PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 85 (1963)

SUR UNE INÉGALITÉ ALGÉBRIQUE

D. S. Mitrinović

(Reçu le 24 novembre 1962)

1. — Dans cette Note, nous prouverons tout d'abord l'inégalité suivante

$$\sqrt[n]{a^n-x^n} > \sqrt[n-1]{a^{n-1}-x^{n-1}} \qquad (n, \text{ nombre naturel } >1) \tag{1.1}$$

avec $a>0$ et $0<x<a$.

Si l'on pose $x=at$, l'inégalité (1.1) devient

$$\sqrt[n]{1-t^n} > \sqrt[n-1]{1-t^{n-1}} \qquad (0<t<1). \tag{1.2}$$

Supposons qu'il existe au moins un $t \in (0, 1)$ pour lequel on a

$$\sqrt[n]{1-t^n} \leqslant \sqrt[n-1]{1-t^{n-1}}, \tag{1.3}$$

ce qui impliquerait

$$(1-t^n)^{n-1}-(1-t^{n-1})^n \leqslant 0. \tag{1.4}$$

Nous allons démontrer, dans ce qui suit, qu'il n'existe aucun $t \in (0, 1)$ vérifiant la relation (1.4). A cet effet, envisageons le polynôme suivant

$$P(t)=(1-t^n)^{n-1}-(1-t^{n-1})^n, \tag{1.5}$$

ou bien

$$P(t)=P_1(t)-P_2(t),$$

avec

$$P_1(t)=(1-t^n)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}t^{kn},$$

$$P_2(t)=(1-t^{n-1})^n=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}t^{\nu(n-1)}.$$

Ces deux polynômes ont des termes semblables si et seulement si l'équation indéterminée

$$kn=\nu(n-1)$$

admet des solutions (k, ν), où $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ et $\nu \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Les solutions cherchées sont uniquement (0, 0) et $(n-1, n)$. C'est pourquoi, nous avons le développement suivant contenant $2n-2$ termes:

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} P(t)=t^{n-1}\Big\{\binom{n}{1} & \qquad -\binom{n-1}{1}t \\ -\binom{n}{2}t^{n-1} & \qquad +\binom{n-1}{2}t^{n+1} \\ +\binom{n}{3}t^{2n-2} & \qquad -\binom{n-1}{3}t^{2n+1} \\ -\binom{n}{4}t^{3n-3} & \qquad +\binom{n-1}{4}t^{3n+1} \\ +\cdots & \\ -(-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}t^{n^2-4n+3} & +(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}t^{n^2-3n+1} \\ +(-1)^{n-2}\binom{n}{n-1}t^{n^2-3n+2} & +2(-1)^{n-1}t^{n^2-2n+1}\Big\}. \end{aligned}$$

Le nombre des zéros positifs du polynôme $P(t)$, selon le théorème de *Descartes*, est inférieur ou égal à $n-1$, étant donné que ce polynôme présente $n-1$ variations de signes. D'autre part, la forme (1.5) du polynôme $P(t)$ montre que $t=1$ est un zéro de l'ordre $n-1$ du polynôme en question. On en conclut que le polynôme $P(t)$ possède un et un seul zéro positif $t=1$ dont l'ordre de multiplicité est $n-1$.

Étant donné que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} P(t) &= \operatorname{sgn}\{(-1)^{n-1}(t-1)^{n-1}\} \qquad (0<t<1) \\ &= \operatorname{sgn}(1-t)^{n-1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

il s'ensuit qu' il n'existe aucune valeur $t\in(0, 1)$ pour laquelle la relation (1.4) aurait lieu. Ceci démontre l'inégalité (1.2).

Comme exemple, considérons l'inégalité suivante

$$\sqrt[6]{1-t^6} > \sqrt[5]{1-t^5} \qquad (0<t<1).$$

Le polynôme correspondant $P(t)$ admet la forme que voici

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t^6)^5-(1-t^5)^6 \\ &= -t^5(2t^{25}-6t^{20}-5t^{19}+15t^{15}+10t^{13}-20t^{10}-10t^7+15t^5+5t-6) \\ &= -t^5(t-1)^5(2t^{20}+10t^{19}+30t^{18}+70t^{17}+140t^{16}+246t^{15}+385t^{14} \\ &\quad +545t^{13}+705t^{12}+835t^{11}+911t^{10}+915t^9+845t^8+715t^7+555t^6 \\ &\quad +391t^5+245t^4+135t^3+65t^2+25t+6). \end{aligned}$$

Sans faire usage du théorème de *Descartes*, on conclut, donc, à partir de la représentation précédente du polynome $P(t)$, que l'on admet

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} P(t) &= \operatorname{sgn}(1-t)^5 \qquad (0<t<1). \\ &= 1. \end{aligned}$$

Or, l'inégalité envisagée plus haut est vraie.

