PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA—SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 92 (1963)

QUELQUES IDENTITÉS ENTRE CERTAINS PRODUITS ET SÉRIES INFINIS

Dragomir Ž. Djoković

(Reçu le 27 juin 1962)

1. INTRODUCTION

En partant de l'identité de *Jacobi*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^{2n-1}z)(1+x^{2n-1}z^{-1})=\sum_{-\infty}^{+\infty}x^{n^2}z^n \tag{1.1}$$

$$(x \text{ et } z, \text{ variables complexes; } |x|<1,\ z\neq 0)$$

laquelle intervient dans la théorie des fonctions elliptiques, on peut obtenir, comme conséquences, les identités suivantes:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n x^{\frac{1}{2}(3n^2+n)}, \tag{1.2}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{1}{2}(n^2+n)}, \tag{1.3}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^{2n}}{1-x^{2n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{\frac{1}{2}(n^2+n)}, \tag{1.4}$$

dues à *Euler, Jacobi* et *Gauss* respectivement.

Remarquons qu'on a

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1})(1+x^n)=1 \qquad (|x|<1), \tag{1.5}$$

et par suite à l'identité (1.4) on peut donner la forme

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{\frac{1}{2}(n^2+n)}.$$

Pour la démonstration de ces identités voir les articles[1) 2)].

Récemment *B. Gordon*[3)] a démontré une identité analogue que voici

[1)] G. H. Hardy — E. M. Wright: *An introduction to the theory of numbers*, 4-th ed., Oxford 1960.

[2)] J. M. Dobbie: *A simple proof of the Rogers — Ramanujan identities*, The Quarterly Journal of Mathematics (2), vol. 13 (1962), № 49, pp. 31—34.

[3)] B. Gordon: *Some identities in combinatorial analysis*, The Quarterly Journal of Mathematics (2), vol. 12 (1961), № 48, pp. 285—290.

$$(1.6)\qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{2n-1}z)(1-x^{2n-1}z^{-1})(1-x^{4n-4}z^{2})(1-x^{4n-4}z^{-2})$$
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}x^{3n^2-2n}(z^{3n}+z^{-3n}-z^{3n-2}-z^{-3n+2}),$$

valable aussi sous les conditions $|x|<1,\ z\neq 0$.

L. J. Mordell[4] a donné une nouvelle démonstration de l'identité (1.6) en employant la théorie des fonctions thêta.

B. Gordon a obtenu, comme conséquences de (1.6), les deux identités suivantes

$$(1.7)\qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{n})^{3}(1-x^{2n-1})^{2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}(6n+1)x^{\frac{1}{2}(3n^2+n)},$$

$$(1.8)\qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{2n-1})^{2}(1-x^{4n})^{2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}(3n+1)x^{3n^2+2n}.$$

B. Gordon[3] suggère les généralisations possibles, mais il n'a réussi à obtenir aucune identité nouvelle en dehors de (1.7) et (1.8).

Dans cet article nous avons effectué une des généralisations suggérées par *Gordon*.

2. IDENTITÉ PRINCIPALE

Soit

$$(2.1)\qquad B(s,\ t)\overset{\text{def}}{=}\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^{n}t),$$

$$(2.2)\qquad A(s,\ t)\overset{\text{def}}{=}(1-t^{-1})^{2}B^{2}(s,\ t)\,B^{2}(s,\ t^{-1}).$$

On vérifie sans difficulté que la fonction (2.2) satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(2.3)\qquad A(s,\ t)=s^{2}t^{2}A(s,\ st).$$

Le produit au moyen duquel la fonction $A(s,\ t)$ est définie, étant absolument convergent pour $|s|<1,\ t\neq 0$, s'écrit sous la forme que voici

$$(2.4)\qquad A(s,\ t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_k(s)\,t^{k}.$$

La série qui se trouve au second membre de la relation (1.4) est uniformément convergente pour $|s|<\theta,\ T^{-1}<|t|<T$, où θ et T $(0<\theta<1,\ T>1)$, sont arbitraires.

A partir des égalités (2.3) et (2.4), on trouve la relation récurrente

$$(2.5)\qquad a_k(s)=a_{k-2}(s)\,s^{k}\qquad (k\text{ entier}).$$

Il s'ensuit

$$(2.6)\qquad a_{2n}(s)=a_0(s)\,s^{n^2+n}$$
$$(n\text{ entier}).$$
$$(2.7)\qquad a_{2n+1}(s)=a_1(s)\,s^{n^2+2n}$$

[4] L. J. Mordell: *An identity in combinatorial analysis*, Proceedings of the Glasgow Mathematical Association, vol. 5 (1962), part 4, pp. 197—200.

