PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 82 (1962)

# DOPUNE KAMKE-OVOM DELU. VII.

## BIBLIOGRAFSKA BELEŠKA

*Dragoslav S. Mitrinović — Dragomir Ž. Đoković*

Nije redak slučaj da matematičari, zbog neinformisanosti, dokazuju teoreme i stavove koji su već ranije dokazani i da ih publikuju u obliku novih rezultata. Ponekad je vrlo teško konstatovati da li je neki rezultat nov ili nije.

Ovde ćemo hronološkim redom navesti autore koji su se bilo u naučnim radovima bilo u udžbenicima bavili problemom integracije obične homogene linearne diferencijalne jednačine

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\frac{d^k P_n(x)}{dx^k}\,\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}=0, \tag{1}$$

gde je $m$ proizvoljna realna konstanta, $P_n(x)$ proizvoljan polinom stepena $n$ i $y$ nepoznata funkcija.

1° Najstariji od pronađenih radova koji se odnose na jednačinu (1) je rad

A. Arneberg: *Integration af an differentiallignung*, Tidsskrift for Mathematik, 1885, p. 168—175.

U ovom radu je pokazano da se nehomogena jednačina

$$\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{(n+p)(n+p+1)\cdots(n+p+r-1)}{r!}\,\varphi^{(r)}(x)\frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}}=\psi(x), \tag{2}$$

gde je $\varphi(x)$ polinom stepena $n$, može rešiti primenom uzastopnog diferenciranja ili integriranja. *Arneberg* je integralio tu jednačinu samo u slučaju kada je $p$ ceo broj.

Kako je

$$(-1)^r\frac{(n+p)(n+p+1)\cdots(n+p+r-1)}{r!}=\binom{-n-p}{r},$$

jednačina (2) može se napisati u obliku

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\varphi^{(r)}(x)\frac{d^{n-r}y}{dx^{n-r}}=\psi(x).$$

gde je $m=-n-p$. Odavde se vidi da je jednačina (1) odgovarajuća homogena jednačina za jednačinu (2).

2° H. Laurent u svom udžbeniku *Traité d'Analyse*, Paris 1890, tome V, pp. 239—241, primenom uopštenog diferenciranja dobija opšti integral jednačine (1) za proizvoljno $m$. Taj integral je oblika

$$y=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (x-x_\nu)^{n-p-1}, \tag{3}$$

gde su $a_\nu$ proizvoljne konstante i $x_\nu$ nule (za koje se pretpostavlja da su proste) polinoma $P_n(x)$. Njegov se metod može primeniti i u slučaju kada polinom $P_n(x)$ ima višestruke nule.

3° Oko tri decenije kasnije pojavljuje se rad

M. Angelesco: *Sur certaines équations différentielles complètement intégrable,* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 1921, t. 172, pp. 40—41.

*Angelesco* je dobio opšte rešenje jednačine

$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\binom{p-i}{q-i}\frac{d^{q-i}Q}{dx^{q-i}}\frac{d^i y}{dx^i}=0 \tag{4}$$

u obliku

$$y=\sum_{\nu=1}^{q} a_\nu (x-x_\nu)^p.$$

Ovde $Q$ označava polinom po $x$ stepena $q$ čije su nule $x_\nu$.

*Angelesco* je dobio ovaj rezultat za celobrojno $p$ i odmah zatim proširio na slučaj proizvoljnog $p$. On je takođe analizirao slučaj kada polinom $Q$ ima višestruke nule. Graničnim procesom, na osnovu prethodnih rezultata, dobio je opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Stavljajući $q=n$ i $Q=P_n(x)$, jednačina (4) dobija oblik

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n-p-1}{n-i}\frac{d^{n-i}P_n(x)}{dx^{n-i}}\frac{d^i y}{dx^i}=0,$$

tj.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}\frac{d^i P_n(x)}{dx^i}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}=0 \qquad (m=n-p-1).$$

Dakle, jednačina (4) je takođe ekvivalentna jednačini (1).

Interesantno je da identičnost ovih rezultata nije primećena i da se u knjizi: P. Sergescu: *Le développement des sciences mathématiques en Roumanie,* Bucarest 1937, p. 17, ovaj rad *Angelesco*-a navodi kao doprinos nauci od strane rumunskih matematičara.

4° U udžbeniku E. L. Ince: *Ordinary differential equations,* 1926, pp. 191—192, nalazi se formula

$$T_r\{(x-t)^{n+m-1}\}=(n+m-1)(n+m-2)\cdots(m+r)(x-t)^{m+r-1}G_r(t),$$

gde je $T_r$ operator definisan sa

$$T_r(y)=\sum_{s=0}^{n-r}(-1)^s\frac{(m+r)(m+r+1)\cdots(m+r+s-1)}{s!}G_r^{(s)}(x)\frac{d^{n-r-s}y}{dx^{n-r-s}}.$$

Ovde $G_r(x)$ označava proizvoljan polinom stepena $n-r$.

Stavljajući $r=0$, $G_0(x)=P_n(x)$, dobijamo

(5) $$T_0\{(x-t)^{n+m-1}\}=(n+m-1)(n+m-2)\cdots m(x-t)^{m-1}P_n(t),$$

(6) $$T_0(y)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!}\frac{d^sP_n(x)}{dx^s}\frac{d^{n-s}y}{dx^{n-s}}.$$

Ako je $t$ nula polinoma $P_n(x)$, iz (5) i (6) sleduje da je $(x-t)^{n+m-1}$ partikularno rešenje diferencijalne jednačine $T_0(y)=0$ koja je ekvivalentna jednačini (1).

U pomenutom udžbeniku je analizirana jednačina $T_0(y)-T_1(y)=0$, dok sama jednačina $T_0(y)=0$ nije rešavana jer je verovatno smatrana za vrlo jednostavnu.

5° Jednačina (1) je još jedanput integrirana u radu

B. S. Popov: *O jednoj diferencijalnoj jednačini,* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 68, pp. 11—12.

U vezi sa citiranim radom *Popova* u knjizi: D. S. Mitrinović: *Zbornik matematičkih problema I,* treće izdanje, Beograd 1962, str. 415—416, publikovan je još jedan nov način integracije jednačine (1), koji je dao *D. Đoković.* Rešenje je dato u slučaju celobrojnog $m\,(\geqslant n)$, ali se ono može uopštiti na proizvoljno $m$ metodom koju je primenio *Angelesco.*

Da je rezultat *Popova* i *Angelesco*-a identičan dokazano je u članku

L. Toscano: *Sur une équation différentielle linéaire* (ove *Publikacije,* № 79).

Résumé

## COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE KAMKE. NOTE VII.

### NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

*D. S. Mitrinović — D. Ž. Đoković*

On donne l'historique de l'équation différentielle (1), laquelle était integrée à plusieurs reprises par divers auteurs.

On ne trouve pas cette équation dans le Traité de Kamke:

E. Kamke: *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen,* Bd. I, 1942, Leipzig.