PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 75 (1962)

SUR CERTAINES SÉRIES QUI JOUENT UN RÔLE DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

Stanimir Fempl

(Reçu le 26 avril 1962)

1. Dans la théorie des fonctions doublement périodiques, les séries appelées q-séries jouent un rôle important. Ce sont les séries dont les termes sont $c_n = \pm q^m/(1 \pm q^n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, où n est un nombre naturel, et m peut être égal au nombre n ou à la moitié de ce nombre. Dans ces q-séries, les grandeurs c_n et aussi les puissances de q peuvent apparaître ou individuellement ou figurer comme les coefficients auprès des fonctions $\sin m\pi x/K$ et $\cos m\pi x/K$ et, cela signifie qu'elles peuvent apparaître comme les coefficients de *Fourier*. La grandeur K est l'intégrale complète elliptique normale de *Legendre* de première espèce

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

($k \in [0, 1]$ est le module de l'intégrale elliptique). La grandeur q est définie par

$$q \overset{\text{def}}{=} \exp(-\pi K'/K),$$

où K' signifie l'intégrale de même forme que K, seulement le module k' de l'intégrale K' est complémentaire au module k, c'est-à-dire k et k' sont liés par la relation $k^2 + k'^2 = 1$.

Les q-séries peuvent servir pour l'évaluation de l'intégrale K sous la condition que la grandeur q soit donné en avant. Par exemple, la série de *Fourier* bien connue pour la fonction périodique

$$\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - \frac{\pi}{2K} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2K} = \frac{2\pi}{K} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{1+(-1)^\nu q^\nu} \sin \frac{\nu \pi x}{K}$$

(sn, cn, dn sont les fonctiones elliptiques) donne, en s'appuyant sur les formules bien connues

$$\operatorname{sn} \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \qquad \operatorname{cn} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \qquad \operatorname{dn} \frac{K}{2} = \sqrt{k'}$$

pour $x=\frac{K}{2}$, l'équation

$$1-\frac{\pi}{2K}=\frac{2\pi}{K}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{1+(-1)^\nu q^\nu}\sin\frac{\nu\pi}{2},$$

d'où provient que

$$\frac{2K}{\pi}=1-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}. \tag{1}$$

Cette série convergente ($q<1$ excepté pour $k=1$) donne la valeur de l'intégrale K, pour un q donné. Remarquons qu'on ne peut pas trouver le module k de cet intégrale, au moyen de cette formule.

Dans ce travail je déduirai les formules pour la somme des séries dont les termes sont de la forme $q^m/(1\pm q^m)^2$ $(m=1, 2, \ldots)$ et je montrerai comment ces séries peuvent être utilisés soit pour l'évaluation du module k, soit pour l'évaluation de l'intégrale elliptique complète de *Legendre* de II espèce

$$E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{2}$$

pour un q donné par avance.

2. *Schlömilch* a été le premier qui a prouvé rigoureusement que les fonctions elliptiques $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$ et aussi certaines combinaisons de ces fonctions peuvent être développées en série de *Fourier*. En utilisant la théorie des fonctions de variable complexe, il a donné leur développement. Par exemple, il a donné le développement de la fonction

$$\operatorname{sn} x=\frac{2\pi}{kK}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1-q^{2\nu-1}}\sin\frac{(2\nu-1)\pi x}{2K}.$$

La fonction $\operatorname{sn} x$ est une fonction périodique impaire et les coefficients de série de *Fourier* sont $a_\nu=0$, $b_{2\nu}=0$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ et

$$b_{2\nu-1}=\frac{2\pi}{kK}\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1-q^{2\nu-1}} \qquad (\nu=1, 2, \ldots).$$

En se basant sur la relation

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f^2(x)\,dx,$$

pour la fonction impaire $\operatorname{sn} x$ il provient que

$$\frac{2}{2K}\int_0^{2K}\operatorname{sn}^2 x\,dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4\pi^2}{k^2K^2}\frac{q^{2\nu-1}}{(1-q^{2\nu-1})^2},$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{4\pi^2}{k^2K}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{2\nu-1}}{(1-q^{2\nu-1})^2}=\int_0^{2K}\mathrm{sn}^2\,x\,\mathrm{d}x.$$

Schlömilch a également donné le développement de la fonction $\mathrm{sn}^2\,x$ dans la série de *Fourier:*

$$\mathrm{sn}^2\,x=\frac{K-E}{k^2K}-\frac{2\pi^2}{k^2K^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu q^\nu}{1-q^{2\nu}}\cos\frac{\nu\pi x}{K}.$$

Mais comme cette série peut être intégrée terme à terme, on obtient

$$\zeta=\int_0^{2K}\mathrm{sn}^2\,x\,\mathrm{d}x=\frac{K-E}{k^2K}\cdot 2K=\frac{2(K-E)}{k^2}. \tag{3}$$

