PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 87 (1963)

O JEDNOM ARITMETIČKOM PROBLEMU

D. Ž. Đoković

(Primljeno 5. novembra 1962)

B. Berneis [1] dao je rešenje sledećeg problema:

Problem. *Odrediti sve prirodne brojeve Z_1 koji imaju osobinu $Z_2 = nZ_1$, gde je n fiksan prirodan broj, a Z_2 broj koji se dobija iz Z_1 premeštanjem njegove poslednje cifre ispred prve. (Pretpostavlja se da je upotrebljen dekadni brojni sistem.)*

B. Berneis se ograničio na slučajeve $n = 1, 2, \ldots, 9$. Osim toga on (u tim slučajevima) nije odredio sve brojeve Z_1 koji imaju navedenu osobinu. Navešćemo novo i potpuno rešenje ovog problema i pokazaćemo na čemu počivaju dve „čudnovate" činjenice koje je primetio *B. Berneis*, ali ih nije objasnio.

Rešenje. Neka je

$$Z_1 = (z_1 z_2 \ldots z_k) \qquad (z_i = 0, 1, 2, \ldots, 9) \tag{1}$$

jedan od brojeva koje treba odrediti, napisan u dekadnom brojnom sistemu. Formirajmo beskonačni periodični decimalni razlomak

$$z = 0,\ z_1 z_2 \ldots z_k\, z_1 z_2 \ldots z_k \ldots \tag{2}$$

Kako je, prema uslovima zadatka,

$$n Z_1 = (z_k z_1 z_2 \ldots z_{k-1}), \tag{3}$$

iz (2) sleduje

$$nz = 0,\ z_k z_1 z_2 \ldots z_{k-1}\, z_k z_1 z_2 \ldots z_{k-1} \ldots,$$

tj.

$$nz = (z_k + z)\, 10^{-1}$$

ili

$$z = \frac{z_k}{10n - 1} \qquad (z_k = 1, 2, \ldots, 9). \tag{4}$$

Dakle, svaki broj (1) koji zadovoljava uslov (3) je period razlomka (4) i to onaj period koji počinje odmah iza decimalne zapete. Ovaj period ne mora biti najkraći (osnovni), pošto to nismo nigde pretpostavili.

Dokažimo da važi i obrnuto:

a) Decimalni razvoj broja (4) je čisto periodičan tj. cifre tog razvoja se periodički ponavljaju počev odmah iza decimalne zapete.

b) Poslednja cifra onog perioda broja (4) koji počinje odmah iza decimalne zapete je z_k, tj. brojilac razlomka (4).

c) Period (1) broja (4) koji počinje odmah iza decimalne zapete zadovoljava uslov (3).

Dokažimo tvrđenje a). Ako pretpostavimo da ono nije tačno, bilo bi

$$z=0,\ a_1 a_2 \ldots a_i b_1 b_2 \ldots b_k b_1 b_2 \ldots b_k \ldots \qquad (i,\ k \geqslant 1,\ a_i \neq b_k).$$

Odavde bi sledovalo

$$z=\frac{z_k}{10n-1}=\frac{10^k (a_1 a_2 \ldots a_i)+(b_1 b_2 \ldots b_k)-(a_1 a_2 \ldots a_i)}{10^i (10^k-1)},$$

što je nemoguće jer zbog $a_i \neq b_k$ razlika $(b_1 b_2 \ldots b_k)-(a_1 a_2 \ldots a_i)$ nije deljiva sa 10.

Prema tome, imamo

(5) $$z=0,\ b_1 b_2 \ldots b_k b_1 b_2 \ldots b_k \ldots$$

Dokažimo tvrđenje b). Iz (5) sleduje

(6) $$z=\frac{z_k}{10n-1}=\frac{(b_1 b_2 \ldots b_k)}{10^k-1}.$$

Kako su poslednje cifre brojeva $10n-1$ i 10^k-1 devetke, zaključujemo da je

$$9 z_k \equiv 9 b_k \pmod{10},$$

odakle sleduje $z_k = b_k$.