2. — Examinons pour quelles valeurs de $t \in (0, 1)$ a lieu l'inégalité suivante[1]

$$\sqrt[n]{1-t^{n-1}} > \sqrt[n-1]{1-t^{n}}, \tag{2.1}$$

où n désigne un nombre naturel supérieur à 1.

A cet effet, considérons le polynôme suivant

$$P(t) = (1-t^{n-1})^{n-1} - (1-t^{n})^{n}. \tag{2.2}$$

Afin que les polynômes

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k} \binom{n-1}{k} t^{k(n-1)}, \quad \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} t^{\nu n}$$

admettent des termes semblables, il faut et il suffit que l'équation indéterminée

$$k(n-1) = \nu n$$

possède des solutions (k, ν) avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ et $\nu \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

La solution cherchée est $(0, 0)$ et elle est unique.

Le polynôme $P(t)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} P(t) = t^{n-1}\Big\{ & -\binom{n-1}{1} && +\binom{n}{1} t \\ & +\binom{n-1}{2} t^{n-1} && -\binom{n}{2} t^{n+1} \\ & -\binom{n-1}{3} t^{2n-2} && +\binom{n}{3} t^{2n+1} \\ & + \cdots \\ & +(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} t^{n^2-3n+2} && -(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} t^{n^2-2n+1} \\ & && -(-1)^{n}\binom{n}{n} t^{n^2-n+1} \Big\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le polynôme $P(t)$ présente n variations de signes ce qui implique que le nombre de ses zéros positifs est, au plus, égal à n. Comme l'on voit à partir de la relation (2.2), le polynôme admet $t = 1$ comme zéro de l'ordre $n-1$.

Le polynôme figurant entre accolades au second membre de l'égalité (2.3), lequel sera désigné par $Q(t)$, admet les propriétés suivantes[2]:

$$Q(0) = -\binom{n-1}{1}, \quad \lim_{t \to +\infty} Q(t) = (-1)^{n-1} \cdot \infty.$$

Étant donné que l'on a, en outre,

$$\operatorname{sgn} Q(1-\varepsilon) = +1, \quad \operatorname{sgn} Q(1+\varepsilon) = (-1)^{n-1}$$

où $\varepsilon (> 0)$ est suffisamment petit, le polynôme $Q(t)$ ainsi que celui $P(t)$ possèdent une racine $t_0 \in (0, 1)$.

---

[1] La comparaison des fonctions $\sqrt[n]{1-t^{n-r}}$ et $\sqrt[n-r]{1-t^{n}}$ $(r = 2, 3, \ldots)$ dans l'intervalle (0,1) peut être effectuée probablement d'une manière analogue.

[2] L'analyse se simplifie si l'on considère $P(t)$ sous la forme suivante:

$$P(t) = (1-t)^{n-1} \{(1+t+t^2+\cdots+t^{n-2})^{n-1} - (1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})^{n}\}.$$

Puisqu'on admet

$$\operatorname{sgn} P(t) = \operatorname{sgn}(t - t_0) \qquad (0 < t < 1 \quad \text{et} \quad 0 < t_0 < 1),$$

on peut écrire le résultat suivant:

$$\sqrt[n]{1-t^{n-1}} < \sqrt[n-1]{1-t^n} \qquad (0 < t < t_0 < 1),$$

$$\sqrt[n]{1-t^{n-1}} > \sqrt[n-1]{1-t^n} \qquad (0 < t_0 < t < 1).$$

A titre d'exemple, prenons l'inégalité

$$\sqrt[3]{1-t^2} < \sqrt{1-t^3} \qquad (0 < t < t_0 < 1), \tag{2.4}$$

où t_0 sera précisé plus tard.

