PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 71 (1962)

UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ

Dragoslav S. Mitrinović et *Slaviša B. Prešić*

(Reçu le 15 février 1962)

1. L'équation fonctionnelle

$$f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) = 0 \tag{1. 1}$$

a pour solution générale la fonction suivante

$$f(u, v) = G(u) H(v) - G(v) H(u), \tag{1. 2}$$

où $G(u)$ et $H(u)$ sont des fonctions quelconques de u.

Ce fait est démontré dans notre article: *Sur une équation fonctionnelle cyclique d'ordre supérieur* (voir[1] ces *Publications*, № 70).

2. Envisageons maintenant l'équation fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2+x_3) f(x_4+x_5, x_6+x_7) \\ & + f(x_1, x_3+x_4) f(x_5+x_6, x_7+x_2) \\ & + f(x_1, x_4+x_5) f(x_6+x_7, x_2+x_3) \\ & + f(x_1, x_5+x_6) f(x_7+x_2, x_3+x_4) \\ & + f(x_1, x_6+x_7) f(x_2+x_3, x_4+x_5) \\ & + f(x_1, x_7+x_2) f(x_3+x_4, x_5+x_6) = 0, \end{aligned} \tag{2. 1}$$

qui est cyclique en variables $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, tandis que l'équation (1. 1) est cyclique en x_2, x_3, x_4.

Si l'on fait $x_3 = x_5 = x_7 = 0$, l'équation (2. 1) prend la forme suivante:

$$f(x_1, x_2) f(x_4, x_6) + f(x_1, x_4) f(x_6, x_2) + f(x_1, x_6) f(x_2, x_4) = 0. \tag{2. 2}$$

C'est précisément l'équation (1. 1). Puisque, en outre, la fonction (1. 2) satisfait à l'équation (2. 2), on conclut que (1. 2) est vraiment la solution générale de l'équation (2. 1).

---

[1] *Voir* aussi:

D. S. Mitrinović — S. B. Prešić: *Sur une équation fonctionnelle non linéaire* (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 254, 1962, p. 611—613).

3. Une généralisation immédiate de l'équation (2. 1) est l'équation cyclique suivante

$$
\begin{aligned}
(3.\ 1)\qquad & f\big(x_1,\ g(x_2,\ x_3)\big)\, f\big(g(x_4,\ x_5),\ g(x_6,\ x_7)\big)\\
&+f\big(x_1,\ g(x_3,\ x_4)\big)\, f\big(g(x_5,\ x_6),\ g(x_7,\ x_2)\big)\\
&+f\big(x_1,\ g(x_4,\ x_5)\big)\, f\big(g(x_6,\ x_7),\ g(x_2,\ x_3)\big)\\
&+f\big(x_1,\ g(x_5,\ x_6)\big)\, f\big(g(x_7,\ x_2),\ g(x_3,\ x_4)\big)\\
&+f\big(x_1,\ g(x_6,\ x_7)\big)\, f\big(g(x_2,\ x_3),\ g(x_4,\ x_5)\big)\\
&+f\big(x_1,\ g(x_7,\ x_2)\big)\, f\big(g(x_3,\ x_4),\ g(x_5,\ x_6)\big)=0,
\end{aligned}
$$

où $g(u,\ v)$ représente une fonction donnée quelconque.

La fonction (1. 2) est également une solution de l'équation (3. 1), mais dans le cas général la question relative au caractère de généralité de cette solution reste ouverte. En d'autres termes, si la fonction $g(u,\ v)$ est arbitraire, la fonction (1. 2) n'est pas la solution générale de l'équation (3. 1). Ainsi, par exemple, si

$$g(u,\ v)=u-v,$$

l'équation (3. 1) admet, comme solution particulière, la fonction suivante

$$f(u,\ v)=u, \tag{3. 2}$$

laquelle n'est pas contenue dans (1. 2), car pour toute solution (1. 2) on a $f(u,\ u)=0$, tandis qu'il n'en est pas ainsi pour la solution (3. 2) de l'équation cyclique (3. 1). Ce fait montre que la généralisation (3. 1) de l'équation (2. 1) n'est point triviale.

