PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 73 (1962)

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE

Petar M. Vasić

(Reçu le 10 février 1962)

1. *Euler* **[1]** a considéré l'équation différentielle

$$x^2(ax^n+b)\,y''+x\,(cx^n+d)\,y'+(ex^n+f)\,y=0 \tag{1. 1}$$

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \text{ constantes})$$

et il a trouvé les conditions sous lesquelles cette équation a une solution particulière de la forme

$$y_1=x^\lambda P(x)$$

ou

$$y_1=x^\lambda\{P(x)\sin\alpha x+Q(x)\cos\alpha x\},$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes et λ et α des constantes.

Dans l'article **[2]** *D. Perčinkova* a démontré que l'équation

$$x^2(1+x^3)\,y''-\frac{3}{2}\,xy'+y=0 \tag{1. 2}$$

a comme solution particulière la fonction $y=y(x)$ définie par

$$y^3+3\,xy+2\,x^3=0.$$

Dans l'article **[3]** *D. Perčinkova* a montré que l'équation plus générale

$$x^2(A+Bx^3)\,y''+Cxy'+y=0 \tag{1. 3}$$

admet comme solution particulière la fonction $y=y(x)$ définie par

$$y^3+3\,axy+bx^3=0$$

si $A=1,\ C=-\frac{3}{2},\ b^2-4\,a^3B=0.$

Dans le livre **[4]** on montre que l'équation

$$(ax^3+b)\,y''+cx^2\,y'+xy=0 \tag{1. 4}$$

a pour solution particulière la fonction déterminée à l'aide de la relation

$$y^3+pxy+q=0 \qquad (p\neq 0)$$

dans le cas où l'on admet $a=-2,\ b=-\frac{27\,q^2}{2\,p^3},\ c=-3.$

2. Dans cet article nous allons démontrer que l'équation (1. 1) a comme solution particulière la fonction $y=y(x)$ donnée par

$$y^3+pyx^{\frac{n}{3}+2k}+qx^{3k}=0 \tag{2. 1}$$

$$\{n(\neq 0),\ k,\ p(\neq 0),\ q \text{ constantes}\},$$

si les coefficients $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ p,\ q$ satisfont à certaines conditions.

Au lieu de (2. 1) on peut écrire

$$x=\left(-\frac{q+t^3}{pt}\right)^{\frac{3}{n}}, \qquad y=t\left(-\frac{q+t^3}{pt}\right)^{\frac{3k}{n}}. \tag{2. 2}$$

Si dans l'équation (1. 1) on fait le changement de la variable indépendante donnée par (2. 2), on obtient

$$\ddot{y}+F(t)\dot{y}+G(t)y=0, \tag{2. 3}$$

où l'on a

$$F(t)=$$

$$\frac{\left(\frac{3}{n}\right)(-2t^3+q)^2\{c(-q-t^3)^3+dp^3t^3\}-\left\{\left(\frac{3-n}{n}\right)(-2t^3+q)^2+2(t^3+q)^2\right\}\{a(-q-t^3)^3+bp^3t^3\}}{(q+t^3)\{a(-q-t^3)^3+bp^3t^3\}(2t^3-q)t}$$

$$G(t)=\frac{\left(\frac{3}{n}\right)^2(-2t^3+q)^2\{e(-q-t^3)^3+fp^3t^3\}}{(q+t^3)^2\{a(-q-t^3)^3+bp^3t^3\}t^2}.$$

Si l'on effectue des calculs nécessaires, on trouve que la fonction

$$y_1=t\left(-\frac{q+t^3}{pt}\right)^{\frac{3k}{n}}$$

est une solution particulière de l'équation (2. 3) si l'on a:

$$\begin{gathered} a=r, \quad b=\frac{27q^2}{4p^3}r, \quad c=\frac{6-12k+n}{6}r, \quad d=\frac{9q^2}{4p^3}(3-6k-n)r, \\ e=\frac{18k^2-3kn-n^2}{18}r, \quad f=\frac{9q^2}{4p^3}k(n+3k)r \end{gathered} \tag{2. 4}$$

(r constante quelconque).

Une autre solution particulière, linéairement indépendante de y_1, est

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int F(t)\,dt}\,dt.$$

Par suite, la solution générale de (2. 3), si les conditions (2. 4) sont satisfaites, est

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int F(t)\, dt} dt. \tag{2. 5}$$

La solution générale de l'équation (1. 1) est donnée par (2. 5) et par première des équations (2. 2).

3. Pour $n = -3$, $k = 1$, avec $d = f = 0$, l'équation (1. 1) se ramène à (1. 2).

Pour $n = 3$, $k = 0$, avec $d = f = 0$, l'équation (1. 1) se ramène à (1. 3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Л. Эйлер:
Интегральное исчисление, том II, Москва 1957, p. 368.

[2] Д. Перчинкова-В'чкова:
За една специјална диференцијална равенка од II ред (Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од НР Македонија, t. VI, Скопје 1955, p. 22—29.)

[3] Д. Перчинкова-В'чкова:
За една диференцијална равенка од II ред (Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од НР Македонија, t. IX, Скопје 1958, p. 11—13.)

[4] D. S. Mitrinović:
Zbornik matematičkih problema, t. I, troisième édition, Beograd 1962, p. 414—415.