D'après (2.6) et (2.7) la série (2.4) prend la forme que voici

$$A(s,\,t)=a_0(s)\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2+n}\,t^{2n}+a_1(s)\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2+2n}\,t^{2n+1}. \tag{2.8}$$

Étant donné que $A(s,\,s^{-1})=0$, si l'on fait $t=s^{-1}$ et $t=-s^{-1}$ dans (2.8), il vient

$$a_0(s)\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2-n}+a_1(s)\,s^{-1}\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2}=0,$$

$$a_0(s)\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2-n}-a_1(s)\,s^{-1}\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2}=A(s,\,-s^{-1}).$$

Par suite, on a

$$2a_0(s)\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2-n}=A(s,\,-s^{-1}), \tag{2.9}$$

$$2a_1(s)\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2}=-sA(s,\,-s^{-1}). \tag{2.10}$$

La relation (2.2) donne

$$A(s,\,-s^{-1})=4\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^n)^4. \tag{2.11}$$

En posant $x=s^2$ dans l'identité (1.4), on trouve

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-s^{4n}}{1-s^{4n-2}}=\sum_{n=0}^{\infty} s^{n^2+n}=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2+n}=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2-n}. \tag{2.12}$$

En faisant encore $x=s$ et $z=1$ dans (1.1), on obtient

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^{2n})\,(1+s^{2n-1})^2=\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2}. \tag{2.13}$$

On a, d'après (2.9), (2.11), (2.12) et (1.5), la relation suivante

$$a_0(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+s^n)^4\,(1-s^{4n-2})^2}{1-s^{2n}}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+s^n)\,(1+s^{2n-1})^2}{1-s^n}, \tag{2.14}$$

et, d'après (2.10), (2.11) et (2.13),

$$a_1(s)=-2s\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+s^n)^4}{(1-s^{2n})\,(1+s^{2n-1})^2}=-2s\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+s^n)\,(1+s^{2n})^2}{1-s^n}. \tag{2.15}$$

Si l'on utilise les relations (2.1), (2.2), (2.14) et (2.15), l'identité (2.8) prend la forme suivante:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^n)\,(1-s^{2n-1})\,(1-s^n\,t)^2\,(1-s^{n-1}\,t^{-1})^2$$

$$=\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2\right\}\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2+n}\,t^{2n}-2s\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n})^2\right\}\sum_{-\infty}^{+\infty} s^{n^2+2n}\,t^{2n+1},$$

ou bien

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^n)(1-s^{2n-1})(1-s^n t)^2(1-s^{n-1}t^{-1})^2 \tag{2.16}$$
$$=\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2\right\}\sum_{-\infty}^{+\infty}s^{n^2+n}t^{2n}$$
$$-2\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n})^2\right\}\sum_{-\infty}^{+\infty}s^{n^2}t^{2n-1}.$$

C'est l'identité que nous voulions obtenir et qui est analogue aux identités (1.1) et (1.6).

Nous allons donner à l'identité (2.16) une nouvelle forme.

L'identité (1.1), si l'on y fait $x=s$, $z=st^2$ et ensuite $x=s$, $z=t^2$, fournit les égalités

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}s^{n^2+n}t^{2n}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^{2n})(1+s^{2n}t^2)(1+s^{2n-2}t^{-2}), \tag{2.17}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}s^{n^2}t^{2n-1}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^{2n})(1+s^{2n-1}t^2)(1+s^{2n-1}t^{-2}). \tag{2.18}$$

D'après (2.17) et (2.18), l'identité (2.16) prend la forme suivante:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^{2n-1})^2(1-s^n t)^2(1-s^{n-1}t^{-1})^2$$
$$=\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2(1+s^{2n}t^2)(1+s^{2n-2}t^{-2})$$
$$-\frac{2}{t}\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n})^2(1+s^{2n-1}t^2)(1+s^{2n-1}t^{-2})$$

ou bien

$$(1-t^{-1})^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^{2n-1})^2(1-s^n t)^2(1-s^n t^{-1})^2 \tag{2.19}$$
$$=(1+t^{-2})\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2(1+s^{2n}t^2)(1+s^{2n}t^{-2})$$
$$-2t^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n})^2(1+s^{2n-1}t^2)(1+s^{2n-1}t^{-2}).$$

3. CONSÉQUENCES

(a). Si l'on pose $t=e^{i\theta}$ dans l'identité (2.19), on trouve

$$(1-\cos\theta)\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^{2n-1})^2(1-2s\cos\theta+s^{2n})^2 \tag{3.1}$$
$$=\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n})^2(1+2s^{2n-1}\cos 2\theta+s^{4n-2})$$
$$-\cos\theta\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2(1+2s^{2n}\cos 2\theta+s^{4n}).$$

