PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 70 (1962)

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE CYCLIQUE D'ORDRE SUPÉRIEUR

Dragoslav S. Mitrinović et *Slaviša B. Prešić*

(Reçu le 15 janvier 1962)

Soit $f(u, v)$ une fonction réelle des variables réelles u et v. Au moyen de la fonction $f(u, v)$ formons la fonction suivante

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = \prod_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}, x_{2k}) \qquad (n > 1). \tag{1}$$

L'équation

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) + F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots + F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}) = 0, \tag{2}$$

où $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})$ désigne la fonction définie par (1), est une équation fonctionnelle cyclique en variables $x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$, à une fonction inconnue $f(u, v)$ de deux variables indépendantes.

Théorème 1. — *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (2), *où* $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})$ *est donnée par* (1), *est*

$$f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u) \qquad \text{pour } n = 2, \tag{3}$$

$$f(u, v) = 0 \qquad \text{pour } n > 2, \tag{4}$$

où $g(u)$ *et* $h(u)$ *sont des fonctions réelles quelconques.*

Démonstration. — Si l'on fait

$$x_k = u \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n),$$

l'équation (2) conduit à $f(u, u) \equiv 0$.

Il faut distinguer les deux cas suivants:

$$1^\circ \; n = 2, \qquad 2^\circ \; n > 2.$$

Dans le cas où $n = 2$, l'équation (2) devient

$$f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) = 0. \tag{5}$$

La fonction $f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u)$ est justement la solution de l'équation (5).

Pour toute solution non triviale de l'équation (5) il existe au moins un couple de nombres réels a et b tels que $f(a, b) \neq 0$.

Si l'on pose $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = u$, $x_4 = v$, l'équation (5) prend la forme suivante

$$f(u, v) = -\frac{f(a, u)}{f(a, b)} f(v, b) - \frac{f(a, v)}{f(a, b)} f(b, u). \tag{6}$$

En posant $u = b$ et en mettant à profit la propriété $f(u, u) \equiv 0$, l'équation (6) devient $f(b, v) = -f(v, b)$.

Vu la dernière égalité, l'équation (6) prend la forme que voici

$$f(u, v) = \frac{f(a, u)}{f(a, b)} f(b, v) - \frac{f(a, v)}{f(a, b)} f(b, u).$$

Si l'on y pose

$$\frac{f(a, u)}{f(a, b)} = g(u), \qquad f(b, u) = h(u),$$

on obtient

$$f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u).$$

C'est la *solution générale* de l'équation (2) pour $n = 2$.

Prenons maintenant en considération le cas où $n > 2$. Si l'on pose

$$x_k = u \qquad (k \text{ impair}), \qquad x_k = v \qquad (k \text{ pair})$$

et met à profit la propriété $f(u, u) \equiv 0$, l'équation (2) devient

$$f^n(u, v) + f^{n-1}(u, v) f(v, u) + f^{n-2}(u, v) f^2(v, u) + \cdots + f(u, v) f^{n-1}(v, u) = 0. \tag{7}$$

Au moyen de la substitution

$$\begin{gathered} x_1 = x_4 = u, \qquad x_{2k-1} = u, \\ x_2 = x_3 = v, \qquad x_{2k} = v, \\ (k = 3, 4, \ldots, n), \end{gathered}$$

l'équation (2) se réduit à

$$f^{n-1}(u, v) f(v, u) = 0. \tag{8}$$

On a aussi

$$f^{n-1}(v, u) f(u, v) = 0. \tag{9}$$

Si l'on pose, en général,

$$\begin{gathered} x_1 = x_4 = x_6 = \cdots = x_{2r} = x_{2r+2} = u, \qquad x_{2k-1} = u, \\ x_2 = x_3 = x_5 = \cdots = x_{2r-1} = x_{2r+1} = v, \qquad x_{2k} = v, \\ (k = r+2, r+3, \ldots, n \text{ et } 1 \leqslant r < n), \end{gathered}$$

l'équation (2) devient

$$f^{n-r}(u, v) f^r(v, u) = 0 \qquad (1 \leqslant r < n). \tag{10}$$

Grâce aux égalités (10), l'équation (7) donne

$$f(u, v) = 0 \qquad (n > 2),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que des fonctions réelles de variables réelles, mais le résultat indiqué s'étend sans difficulté à d'autres ensembles de variables et de fonctions.