PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 84 (1963)

SUR LES NOMBRES QUI SONT SOMMES ET DIFFÉRENCES DE DEUX NOMBRES PREMIERS

Waclaw Sierpiński

(Reçu le 28 novembre 1962)

Théorème 1. *Il existe une infinité de nombres pairs qui sont en même temps sommes et différences de deux nombres premiers.*

Démonstration. Soit m un nombre naturel donné quelconque. D'après un théorème connu de *I. Vinogradoff*, tout nombre impair suffisamment grand est une somme de trois nombres premiers impairs. Il existe donc un nombre premier $s > 3m$ qui est une telle somme: $s = p + q + r$, où p, q et r sont des nombres premiers, et il est évident que un au moins de ces nombres, soit p, est $> m$. Le nombre $n = p + q = s - r$ est donc pair $> p > m$. Il existe donc des nombres pairs aussi grands que l'on veut qui sont en même temps sommes et différences de deux nombres premiers. Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Or, il est à remarquer qu'il résulte de l'hypothèse de *Goldbach* et d'une hypothèse de *A. Schinzel* sur les nombres premiers (dont il résulte que tout nombre pair est, d'une infinité de manières, différence de deux nombres premiers, *voir* Acta Arithmetica IV (1958), p. 190) que tout nombre pair > 2 est une somme et en même temps une différence de deux nombres premiers. On a, par exemple:

$$4 = 2 + 2 = 7 - 3, \quad 6 = 3 + 3 = 11 - 5, \quad 8 = 3 + 5 = 11 - 3, \quad 10 = 3 + 7 = 41 - 31.$$

Théorème 2. *Il existe une infinité de nombres impairs qui ne sont pas ni sommes ni différences de deux nombres premiers.*

Démonstration. Tels sont, par exemple, tous les nombres de la forme $30k + 7$, où $k = 1, 2, \ldots$ En effet, s'il était $30k + 7 = p + q$, où p et $q \leqslant p$ sont des nombres premiers, le nombre $30k + 7$ étant impair, un des nombres p et q devrait être pair, donc $q = 2$, d'où $p = 30k + 5 = 5(6k + 1)$, ce qui est impossible, vu que p est un nombre premier. Or, s'il était $30k + 7 = p - q$, où p et q sont des nombres premiers, on aurait $q = 2$, donc $p = 30k + 9 = 3(10k + 3)$, ce qui est impossible.

Le théorème 2 est ainsi démontré. Vu que, d'après le théorème de *Lejeune—Dirichlet* sur la progression arithmétique il existe une infinité de nombres premiers de la forme $30k + 7$, où $k = 1, 2, \ldots$, il résulte de notre démonstration qu' *il existe une infinité de nombres premiers qui ne sont pas ni sommes ni différences de deux nombres premiers.* Comme on le voit sans peine, cela équivaut à la proposition qu'il existe une infinité de nombres premiers qui n'appartiennent à aucune paire de nombres premiers jumeaux.

Théorème 3. *Il résulte de l'hypothèse* H *de A. Schinzel* (énoncée dans le vol. IV des Acta Arithmetica, p. 188) *qu'il existe une infinité de nombres impairs qui sont en même temps sommes et différences de deux nombres premiers.*

D é m o n s t r a t i o n. Il résulte de l' hypothèse H que le nombre 4 est, d'une infinité de manières, différence de deux nombre premiers. Il existe donc pour tout nombre naturel m des nombres premiers $p > m+2$ et q, tels que $4=p-q$. Le nombre impair $n=p-2=q+2$ est donc $> m$ et il est en même temps somme et différence de deux nombres premiers. Le théorème 3 est ainsi démontré.

On a, par exemple:

$$5=3+2=7-2, \quad 9=7+2=11-2, \quad 15=13+2=17-2,$$

$$21=19+2=23-2, \quad 39=37+2=41-2, \quad 45=43+2=47-2,$$

$$69=67+2=71-2, \quad 81=79+2=83-2, \quad 99=97+2=101-2.$$

Théorème 4. *Il n'existe qu'un seul nombre premier,* 5, *qui est en même temps somme et différence de deux nombres premiers.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que r soit un nombre premier qui est en même temps somme et différence de deux nombres premiers. On a évidemment $r > 2$, donc r est un nombre premier impair et on a $r=p+2=q-2$, où p et q sont des nombres premiers. Les nombres p, $r=p+2$ et $q=r+2$ sont donc trois nombres impairs consécutifs qui sont tous premiers, et on a évidemment $p=3$, $r=5$, $q=7$. On a donc $r=5=3+2=7-2$ et le théorème 4 est démontré.

Or, il est à remarquer qu'on peut démontrer sans peine que chacune de deux propositions suivantes: *Il existe une infinité de nombres premiers qui sont sommes de deux nombres premiers* et *il existe une infinité de nombres premiers qui sont différences de deux nombres premiers* est équivalente à la proposition qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.