Avec les notations de *Jacobi*, l'identité (3.1) s'écrit

$$\operatorname{dn}(u\,|\,K, iK') - \operatorname{cn}(u\,|\,K, iK') = a\,\frac{H^2\left(\frac{u}{2}\,\Big|\,K, iK'\right)\Theta^2\left(\frac{u}{2}\,\Big|\,K, iK'\right)}{\Theta(u\,|\,K, iK')},$$

où a désigne l'expression

$$a = \frac{1}{2\sqrt{q}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n-1})^6}{(1-q^{2n})^3}.$$

Par introduction des fonctions thêta, l'identité (2.19) prend la forme plus simple

$$2\,\vartheta_0^2(v)\,\vartheta_1^2(v) = \vartheta_2^2\,\vartheta_3\,\vartheta_3(2v) - \vartheta_2\,\vartheta_3^2\,\vartheta_2(2v).$$

Dans cette forme, l'identité (2.19) peut être démontrée aisément en utilisant la théorie des fonctions thêta.

(b). En divisant l'identité (2.16) par $(t-1)^2$, on obtient

$$\begin{aligned} t^{-2}\prod_{n=1}^{\infty}&(1-s^n)(1-s^{2n-1})(1+s^n t)^2(1-s^n t^{-1})^2 \\ &= (t-1)^{-2}\left\{\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2\right]\sum_{-\infty}^{+\infty}s^{n^2+n}\,t^{2n}\right. \\ &\qquad\left. -2\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n})^2\right]\sum_{-\infty}^{+\infty}s^{n^2}\,t^{2n-1}\right\}. \end{aligned}$$

Lorsqu'on fait ici t tendre vers l'unité, on a l'identité suivante:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty}(1-s^n)^5(1-s^{2n-1}) &= \left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2\right]\sum_{-\infty}^{+\infty}n(2n-1)\,s^{n^2+n} \\ &\quad -2\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n})^2\right]\sum_{-\infty}^{+\infty}(n-1)(2n-1)\,s^{n^2}. \end{aligned}\tag{3.2}$$

(c). A l'identité (2.19) on peut donner la forme

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty}&(1-s^{2n-1})^2(1-s^n t)^2(1-s^n t^{-1})^2 \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2(1+s^{2n}t^2)(1+s^{2n}t^{-2}) \\ &\quad + \frac{2t}{(t-1)^2}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2(1+s^{2n}t^2)(1+s^{2n}t^{-2}) - \prod_{n=1}^{\infty}(1+s^n)^2\right\} \\ &\quad - \frac{2t}{(t-1)^2}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n})^2(1+s^{2n-1}t^2)(1+s^{2n-1}t^{-2}) - \prod_{n=1}^{\infty}(1+s^n)^2\right\}. \end{aligned}\tag{3.3}$$

Lorsque $t \to 1$, l'égalité (3.3) donne

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^{2n-1})^2(1-s^n)^4=\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^n)^2+2(L_1-L_2), \tag{3.4}$$

où nous avons posé

$$L_1=\lim_{t\to 1}\frac{D_1}{(t-1)^2}, \quad L_2=\lim_{t\to 1}\frac{D_2}{(t-1)^2},$$

$$D_1=\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2(1+s^{2n}t^2)(1+s^{2n}t^{-2})-\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^n)^2, \tag{3.5}$$

$$D_2=\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n})^2(1+s^{2n-1}t^2)(1+s^{2n-1}t^{-2})-\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^n)^2.$$

Pour évaluer les limites L_1 et L_2, nous allons représenter les différences D_1 et D_2 sous la forme des séries suivantes:

$$\begin{aligned} D_1=&\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\prod_{n=1}^{k-1}(1+s^{2n})^2\right. \\ &\left.\times[(1+s^{2k}t^2)(1+s^{2k}t^{-2})-(1+s^{2k})^2]\prod_{n=k+1}^{\infty}(1+s^{2n}t^2)(1+s^{2n}t^{-2})\right\} \\ =&\frac{(t^2-1)^2}{t^2}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{s^{2k}}{(1+s^{2k})^2}\left[\prod_{n=1}^{k}(1+s^{2n})^2\right]\right. \\ &\left.\times\prod_{n=k+1}^{\infty}(1+s^{2n}t^2)(1+s^{2n}t^{-2})\right\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} D_2=&\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n})^2\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\prod_{n=1}^{k-1}(1+s^{2n-1})^2\right]\right. \\ &\left.\times[(1+s^{2k-1}t^2)(1+s^{2k-1}t^{-2})-(1+s^{2k-1})^2]\prod_{n=k+1}^{\infty}(1+s^{2n-1}t^2)(1+s^{2n-1}t^{-2})\right\} \\ =&\frac{(t^2-1)^2}{t^2}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^{2n-1})^2\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{s^{2k-1}}{(1+s^{2k-1})^2}\left[\prod_{n=1}^{k}(1+s^{2n-1})^2\right]\right. \\ &\left.\times\prod_{n=k+1}^{\infty}(1+s^{2n-1}t^2)(1+s^{2n-1}t^{-2})\right\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