Supposons qu'il existe au moins un t, vérifiant la condition indiquée, pour lequel on a

$$\sqrt[3]{1-t^2} \geqslant \sqrt{1-t^3},$$

ce qui implique

$$P(t) = (1-t^2)^2 - (1-t^3)^3 \geqslant 0.$$

Nous avons donc la factorisation suivante

$$\begin{aligned} P(t) &= t^2 (t^7 - 3t^4 + t^2 + 3t - 2) \\ &= t^2 (t-1)^2 (t^5 + 2t^4 + 3t^3 + t^2 - t - 2). \end{aligned}$$

Le polynôme $t^5 + 2t^4 + 3t^3 + t^2 - t - 2$ a un zéro t_0 et un seul dans l'intervalle (0, 1) et ce polynôme n'a pas d'autres zéros positifs.

Par suite, on a

$$\operatorname{sgn} P(t) = \operatorname{sgn}(t - t_0),$$

ce qui signifie que $P(t) \geqslant 0$ n'a lieu pour aucune des valeurs de t vérifian

$$0 < t < t_0 < 1.$$

Nous avons ainsi démontré l'inégalité (2.4).

D'une manière analogue, on prouve l'inégalité suivante

$$\sqrt[3]{1-t^2} > \sqrt{1-t^3} \qquad (0 < t_0 < t < 1).$$

3. — Dans la présente Note nous mettons à part le cas général qui consisterait à examiner pour quelles valeurs de $t \in (0,1)$ aura lieu l'inégalité suivante

$$\sqrt[m]{1-t^p} < \sqrt[n]{1-t^q} \tag{3.1}$$

ou

$$\sqrt[m]{1-t^p} > \sqrt[n]{1-t^q}, \tag{3.2}$$

où m, n, p, q sont des nombres naturels convenablement choisis.

Toutefois, nous indiquons un simple exemple entrant dans cette catégorie d'inégalités.

Envisageons les inégalités que voici:

$$\sqrt[5]{1-t^2} < \sqrt[3]{1-t^4}, \tag{3.3}$$

$$\sqrt[5]{1-t^2} > \sqrt[3]{1-t^4} \tag{3.4}$$

et examinons pour quelles valeurs de $t > 0$ elles seront vraies.

Le polynôme associé aux inégalités (3.3) et (3.4) possède la forme suivante:

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t^2)^3-(1-t^4)^5 \\ &= t^2(t^{18}-5t^{14}+10t^{10}-10t^6-t^4+8t^2-3) \\ &= t^2(t-1)^3 Q(t), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Q(t) = {} & t^{15}+3t^{14}+6t^{13}+10t^{12}+10t^{11}+6t^{10}-2t^9-14t^8-20t^7 \\ & -20t^6-14t^5-2t^4+6t^3+10t^2+9t+3. \end{aligned}$$

Le polynôme $Q(t)$ a précisément deux zéros positifs t_1 et t_2 qui appartiennent respectivement aux intervalles (0,1) et (1,2).

Par suite, nous sommes conduits à l'égalité que voici:

$$\operatorname{sgn} P(t) = \operatorname{sgn}(t-1) \operatorname{sgn}(t-t_1) \operatorname{sgn}(t-t_2) \qquad (t>0).$$

Cette égalité permet d'écrire le résultat suivant:

$$\sqrt[5]{1-t^2} < \sqrt[3]{1-t^4} \qquad (0<t<t_1 \quad \text{ou} \quad 1<t<t_2),$$

$$\sqrt[5]{1-t^2} > \sqrt[3]{1-t^4} \qquad (t_1<t<1 \quad \text{ou} \quad t>t_2).$$

4. — Dans la litérature mathématique nous n'avons pas rencontré la classe (3.1) ou (3.2) d'inégalités algébriques laquelle comprend les inégalités (1.2) et (2.1), comme des cas particuliers.

D'une part, ces inégalités sont simples; d'autre part, elles se laissent étudier par une technique purement algébrique.

Par un choix convenable des paramètres m, n, p, q, sans les restreindre à être des nombres naturels (on écarte le cas simple si $m=n$ ou $p=q$), on pourrait également généraliser les inégalités considérées plus haut.

Remarque 1. L'inégalité (1.2) est d'ailleurs une conséquence immédiate de l'inégalité suivante:

$$t^n < t^{n-1} \qquad (0<t<1).$$

Remarque 2. *Voir* les articles № 100 et № 101 de ces *Publications.*