PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 66 (1961)

NOUVELLE FORMULE RELATIVE AUX POLYNÔMES DE LEGENDRE

Dragomir Đoković

1. — Dans cet article, nous présentons comme hypothèse la formule suivante:

$$P_{n+k}^{(k)}(x)=(2k-1)!!\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{2k+1}=n} P_{i_1}(x)\,P_{i_2}(x)\cdots P_{i_{2k+1}}(x) \tag{1. 1}$$

$$(n=0,\,1,\,2,\,\ldots\,;\;k=1,\,2,\,\ldots\,)$$

où $P_r(x)$ $(r=0,\,1,\,2,\,\ldots)$ désigne le polynôme de *Legendre* et

$$P_r^{(s)}(x)=\frac{d^s}{dx^s}\,P_r(x).$$

Nous allons prouver toutefois la formule hypothétique (1. 1) pour $k=1,\,2,\,3$.

2. — *Preuve pour* $k=1$. — Désignons par $F(x,\,t)$ la fonction génératrice des polynômes de *Legendre*:

$$F(x,\,t)\equiv(1-2xt+t^2)^{-1/2} \tag{2. 1}$$

et par D_t et D_x les opérateurs

$$D_t\equiv\frac{\partial}{\partial t},\quad D_x\equiv\frac{\partial}{\partial x}$$

lesquels sont commutatifs.

Par application de ces opérateurs à (2. 1), on obtient les égalités[1]

$$D_t\,F=(x-t)\,F^3, \tag{2. 2}$$

$$D_x\,F=t\,F^3. \tag{2. 3}$$

De là on a

$$(D_t+D_x)\,F=x\,F^3.$$

En y appliquant l'opérateur D_t^n, on obtient

$$(D_t^{n+1}+D_x\,D_t^n)\,F=x\,D_t^n\,F^3. \tag{2. 4}$$

[1] Pour abréger l'écriture, au lieu de $F(x,\,t)$ on posera F.

Pour $t=0$ l'égalité (2. 4) devient

$$(n+1)!\, P_{n+1}(x)+n!\, P_n'(x)=n!\, x \sum_{i_1+i_2+i_3=n} P_{i_1}(x)\, P_{i_2}(x)\, P_{i_3}(x).$$

Étant donné que

$$P_n'(x)=x\, P_{n+1}'(x)-(n+1)\, P_{n+1}(x), \tag{2. 5}$$

à partir de (2. 4) on trouve

$$P_{n+1}'(x)=\sum_{i_1+i_2+i_3=n} P_{i_1}(x)\, P_{i_2}(x)\, P_{i_3}(x) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ). \tag{2. 6}$$

Par suite, la formule (1. 1) est ainsi démontrée pour $k=1$.

3. — *Preuve pour* $k=2$. — Si l'on applique les opérateurs D_t et D_x à (2. 2) et (2. 3), on obtient

$$D_t^2\, F=(3\, x^2-1-4\, x\, t+2\, t^2)\, F^5, \tag{3. 1}$$

$$D_t\, D_x\, F=(1+x\, t-2\, t^2)\, F^5, \tag{3. 2}$$

$$D_x^2\, F=3\, t^2\, F^5. \tag{3. 3}$$

Vu ces dernières formules, on vérifie aisément que l'égalité

$$(D_t^2+4\, D_x\, D_t+2\, D_x^2)\, F=3\,(x^2+1)\, F^5 \tag{3. 4}$$

est vraie.

