PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 88 (1963)

SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES INDÉTERMINÉES

Radosav Ž. Đorđević

(Reçu le 21 novembre 1962)

1. Dans l'article [1] *D. S. Mitrinović* a indiqué trois procédés d'intégration de l'équation

$$y''/y - z''/z = h, \tag{1.1}$$

où h est constante quelconque.

Un de ces procédés est le suivant:

Si T est une fonction continue et differérentiable, il est possible de trouver une solution de l'équation (1.1) comme pair des fonctions $\{y(x), z(x)\}$ qui vérifient la relation

$$y = T(z). \tag{1.2}$$

D. S. Mitrinović a appliqué ce procédé dans l'article [2] à l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues, à savoir: les équations

$$(1/u)(\partial^2 u/\partial x\partial y) = (k/v)(\partial^2 v/\partial x\partial y) \qquad (k = \text{const} \neq 0), \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial y} = k\, \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \bigg/ \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (k = \text{const} \neq 0), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{a'}{a}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'}\right)\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{1.5}$$

$$(k = \text{const},\ a = a(t),\ a = da/dt,\ a'' = d^2a/dt^2)$$

avec le changement

$$u = T(v) \tag{1.6}$$

deviennent des équations différentielles ordinaires.

Dans cet article, avec le procédé de *D. S. Mitrinović*, nous montrerons une possibilité d'intégration de plussieurs équations aux dérivées partielles.

2. L'équation

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial u}{\partial y}=b\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial v}{\partial y}+f\Big/\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\quad (a\neq b,\ a,\ b=\text{const},\ f=f(x)) \tag{2.1}$$

avec le changement (1.6) devient

$$(a-b)\,T'v''v'+aT''v'^3-f=0\,, \tag{2.2}$$

où $T^{(n)}=d^nT/dv^n$ et $v^{(n)}=d^nv/dx^n$.

En posant $v'=p$, $v''=p\,dp/dv$ et $p^3=q$, on obtient l'équation

$$(a-b)\,T'q'+3\,aT''q-3f=0\,, \tag{2.3}$$

ce qui est l'équation linéaire pour $q(v)$.

3. Prenons l'équation

$$a\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\Big/\frac{\partial v}{\partial y}=b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big/\frac{\partial u}{\partial y}+c\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\Big/\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\quad (a,\ b,\ c=\text{const})\,. \tag{3.1}$$

En partant de la relation (1.6), on a l'équation

$$(a-b)\,T'v'v'''=bT'''v'^4+3\,bT''v'^2v''+cv''^2 \tag{3.2}$$

ou

$$(a-b)\,T'p^2(p'^2+pp'')=bT'''p^4+3\,bT''p^3p'+cp^2p'^2\qquad (v'=p)\,. \tag{3.3}$$

En posant $p=\exp(\int z\,dv)$, on obtient l'équation suivante

$$(a-b)\,T'z'+[2(a-b)\,T'-c]\,z^2-3\,bT''z-bT'''=0\,, \tag{3.4}$$

qui est une équation de *Riccati* pour $z(v)$.

4. Considérons l'équation

$$a\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\Big/\frac{\partial v}{\partial x}=b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big/\frac{\partial u}{\partial x}+c\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\Big/\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\quad (a,\ b,\ c=\text{const})\,. \tag{4.1}$$

L'équation (4.1), grâce à la transformation (1.6), devient

$$(a-b)\,T'v'v'''=bT'''v'^4+3\,bT''v'^2v''+cv''^2 \tag{4.2}$$

ou

$$(a-b)\,T'z'+\{2(a-b)\,T'-c\}\,z^2-3\,bT''z-bT'''=0\,, \tag{4.3}$$

avec $v'=p$ et $p=\exp(\int z\,dv)$.

L'équation (4.3) est aussi l'équation de *Riccati* pour $z(v)$.

5. L'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\alpha+1}+f\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{\alpha+1}=0 \tag{5.1}$$

où $f=f(x)$ et $\varphi=\varphi(x)$, avec le changment (1.6) devient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\alpha+1}=0 \tag{5.2}$$

ou bien

$$p'+fp+\varphi p^\alpha=0, \tag{5.3}$$

où $p=\partial v/\partial x$ et $p'=\partial^2 v/\partial x^2$.

L'équation (5.3) est une équation de *Bernoulli* pour $p(x)$.

6. Prenons enfin l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{m+n-\alpha-3}+f\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{m-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{n-\alpha-1}$$
$$+\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n-\alpha-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{m-2}=0, \tag{6.1}$$

où $f=f(x)$ et $\varphi=\varphi(x)$.

En partant de la relation (1.6), on a l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+fT'^m\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+T'^n\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\alpha+1}=0, \tag{6.2}$$

ou

$$p'+Fp+\Phi p^\alpha=0, \tag{6.3}$$

où $p=\partial v/\partial x$, $p'=\partial^2 v/\partial x^2$ et $F=fT'^m$, $\Phi=\varphi T'^n$.

L'équation (6.3) est aussi une équation de *Bernoulli* pour $p(v)$.

Pour $m=0$ et $n=0$ l'équation (6.1) devient l'équation (5.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinovitch: *Sur une équation différentielle indéterminée intervenant dans un problème important de l'Élasticité,* 1° Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris t. 232 (1951), p. 681—683, p. 1334—1336;

2° Annuaire de la Faculté de philosophie de l'Université de Skopje — Section des sciences naturelles, t. 3, № 6 (1950), 16 pages.

[2] D. S. Mitrinovitch: *Sur certaines équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues,* Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd.