PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 69 (1961)

# O JEDNOM DOVOLJNOM USLOVU ZA VAŽENJE STROGOG ZAKONA VELIKIH BROJEVA*

*Zoran Pop-Stojanović*

(Primljeno 12. maja 1961.)

Predmet ovoga rada su nizovi $\{X_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, međusobom nezavisnih slučajnih promenljivih ograničenih u svom skupu za koje je $E(X_n)=0$, $n=1, 2, \ldots$ i $b_n \equiv E(X_n^2)$, a za koje se kaže da zadovoljavaju strogi zakon velikih brojeva ako je:
$P\{S_n/n<\varepsilon\}=1$, za svako $n \geqslant N(\varepsilon)$ gde je $\varepsilon>0$ unapred dato, $N(\varepsilon)$ utvrđen prirodan broj, a $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Od Kolmogorova [1] potiče sledeći

Stav I. *Ako red* $\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n/n^2$ *konvergira, gde je* $\varepsilon>0$ *unapred dato, tada za niz* $\{X_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, *važi strogi zakon velikih brojeva.*

Dokaz ovoga stava zasniva se na primenama Borel—Cantelli-eve leme [2] i sledeće nejednakosti Kolmogorova, koja daje procenu verovatnoće za uniju nezavisnih događaja:

$$P\left\{\bigcup_{k=1}^{n} (|S_k| \geqslant \varepsilon)\right\} \leqslant B_n/\varepsilon^2, \text{ gde je } B_n \equiv \sum_{k=1}^{n} b_k \text{ i } \varepsilon>0.$$

Ideja da se umesto $\varepsilon=\text{const.}$ uvede niz $\varepsilon_n$ uz izvesne pretpostavke o brzini njegove konvergencije ka nuli, dovela je do sledećeg Cantelli-Stanojevićevog stava [2], [4]:

Stav II. *Ako* $\varepsilon_n \searrow 0$, $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n<\sqrt[4]{2}\,\varepsilon_{4n-1}$, $n=1, 2, \ldots$, *i ako red*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k/k \sum_{i=m_k}^{2m_k-1} \varepsilon_i^2\right)$$

*konvergira, gde je* $m_k=2^{[\log_2 k]}$, *tada je*: $P\{\lim_{n\to+\infty} (S_n/n\,\varepsilon_n)=0\}=1$.

---

* U našem jeziku ustalio se izraz „strogi zakon velikih brojeva" ma da je korektnije upotrebljavati „jaki zakon velikih brojeva".

Varijanta stava II je sledeći stav:

Stav II'. *Ako* $\varepsilon_n \to 0$ *i ako* $\sqrt{n} \cdot \varepsilon_n \nearrow +\infty$, *tada iz konvergencije reda* $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k / k^2 \varepsilon_{m_k}^2)$ *gde je* $m_k = 2^{[\log_2 k]}$, *sleduje* $P\{\lim_{n\to\infty} (S_n / n\, \varepsilon_n) = 0\} = 1$.

Stav koji ćemo sada formulisati daje dovoljan uslov za važenje strogog zakona velikih brojeva za niz $\{X_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, predstavlja izvesno uopštenje stava II' i dokazuje se bez primene nejednakosti o proceni verovatnoće za uniju nezavisnih događaja. On glasi:

Stav. *Ako:* $1^\circ$ $\varepsilon_n \to 0$, $2^\circ$ $n \cdot \varepsilon_n \nearrow +\infty$, *i* $3^\circ$ *red* $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n / n^2 \varepsilon_n^2)$ *konvergira, tada* $P\{\lim_{n\to\infty} (S_n / n\, \varepsilon_n) = 0\} = 1$, *što znači da za niz* $\{X_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, *važi strogi zakon velikih brojeva.*

*Dokaz.* Posmatrajmo niz slučajnih promenljivih

$$\{Y_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} (X_k / k\, \varepsilon_k)\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Njihovi drugi momenti su

$$E(Y_n^2) = E\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} (X_k / k\, \varepsilon_k)\right)^2\right\} = \sum_{k=1}^{n} (E(X_k^2) / k^2 \varepsilon_k^2),$$

jer je

$$E(X_i X_j) = 0 \quad \text{za} \quad i \neq j.$$

Kako je $\sum_{k=1}^{n} (b_k / k^2 \cdot \varepsilon_k^2) = O(1)$, za svako $n$, (ovo sleduje iz pretpostavke $3^\circ$ stava), to je $\sum_{k=1}^{n} (X_k / k \cdot \varepsilon_k) = O(1)$. Dakle,

$$E\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} (X_n / n\, \varepsilon_n)\right)^2\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n / n^2 \varepsilon_n^2) < +\infty,$$

što znači da red $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n / n\, \varepsilon_n)$ konvergira. Na osnovu ovoga zaključka i pretpostavke $2^\circ$ stava, dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} (X_k\, k\, \varepsilon_k)/(k\, \varepsilon_k)\right) / n\, \varepsilon_n = 0.$$

(Ovo je zaključak dobiven na osnovu Kronecker-ove leme [5]). Prema tome:

$$\lim_{n\to\infty} (S_n / n\, \varepsilon_n) = 0,$$

odnosno:

$$P\{\lim_{n\to\infty} (S_n / n\, \varepsilon_n) = 0\} = 1,$$

što predstavlja strogi zakon velikih brojeva za niz $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ .

Summary

## ON THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS

Let $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, be a sequence of independent random variables with $E(X_n) = 0$ and $E(X_n^2) \equiv b_n$. Here is proved the following theorem:

If 1° $\varepsilon_n \to 0$, 2° $n\,\varepsilon_n \nearrow +\infty$, and 3° the series $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n / n^2\,\varepsilon_n^2)$ is convergent, than: $P\{\lim_{n\to\infty} (S_n/n\,\varepsilon_n) = 0\} = 1$, whose outline of proof is: from 3° follows that the series $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n/n\,\varepsilon_n)$ is convergent. Than, from this fact and 2°, follows: (with using Kronecker's lema)

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} (X_k\,k\,\varepsilon_k)/k\,\varepsilon_k \right) / n\,\varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} (S_n/n\,\varepsilon_n) = 0$$

and

$$P\{\lim_{n\to\infty} (S_n/n\,\varepsilon_n) = 0\} = 1.$$

### LITERATURA

[1] A. Kolmogoroff: *Sur la loi forte des grandes nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 191, 1930.

[2] F. P. Cantelli: *Su due applicazioni di un teorema di G. Boole*, R. C. Lincei, Roma, vol. XXVI, 1917.

[3] Č. V. Stanojević: *Sur une généralisation d'une inégalité de Kolmogoroff*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 239, 1954.

[4] Č. V. Stanojević: *Note sur un théorème de M. Kolmogoroff*, Annales de l'Université de Lyon, section A, fasc. XVIII, 1955.

[5] G. H. Hardy: *Divergent series*, Oxford 1949.