PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 67 (1961)

SUR UNE REPRÉSENTATION DES NOMBRES DE STIRLING DANS UNE FORME EXPLICITE

Chr. Karanicoloff

(Reçu le 1 juin 1961)

Récemment MM. *D. S. Mitrinović* et *D. Đoković* ont démontré {*cf.* [1], [2]} une formule intéressante concernant les nombres de *Stirling*, à savoir

$$S_n^{n-m}=\frac{(-1)^m}{m}\binom{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\cdot\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{\binom{m+1}{k}}{\binom{n}{k+1}}S_n^{n-k}\quad(m<n),\tag{1}$$

ou, dans une forme plus simple,

$$m\,S_n^{n-m}+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{n-m+k+1}{k+2}S_n^{n-m+k+1}=0\qquad(m<n).\tag{2}$$

Dans cette Note nous nous proposons de donner une démonstration plus simple de la formule (2) et d'indiquer une application de cette formule.

1. En partant de l'identité définissant les nombres de *Stirling*:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)=\sum_{r=1}^{n}S_n^r x^r,\tag{3}$$

et en y remplaçant x par $x-1$, nous trouvons:

$$\prod_{k=1}^{n}(x-k)=\sum_{r=1}^{n}S_n^r(x-1)^r,$$

ou bien

$$\sum_{k=1}^{n+1}S_{n+1}^k x^k=x\sum_{r=1}^{n}S_n^r(x-1)^r.\tag{4}$$

Après l'identification des coefficients devant x^{n-m} dans l'identité (4), il vient

$$S_{n+1}^{n-m}=S_n^{n-m-1}-\binom{n-m}{1}S_n^{n-m}+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{n-m+k+1}{k+2}S_n^{n-m+k+1}\qquad(m<n).\tag{5}$$

D'autre part, nous pouvons eliminer S_{n+1}^{n-m} de la formule (5) et de la relation de récurrence, bien connue:

$$S_{n+1}^{n-m} = S_n^{n-m-1} - n\, S_n^{n-m}.$$

Ainsi nous obtenons la formule (2).

2. Nous allons appliquer la formule (2), pour représenter explicitement les nombres de *Stirling*.

En posant dans la formule (2)

$$m = r\ (<n), \quad m = r-1, \quad m = r-2, \ \ldots\ , \ m = 2, \quad m = 1,$$

nous obtenons (en vertu de $S_n^n = 1$) les équations suivantes:

$$m\, S_n^{n-m} + \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k \binom{n-m+k+1}{k+2} S_n^{n-m+k+1} = -(-1)^{m-1} \binom{n}{m+1}$$

$$(m = r,\ r-1,\ \ldots\ ,\ 1).$$

La résolution de ce dernier système (à l'aide des formules de *Cramer*) par rapport à l'inconnue S_n^{n-r} donne

$$S_n^{n-r} = \frac{(-1)^r}{r\,!} \begin{vmatrix} \binom{n-r+1}{2} & -\binom{n-r+2}{3} & \cdots & (-1)^{r-3}\binom{n-2}{r-1} & (-1)^{r-2}\binom{n-1}{r} & (-1)^{r-1}\binom{n}{r+1} \\ r-1 & \binom{n-r+2}{2} & & (-1)^{r-4}\binom{n-2}{r-2} & (-1)^{r-3}\binom{n-1}{r-1} & (-1)^{r-2}\binom{n}{r} \\ 0 & r-2 & & (-1)^{r-5}\binom{n-2}{r-3} & (-1)^{r-4}\binom{n-1}{r-2} & (-1)^{r-3}\binom{n}{r-1} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & & 2 & \binom{n-1}{2} & -\binom{n}{3} \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & \binom{n}{2} \end{vmatrix}.$$

Dans la littérature $\{cf.$ [2], [3]$\}$ il existe une formule semblable due à *Hammersley*, donnant S_n^{n-r} dans une forme explicite, mais celle que nous avons indiquée est plus simple.

RÉFÉRENCES:

[1] D. S. Mitrinović — D. Đoković: *Sur une relation de récurrence concernant les nombres de Stirling*, Comptes rendus de l'Academie des sciences de Paris, t. 250, 1960, p. 2110—2111.

[2] D. S. Mitrinović — R. S. Mitrinović: *Sur les nombres de Stirling et les nombres de Bernoulli d'ordre supérieur*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Beograd, serija: Matematika i fizika, № 43, 1960.

[3] J. M. Hammersley: *The sums of products of the natural numbers*, Proceedings of the London Mathematical Society, third series, vol. 1, 1951, pp. 435—452.