Il provient de là que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1-q^{2\nu-1}}\right)^2=\frac{K(K-E)}{2\pi^2}. \tag{4}$$

On a le développement suivant pour la fonction périodique paire

$$\mathrm{cn}\,x=\frac{2\pi}{kK}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1+q^{2\nu-1}}\cos\frac{(2\nu-1)\pi x}{2K}.$$

Ici sont $a_0=0$, $b_\nu=0$, $a_{2\nu}=0$ $(\nu=1,2,\ldots)$ et

$$a_{2\nu-1}=\frac{2\pi}{kK}\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1+q^{2\nu-1}}\qquad(\nu=1,2,\ldots).$$

En s'appuyant sur la relation de *Parseval,* on obtient

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{2\nu-1}^2=\frac{2}{2K}\int_0^{2K}\mathrm{cn}^2\,x\,\mathrm{d}x=\frac{4\pi^2}{k^2K^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{2\nu-1}}{(1+q^{2\nu-1})^2},$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{2K}\mathrm{cn}^2\,x\,\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{k^2K}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{2\nu-1}}{(1+q^{2\nu-1})^2}.$$

Mais en utilisant la relation bien connue entre les fonctions elliptiques $\mathrm{sn}^2\,x+\mathrm{cn}^2\,x=1$, l'intégrale $\int_0^{2K}\mathrm{cn}^2\,x\,\mathrm{d}x$ se réduit à $2K-\zeta$, et si l'on porte la valeur pour ζ obtenue dans (3), il suit après quelques évaluations

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1+q^{2\nu-1}}\right)^2=\frac{K(E-k'^2K)}{2\pi^2}. \tag{5}$$

Le développement de *Schlömilch* pour la fonction périodique paire $\mathrm{dn}\,x$ de période $2K$ est

$$\mathrm{dn}\,x=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^\nu}{1+q^{2\nu}}\cos\frac{\nu\pi x}{K}.$$

Nous avons ici $a_0 = \pi/K$, $b_\nu = 0$ et

$$a_\nu = \frac{2\pi}{K}\,\frac{q^\nu}{1+q^{2\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

ce qu'on peut écrire, en utilisant la relation de *Parseval*,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 = \frac{\pi^2}{2K^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^\nu}{1+q^{2\nu}}\right)^2 = \frac{2}{K}\int_0^K \mathrm{dn}^2\, x\, dx,$$

d'où l'on obtient

$$\frac{\pi^2}{4K} + \frac{2\pi^2}{K}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{q^\nu}{1+q^{2\nu}}\right)^2 = \int_0^K \mathrm{dn}^2\, x\, dx.$$

Si l'on utilise la relation $\mathrm{dn}^2\, x + k^2\, \mathrm{sn}^2\, x = 1$, l'intégrale $\int_0^K \mathrm{dn}\, x\, dx$ se réduit à $K - k^2\zeta$, et alors pour la valeur pour ζ de l'équation (3) on admet

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{q^\nu}{1+q^{2\nu}}\right)^2 = \frac{K(2E-K)}{2\pi^2} - \frac{1}{8}. \tag{6}$$

3. La formule (1), comme a été déjà mentionné, donne K, si q a été donné par avance. Mais on ne peut pas de cette formule obtenir aussi le module k de l'intégrale K. Or, les équations (4) et (5) donnent la possibilité de déterminer le module k, c'est-à-dire qu'en sommant (4) et (5), on obtient

$$K^2 k^2 = 2\pi^2\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{2\nu-1}}{(1-q^{2\nu-1})^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{2\nu-1}}{(1+q^{2\nu-1})^2}\right], \tag{7}$$

et il résulte de là la valeur pour k, si l'on prend pour K^2 sa valeur donné par la formule (1).

On peut obtenir l'intégrale de deuxième espèce E de (6) si l'on y porte la valeur pour K obtenue de (1). Le module de cete intégrale est le même que dans (7).

4. Il est aussi intéressant de remarquer le fait suivant. Le membre premier de l'équation (7) divisé par $4\pi^2$ représente le carré de la valeur de la série pour $\mathrm{cn}\, x$, en y posant $x = 0$. Or,

$$\mathrm{cn}\, 0 = 1 = \frac{2\pi}{kK}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1+q^{2\nu-1}},$$

d'où provient que

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1+q^{2\nu-1}}\right)^2 = \frac{k^2 K^2}{4\pi^2}.$$

Il suit de là la relation suivante

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1-q^{2\nu-1}}\right)^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1+q^{2\nu-1}}\right)^2 = 2\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{q^{2\nu-1}}}{1+q^{2\nu-1}}\right)^2.$$