D'après (3.6) et (3.7), on trouve

$$L_1=4\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^n)^2\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^{2k}}{(1+s^{2k})^2}, \tag{3.8}$$

$$L_2=4\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+s^n)^2\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^{2k-1}}{(1+s^{2k-1})^2}. \tag{3.9}$$

En remplaçant L_1 et L_2 dans (3.4) par les expressions (3.8) et (3.9), il vient

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^n)^4(1-s^{2n-1})^4=1+8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{s^n}{(1+s^n)^2}. \tag{3.10}$$

Étant donné que

$$\frac{s^n}{(1+s^n)^2}=s^n-2s^{2n}+3s^{3n}-\ldots,$$

la formule (3.10) devient

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^n)^4(1-s^{2n-1})^4=1+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+n-1}ms^{mn}. \tag{3.11}$$

Posons

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+n-1}ms^{mn}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)s^n. \tag{3.12}$$

En comparant les coefficients de s^n, on conclut

$$\alpha(n)=\sum_{d|n}(-1)^{d+d'-1}d \qquad \left(d'=\frac{n}{d},\ d>0\right). \tag{3.13}$$

Dans la théorie des nombres, on introduit la fonction σ définie par

$$\sigma(n)=\sum_{d|n}d \qquad (d>0), \tag{3.14}$$

qui possède les deux propriétés suivantes:

$$\sigma(n_1 n_2)=\sigma(n_1)\sigma(n_2) \qquad (n_1 \text{ et } n_2 \text{ premiers entre eux}), \tag{3.15}$$

$$\sigma(p^r)=\frac{p^{r+1}-1}{p-1} \qquad (p \text{ nombre premier}). \tag{3.16}$$

Nous allons exprimer la fonction (3.13) au moyen de la fonction (3.14).

Pour n impair, $d+d'$ est pair. Par suite, on a

$$\alpha(2n+1)=-\sigma(2n+1). \tag{3.17}$$

Soit à présent $n=2^rN$ ($r>0$, N impair).

Les diviseurs d de n pour lesquels la somme $d+d'$ est impaire ont la forme d_1 ou $2^r d_1$, où d_1 représente un diviseur de N.

La somme de tels diviseurs de n est

$$\Sigma_1=\sum_{\substack{d|n\\ d+d'\equiv 1\\ (\mathrm{mod}\ 2)}}d=(2^r+1)\sum_{d_1|N}d_1=(2^r+1)\sigma(N).$$

La somme des autres diviseurs de n est

$$\Sigma_2=\sigma(n)-\Sigma_1=(2^{r+1}-1)\sigma(N)-\Sigma_1.$$

En utilisant les deux dernières relations, on obtient

$$\alpha(2^r N) = \Sigma_1 - \Sigma_2 = 2\,\Sigma_1 - (2^{r+1} - 1)\,\sigma(N),$$

ou bien

$$\alpha(2^r N) = 3\,\sigma(N) \quad (r > 0,\ N \text{ impair}). \tag{3.18}$$

D'après (3.12), (3.17) et (3.18), le développement prend la forme

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - s^n)^4 (1 - s^{2n-1})^4$$

$$= 1 + 8\left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(2n-1)\, s^{2n-1} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(2n-1)\, s^{2(2n-1)} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(2n-1)\, s^{2^2(2n-1)} + \dots \right\},$$

ou plus précisément

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - s^n)^4 (1 - s^{2n-1})^4 = 1 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(2n-1)\, s^{2n-1} + 24 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(2n-1) s^{2^k(2n-1)}. \tag{3.19}$$

Si l'on remplace s par $-s$, la relation (2.13) devient

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - s^n)(1 - s^{2n-1}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n s^{n^2}. \tag{3.20}$$

Désignons par $r_4(n)$ le nombre de représentations de n (n entier positif ou nul) sous la forme $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ (a_i entiers), en regardant deux représentations comme distinctes si l'ordre des a_i ou leurs signes sont différents.

On a l'égalité suivante

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - s^n)^4 (1 - s^{2n-1})^4 = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n s^{n^2} \right)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r_4(n)\, s^n. \tag{3.21}$$

De (3.19) et (3.21), il vient

$$r_4(0) = 1,$$

$$r_4(2n-1) = 8\,\sigma(2n-1) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$r_4[2^k(2n-1)] = 24\,\sigma(2n-1) \qquad (k, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ces formules sont connues {voir [1]}.