p}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{m_p}\mu_p}{a_{n_p}\lambda_p}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{p}\frac{1-\mu_k}{1-\lambda_k}=C \qquad (0<C<\infty),$$

la série (11) *converge alors; pourtant, si ces conditions-ci sont satisfaites à l'exception de la suite*

$$\{\alpha_n\}=\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\mu_k}{1-\lambda_k}\right\}$$

qui est bornée et possède plusieurs poins d'accumulation $(0<\varliminf_{p\to\infty}\alpha_p)$, *la serie* (11) *est alors bornée et divergente.*

Certains des résultats exposés ci-dessus sont considérablement simplifiés lorsqu'on écrit

$$\lambda_n=\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}},\qquad \mu_n=\frac{q_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

où

$$P_n=\sum_{k=1}^{n}p_k\to\infty,\ n\to\infty \qquad (p_n>0,\ \lim_{n\to\infty}p_n=0)$$

$$Q_n=\sum_{k=1}^{n}q_n\to\infty,\ n\to\infty \qquad (q_n>0,\ \lim_{n\to\infty}q_n=0)$$

car alors

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\mu_k}{1-\lambda_k}=\frac{q_1}{p_1}\,\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Par conséquent, certains des résultats susmentionnés peuvent être formulés de la façon suivante:

a) Si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n P_{n+1}}{p_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n d_n Q_n}{q_n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=C \qquad (0<C<\infty),\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{c_n d_n}=1,$$

alors la série (5) converge.

b) Si

$$0<S_1<S_2<\cdots<S_n\to\infty,\ n\to\infty;$$

$$0<T_1<T_2<\cdots<T_n\to\infty,\ n\to\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(S_{n+1}-S_n)P_{n+1}}{p_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(T_{n+1}-T_n)Q_{n+1}}{q_{n+1}}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=C \qquad (0<C<\infty);\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{T_{n+1}-T_n}=1,$$

c'est la suite $\{S_n-T_n\}$ qui converge.