PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 74 (1962)

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

Ilija A. Šapkarev

(Reçu le 2 avril 1962)

Dans cette Note est donnée la réponse à la question suivante*:

Examiner si l'équation différentielle

$$(Ax^2+Bx+C)\,y''+(Dx+E)\,y'+y=0 \tag{1}$$

admet des solutions particulières de la forme suivante

$$\begin{aligned} x&=a_0+a_1\,t+a_2\,t^2+a_3\,t^3,\\ y&=b_0+b_1\,t+b_2\,t^2+b_3\,t^3, \end{aligned} \tag{2}$$

où

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3 \tag{3}$$

sont des constantes convenablement choisies.

Remplaçons x et y, donnés par (2), et les dérivées

$$y_x'=\frac{b_1+2\,b_2\,t+3\,b_3\,t^2}{a_1+2\,a_2\,t+3\,a_3\,t^2},\quad y_x''=\frac{2\,\alpha_{12}+6\,\alpha_{13}\,t+6\,\alpha_{23}\,t^2}{(a_1+2\,a_2\,t+3\,a_3\,t^2)^3}\quad \left(\alpha_{ik}=\begin{vmatrix} a_i & a_k\\ b_i & b_k\end{vmatrix},\quad i,k=1,\,2,\,3\right)$$

dans l'équation (1). Nous obtenons ainsi une équation algébrique du neuvième degré en t, laquelle sera nommée: équation (E).

Pour que (2) soit une solution de l'équation (1), il faut et il suffit que le pôlynome de l'équation (E) s'annulle identiquement. On obtient de cette manière les dix équations entre les coefficients (3).

On peut déterminer A, B, C, D, E en fonction des a_k, b_k ($k=0,\,1,\,2,\,3$) et alors parmi les a_k, b_k subsistent certaines conditions.

L'équation (1) a des solutions particulières de la forme (2) dans les cas suivants:

1\. 1. $a_3\,b_3\neq 0,\quad \alpha_{23}\neq 0,\quad 2\,a_2\,\alpha_{23}-3\,a_3\,\alpha_{13}=0,\quad a_2^2-3\,a_1\,a_3=0;$

1\. 2. $a_3\,b_3\neq 0,\quad \alpha_{23}=0,\quad \alpha_{13}\neq 0,\quad a_2^2-3\,a_1\,a_3=0;$

1\. 3. $a_3\,b_3\neq 0,\quad \alpha_{13}=\alpha_{23}=0;$

2\. 1. $a_3=0,\quad b_3\neq 0,\quad a_2\neq 0,\quad 2\,a_2\,b_2-3\,a_1\,b_3\neq 0$ suivi de $4\,a_2\,\alpha_{12}-3\,a_1^2\,b_3=0$ ou $9\,a_2\,b_0\,b_3+b_2\,\alpha_{12}-3\,a_1\,b_1\,b_3=0;$

* Cette question nous a été proposée par Prof. *D. S. Mitrinović*.

2. 2. $a_3=0, \quad b_3 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad 2 a_2 b_2-3 a_1 b_3=0,$
$a_1^2 b_2-3 a_1 a_2 b_1+6 a_2^2 b_0=0;$

2. 3. $a_3=0, \quad b_3 \neq 0, \quad a_2=0, \quad b_2^2-3 b_1 b_3 \neq 0;$

2. 4. $a_3=0, \quad b_3 \neq 0, \quad a_2=0, \quad b_2^2-3 b_1 b_3=0, \quad 9 b_0 b_3-b_1 b_2=0;$

3. 1. $a_3 \neq 0, \quad b_3=0, \quad b_2 \neq 0, \quad 2 a_2 b_2-3 a_3 b_1 \neq 0,$
$3 a_3^2 b_0-a_2 a_3 b_1-(2 a_1 a_3-a_2^2) b_2=0$ suivi de $a_2^2-3 a_1 a_3=0$
ou $4 b_2 \alpha_{12}-3 a_3 b_1^2=0;$

3. 2. $a_3 \neq 0, \quad b_3=0, \quad b_2 \neq 0, \quad 2 a_2 b_2-3 a_3 b_1=0, \quad 4 a_1 b_2-a_2 b_1-6 a_3 b_0=0;$