Par application de l'opérateur D_t^n à (3. 4), on a

$$(D_t^{n+2}+4\, D_x\, D_t^{n+1}+2\, D_x^2\, D_t^n)\, F=3\,(x^2+1)\, D_t^n\, F^5.$$

En y posant $t=0$, il vient[2]

$$(n+2)!\, P_{n+2}+4\,\{(n+1)!\}\, P_{n+1}'+2\,(n!)\, P_n''=3\,(x^2+1)\cdot n! \sum_{i_1+\cdots+i_5=n} P_{i_1}\cdot P_{i_2}\cdots P_{i_5}.$$

Donc, la preuve de (1. 1) pour $k=2$ se réduit à la vérification de l'égalité

$$(n+2)\,(n+1)\, P_{n+2}+4\,(n+1)\, P_{n+1}'+2\, P_n''=(x^2+1)\, P_{n+2}''. \tag{3. 5}$$

Selon (2. 5) on a

$$P_{n+1}'=x\, P_{n+2}'-(n+2)\, P_{n+2}, \tag{3. 6}$$

$$\begin{aligned} P_n'' &= D_x\,\{x\, P_{n+1}'-(n+1)\, P_{n+1}\} \\ &= x\, P_{n+1}''-n\, P_{n+1}' \\ &= x\,\{x\, P_{n+2}''-(n+1)\, P_{n+2}'\}-n\,\{x\, P_{n+2}'-(n+2)\, P_{n+2}\} \\ &= x^2\, P_{n+2}''-(2\, n+1)\, x\, P_{n+2}'+n\,(n+2)\, P_{n+2}. \end{aligned} \tag{3. 7}$$

[2] Au lieu de $P(x)$ on écrira P.

A l'aide de ces deux égalités, on trouve

$$\begin{aligned}(n+2)\,(n+1)\,P_{n+2}+4\,(n+1)\,P'_{n+1}+2\,P''_n & \\ =(n+2)\,(n+1)\,P_{n+2}+4\,(n+1)\,\{x\,P'_{n+2}-(n+2)\,P_{n+2}\} & \\ +2\,\{x^2\,P''_{n+2}-(2\,n+1)\,x\,P'_{n+2}+n\,(n+2)\,P_{n+2}\} & \\ =-(n+3)\,(n+2)\,P_{n+2}+2\,x\,P'_{n+2}+2\,x^2\,P''_{n+2} & \\ =(x^2+1)\,P''_{n+2}+\{(x^2-1)\,P''_{n+2}+2\,x\,P'_{n+2}-(n+2)\,(n+3)\,P_{n+2}\} & \\ =(x^2+1)\,P''_{n+2}. &\end{aligned}$$

C'est précisément l'égalité (3. 5) qu'il fallait démontrer.

4. — *Preuve pour* $k=3$. — Si l'on applique de nouveau les opérateurs D_t et D_x à (3. 1), (3. 2), (3. 3), on trouve

$$D_t^3\,F=3\,\{5\,x^3-3\,x-3\,(3\,x^2-1)\,t+6\,x\,t^2-2\,t^3\}\,F^7, \tag{4. 1}$$

$$D_t^2\,D_x\,F=3\,\{2\,x+(x^2-3)\,t-2\,x\,t^2+2\,t^3\}\,F^7, \tag{4. 2}$$

$$D_t\,D_x^2\,F=3\,t\,\{2+x\,t-3\,t^2\}\,F^7, \tag{4. 3}$$

$$D_x^3\,F=15\,t^3\,F^7. \tag{4. 4}$$

Selon ces égalités, on vérifie que l'égalité

$$(D_t^3+9\,D_t^2\,D_x+12\,D_t\,D_x^2+4\,D_x^3)\,F=15\,x\,(x^2+3)\,F^7 \tag{4. 5}$$

est vraiment exacte.

En appliquant l'opérateur D_t^n à (4. 5) et puis, en posant $t=0$, on trouve

$$\begin{aligned}(n+3)\,(n+2)\,(n+1)\,P_{n+3}+9\,(n+2)\,(n+1)\,P'_{n+2}+12\,(n+1)\,P''_{n+1}+4\,P'''_n & \\ =15\,x\,(x^2+3)\sum_{i_1+\cdots+i_7=n}P_{i_1}\,P_{i_2}\cdots P_{i_7}\,. &\end{aligned} \tag{4. 6}$$

La formule (4. 6) conduit à (1. 1) pour $k=3$ si l'égalité

$$\begin{aligned}(n+3)\,(n+2)\,(n+1)\,P_{n+3}+9\,(n+2)\,(n+1)\,P'_{n+2}+12\,(n+1)\,P''_{n+1}+4\,P'''_n & \\ =x\,(x^2+3)\,P'''_{n+3} &\end{aligned} \tag{4. 7}$$

est vraie.