Cependant, si l'opération $\circ$, définie par l'égalité

$$x\circ y=g(x,\ y)$$

possède l'élément neutre e, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$x\circ e=e\circ x=x=g(x,\ e)=g(e,\ x),$$

alors (1. 2) devient la solution générale de l'équation (3. 1).

Pour le démontrer, il suffit de poser, dans (3. 1),

$$x_3=x_5=x_7=e,$$

ce qui mène précisément à l'équation (2. 2). La démonstration s'achève aisément comme pour équation (2. 1).

Ceci aura lieu si l'on donne à $g(u,\ v)$, par exemple, l'une des formes suivantes:

$1^\circ\quad g(u,\ v)=uv,\qquad 2^\circ\quad g(u,\ v)=u+v+uv,$

$3^\circ\quad g(u,\ v)=\sqrt[3]{u^3+v^3},\qquad 4^\circ\quad g(u,\ v)=\dfrac{u+v}{1+uv^2}.$

4. On pourrait faire aussi une autre extension de l'équation cyclique (1. 1), comme suit.

Soit $g(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ une fonction donnée de k variables mises en évidence.

L'équation

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{3k}, x_{3k+1}) + F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{3k+1}, x_2) + \cdots + F(x_1, x_{3k+1}, x_2, \ldots, x_{3k}) = 0, \tag{4. 1}$$

avec

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{3k}, u_{3k+1}) &= f\big(u_1, g(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})\big) \\ &\times f\big(g(u_{k+2}, u_{k+3}, \ldots, u_{2k+1}), g(u_{2k+2}, u_{2k+3}, \ldots, u_{3k+1})\big), \end{aligned} \tag{4. 2}$$

est cyclique par rapport aux variables

$$x_2, x_3, \ldots, x_{3k+1}.$$

L'équation (4. 1) suivie de la formule (4. 2) sera nommée, dans ce qui suit, *équation* (f).

L'équation (f) est une nouvelle généralisation de l'équation (1. 1), et elle a également (1. 2) pour solution, mais le caractère de généralité de cette solution demeure en suspens dans le cas où $g(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est quelconque.

Cependant, si la fonction $g(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ vérifie les conditions suivantes

$$g(u, e, e, \ldots, e) = g(e, u, e, \ldots, e) = g(e, e, u, e, \ldots, e) = \cdots = g(e, e, e, \ldots, u) = u, \tag{4. 3}$$

e étant une constante, la fonction

$$f(u, v) = G(u)\,H(v) - G(v)\,H(u), \tag{4. 4}$$

avec $G(u)$ et $H(u)$ fonctions arbitraires, est la solution générale de l'équation (f).

Démonstration. — Si l'on remplace toutes les variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_{3k+1},$$

sauf

$$x_1, x_2, x_{k+1}, x_{2k+2},$$

par e, l'équation (f), dans le cas où les conditions (4. 3) sont remplies, prend la forme suivante

$$f(x_1, x_2)\,f(x_{k+1}, x_{2k+2}) + f(x_1, x_{k+1})\,f(x_{2k+2}, x_2) + f(x_1, x_{2k+2})\,f(x_2, x_{k+1}) = 0, \tag{4. 5}$$

ce qui est, de fait, l'équation (1. 1). Étant donné que, en outre, la fonction (4. 4) vérifie l'équation (f), il en résulte que (4. 4) est vraiment la solution générale de l'équation (f).

Remarquons que l'équation (f) a également comme solution générale la fonction (4. 4) dans le cas où

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_k) = u_1.$$

5. Tous les raisonnements indiqués dans ce qui précède restent en vigueur si les variables indépendantes

$$x_1, x_2, \ldots, x_{3k+1},$$

l'élément neutre e et la fonction

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_k)$$

sont des éléments d'un même ensemble quelconque et si les valeurs de $f(u, v)$ appartiennent à un corps convenablement choisi.