3. 3. $a_3 \neq 0, \quad b_3=0, \quad b_2=0, \quad a_2^2-3 a_1 a_3 \neq 0, \quad 3 a_3 b_0-a_2 b_1=0;$

3. 4. $a_3 \neq 0, \quad b_3=0, \quad b_2=0, \quad a_2^2-3 a_1 a_3=0, \quad 3 a_3 b_0-a_2 b_1=0;$

4. 1. $a_3=b_3=0, \quad a_2 b_2 \neq 0, \quad \alpha_{12} \neq 0;$

4. 2. $a_3=b_3=0, \quad a_2 b_2 \neq 0, \quad \alpha_{12}=0;$

4. 3. $a_3=b_3=a_2=0, \quad b_2 \neq 0;$

4. 4. $a_3=b_3=b_2=0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_1 b_1-2 a_2 b_0=0;$

4. 5. $a_3=b_3=a_2=b_2=0.$

Aux cas indiqués dans ce qui précède correspondent respectivement les exemples suivants*:

1. 1. $(9 x^2-62 x+48) y''-2(3 x+5) y'+6 y=0,$
$x=1+t+3 t^2+3 t^3,$
$y=1+t+2 t^2+t^3;$

1. 2. $(3 x^2-6 x+3) y''-(3 x-2) y'+3 y=0,$
$x=2+3 t+3 t^2+t^3,$
$y=1-t-3 t^2-t^3;$

2. 1. $(16 x^2-6 x-45) y''-6(4 x-3) y'+24 y=0,$
$x=2-t+2 t^2,$
$y=3-t-t^2+8 t^3;$

2. 2. $(12 x^2-13 x+3) y''-2(x-2) y'-6 y=0,$
$x=1+t+t^2,$
$y=1+3 t+3 t^2+2 t^3;$

2. 3. $(3 x^2-16 x+10) y''+28 y'-18 y=0,$
$x=1+t,$
$y=4+3 t+2 t^2+t^3;$

2. 4. $(7 x^2-4 x-11) y''-12(x-2) y'-6 y=0,$
$x=1+2 t,$
$y=1+3 t+3 t^2+t^3;$

* Toute équation est accompagnée par son intégrale particulière donnée sous la forme paramétrique.

3. 1. $(27x^2-76x+44)y''+16y'+6y=0,$
$x=1+t+t^2-t^3,$
$y=-11+6t+9t^2;$

3. 2. $(27x^2-140x+200)y''+(27x-70)y'-12y=0,$
$x=4+3t+2t^2+t^3,$
$y=14+12t+9t^2;$

3. 3. $(27x^2-40x+16)y''+(27x-20)y'-3y=0,$
$x=1+t+t^2+t^3,$
$y=1+3t;$

3. 4. $(81x^2-64)y''+108xy'-18y=0,$
$x=1+t+3t^2+3t^3,$
$y=1+3t;$

4. 1. $[8\alpha x^2+(2-16\alpha-4\alpha^2)x+4\alpha^2+7\alpha-2]y''-(4\alpha x+2\alpha^2-4\alpha+2)y'+4\alpha y=0,$
$x=1+t+\alpha t^2$
$y=1+\alpha t+t^2;$ (α, constante arbitraire)

4. 3. $(3x^2+2x+4)y''-2(x+2)y'-2y=0,$
$x=1+2t,$
$y=3+t+2t^2;$

4. 4. $3(16x^2-81)y''+8(2x+9)y'+4y=0,$
$x=2+t-t^2,$
$y=1-2t.$

Dans le Recueil* bien connu d'équations différentielles de *Kamke* on ne trouve pas les équations envisagées plus haut.

La démonstration des faits indiqués dans cette Note sera donnée dans le journal: *Bulletin de la Société des mathematiciens et des physiciens de la République populaire de Macedoine.*

---

* E. Kamke: *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, 6. Auflage, Leipzig 1959;

Э. Камке: *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, превод с немецкого С. В. Фомина, редактор Н. Х. Розов, издание второе, переработанное и дополненное, Москва 1961.