Na kraju dokažimo i tvrđenje c). Iz (4) sleduje

$$\begin{aligned} nz &= (z_k+z)\, 10^{-1} \\ &= (b_k+z)\, 10^{-1} \\ &= 0,\ b_k b_1 b_2 \ldots b_{k-1} b_k b_1 b_2 \ldots b_{k-1} \ldots \\ &= \frac{(b_k b_1 b_2 \ldots b_{k-1})}{10^k-1}. \end{aligned}$$

Upoređujući poslednju jednakost sa (6), zaključujemo da je

$$n (b_1 b_2 \ldots b_k) = (b_k b_1 b_2 \ldots b_{k-1}),$$

što je i trebalo dokazati.

Ovim je navedeni problem u potpunosti rešen.

Primer. Ako je $n=4$, $z_k=1$ iz (4), dobijamo

$$z=0,\ 025641\ 025641 \ldots$$

Prema tome, za Z_1 možemo uzeti brojeve

$$\begin{array}{r} 0\ 25641 \\ 02\ 56410\ 25641 \\ 025\ 64102\ 56410\ 25641 \\ \vdots \end{array} \tag{7}$$

gde prednju nulu možemo izostaviti, ali o njoj moramo voditi računa pri formiranju broja Z_2.

Ako uzmemo da je $z_k = 2, 3, \ldots, 9$, tada se umesto brojeva (7) dobijaju brojevi koji su dva, tri, ..., devet puta veći od brojeva (7).

B. Berneis je (izuzev u slučaju $n=1$) dobio samo one brojeve Z_1 koji su jednaki osnovnim periodima razlomaka (4). Tako, na primer, od brojeva (7) dobio je samo prvi.

Primedba. Za neke vrednosti broja n može se desiti da je dužina osnovne periode razlomka (4) različita za razne vrednosti z_k. Na primer, ako je $n=5$, tada je osnovna perioda razlomka 1/49

(8) 02040 81632 65306 12244 89795 91836 73469 38775 51

a osnovna perioda razlomka $7/49 = 1/7$ je 142857.

Navedimo da je osnovna perioda razlomka 1/89 jednaka

(9) 01123 59550 56179 77528 08988 76404 49438 20224 7191.

B. Berneis je primetio da se brojevi (8) i (9) mogu dobiti „sabiranjem" stepena broja 2 i „sabiranjem" *Fibonacci*-evih brojeva, respektivno:

$$
\begin{array}{r}
020408163264\\
128\\
256\\
512\\
1024\ldots\\
\hline
020408163265306122\ldots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
0112358\\
13\\
21\\
34\\
55\\
89\\
144\ldots\\
\hline
01123595505\ldots
\end{array}
\tag{10}
$$

On to nije mogao dokazati jer, idući drugim putem, nije primetio da su (8) i (9) periodi razlomaka 1/49 i 1/89, respektivno.

Šeme (10) su posledice sledećih jednakosti:

$$
\frac{1}{49} = \frac{2}{100}\,\frac{1}{1-\dfrac{2}{100}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{100}\right)^n,
$$

$$
\frac{1}{89} = \frac{1}{100}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{10^2}} = 10^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,10^{-n},
\tag{11}
$$

gde su $c_0=1,\ c_1=1,\ c_2=2,\ c_3=3,\ c_4=5,\ c_5=8,\ \ldots$ *Fibonacci*-evi brojevi. Jednakost (11) sleduje iz poznate jednakosti

$$
\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.
$$

G e n e r a l i z a c i j e. 1° Na isti način rešava se ovaj problem kada se dve ili više poslednjih cifara prebacuju na početak (zadržavajući svoj poredak).

2° Interesantno je rešiti ovaj problem i u drugim brojnim sistemima.

LITERATURA

[1] B. B e r n e i s : *Vervielfachung einer Zahl durch Versetzung der Endziffer an den Anfang*, Archimedes, Heft 6/7, September 1962.

Résumé

SUR UN PROBLÈME ARITHMÉTIQUE

D. Ž. Djoković

B. Berneis [1] a considéré le problème suivant:

Déterminer tous les nombres naturels Z_1 possédant la propriété $Z_2 = nZ_1$ (n entier), où Z_2 est le nombre obtenu à partir de Z_1 par déplacement de son dernier chiffre devant le premier.

Dans cet article l'auteur donne une nouvelle et complète solution de ce problème et trouve l'explication pour deux propriétés „curieuses" des nombres (8) et (9), aperçues par *B. Berneis*.