Selon (3. 6) et (3. 7) on a

$$P'_{n+2}=x\,P'_{n+3}-(n+3)\,P_{n+3}\,, \tag{4. 8}$$

$$P''_{n+1}=x^2\,P''_{n+3}-(2\,n+3)\,x\,P'_{n+3}+(n+1)\,(n+3)\,P_{n+3}\,, \tag{4. 9}$$

$$(4.\ 10) \qquad P_n''' = D_x \{x^2 P_{n+2}'' - (2n+1)\, x P_{n+2}' + n(n+2) P_{n+2}\}$$
$$= x^2 P_{n+2}''' - (2n-1)\, x P_{n+2}'' + (n^2-1) P_{n+2}'$$
$$= x^2 D_x \{x P_{n+3}'' - (n+2) P_{n+3}'\} - (2n-1)\, x \{x P_{n+3}'' - (n+2) P_{n+3}'\}$$
$$+ (n^2-1)\{x P_{n+3}' - (n+3) P_{n+3}\}$$
$$= x^3 P_{n+3}''' - 3nx^2 P_{n+3}'' + 3(n^2+n-1) P_{n+3}' - (n^2-1)(n+3) P_{n+3}.$$

D'après ces formules, on obtient

$$(n+3)(n+2)(n+1) P_{n+3} + 9(n+2)(n+1) P_{n+2}' + 12(n+1) P_{n+1}'' + 4 P_n'''$$
$$= (n+3)(n+2)(n+1) P_{n+3} + 9(n+2)(n+1)\{x P_{n+3}' - (n+3) P_{n+3}\}$$
$$+ 12(n+1)\{x^2 P_{n+3}'' - (2n+3)\, x P_{n+3}' + (n+1)(n+3) P_{n+3}\}$$
$$+ 4\{x^3 P_{n+3}''' - 3nx^2 P_{n+3}'' + 3(n^2+n-1) P_{n+3}' - (n^2-1)(n+3) P_{n+3}\}$$
$$= 4x^3 P_{n+3}''' + 12x^2 P_{n+3}'' - 3(n+2)(n+5)\, x P_{n+3}'.$$

L'égalité (4. 7) reçoit maintenant la forme que voici

$$4x^3 P_{n+3}''' + 12x^2 P_{n+3}'' - 3(n+2)(n+5)\, x P_{n+3}' = x(x^2+3) P_{n+3}'''$$

ou bien

$$(4.\ 11) \qquad (x^2-1) P_{n+3}''' + 4x P_{n+3}'' - (n+2)(n+5) P_{n+3}' = 0.$$

Cependant, le polynôme P_{n+3} remplit l'équation différentielle de *Legendre*. Donc, on a

$$(4.\ 12) \qquad (x^2-1) P_{n+3}'' + 2x P_{n+3}' - (n+3)(n+4) P_{n+3} = 0.$$

Par différentiation de l'égalité (4. 12), on obtient (4. 11). Donc, la démonstration en question est achevée.

5. — *Remarques.* — a) On vérifie aisément la formule (1. 1) pour $n=0$ et $n=1$ (k arbitraire).

b) Les démonstrations de la formule (1. 1) deviennent de plus en plus compliquées avec la croissance de k ($=4, 5, \ldots$).

c) Les formules (2. 2), (3. 1), (4. 1) suggèrent la formule suivante:

$$(5.\ 1) \qquad D_t^n F = n!\, F^{2n+1} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} P_{n-\nu}(x)\, t^\nu .$$

Elle peut être démontrée aisément par l'induction complète.