PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA – SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 63 (1961)

SUR QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES CYCLIQUES SE RÉDUISANT À L'ÉQUATION DE CAUCHY

Dragomir Đoković

(Reçu le 20 avril 1961)

1. Équation $f(x_1+x_2, x_3)+f(x_2+x_3, x_1)+f(x_3+x_1, x_2)=0$.

Théorème 1. — *La solution générale continue de l'équation fonctionnelle*

$$f(x_1+x_2, x_3)+f(x_2+x_3, x_1)+f(x_3+x_1, x_2)=0, \tag{1. 1}$$

où f représente une fonction réelle des variables réelles, est donnée par

$$f(t_1, t_2)=(t_1-2\,t_2)\,F(t_1+t_2), \tag{1. 2}$$

où $F(t)$ désigne une fonction continue quelconque de t.

Démonstration. — Si l'on pose

$$x_1=y+\frac{t}{3},\quad x_2=-x-y+\frac{t}{3},\quad x_3=x+\frac{t}{3}, \tag{1. 3}$$

c'est-à-dire

$$x=\frac{1}{3}(-x_1-x_2+2\,x_3),\quad y=\frac{1}{3}(2\,x_1-x_2-x_3),\quad t=x_1+x_2+x_3, \tag{1. 4}$$

l'équation (1) devient

$$f\left(\frac{2\,t}{3}-x,\ \frac{t}{3}+x\right)+f\left(\frac{2\,t}{3}-y,\ \frac{t}{3}+y\right)+f\left(\frac{2\,t}{3}+x+y,\ \frac{t}{3}-x-y\right)=0. \tag{1. 5}$$

En introduisant la notation

$$f\left(\frac{2\,t}{3}-u,\ \frac{t}{3}+u\right)\equiv h(u, t), \tag{1. 6}$$

l'équation (1. 5) prend la forme suivante:

$$h(x, t)+h(y, t)+h(-x-y, t)=0. \tag{1. 7}$$

De là, si $x=y=0$, on tire $h(0, t)=0$.

L'équation (1. 7), pour $y=-x$, devient

$$h(-x, t)=-h(x, t).$$

Par suite, à l'équation (1. 7) on peut donner la forme que voici

$$h(x+y, t) = h(x, t) + h(y, t). \tag{1. 8}$$

À partir de cette équation, on conclut que, pour t fixe, la fonction $h(x, t)$ vérifie l'équation fonctionnelle de *Cauchy*. Donc, la solution générale continue de l'équation (1. 8) est

$$h(x, t) = x\, F_1(t), \tag{1. 9}$$

où $F_1(t)$ est une fonction continue arbitraire.

Selon (1. 6), la solution de l'équation (1. 1) prend la forme

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{3}\,(2\,t_2 - t_1)\, F_1(t_1 + t_2)$$

ou bien

$$f(t_1, t_2) = (t_1 - 2\,t_2)\, F(t_1 + t_2).$$

Le théorème 1 est donc démontré.

2. Généralisation de l'équation

$f(x_1 + x_2, x_3) + f(x_2 + x_3, x_1) + f(x_3 + x_1, x_2) = 0$

Pour généraliser le résultat précédent, considérons l'équation

$$f\{g^{-1}[g(x_1) + g(x_2)], x_3\} + f\{g^{-1}[g(x_2) + g(x_3)], x_1\} + f\{g^{-1}[g(x_3) + g(x_1)], x_2\} = 0, \tag{2. 1}$$

où $g(x)$ est une fonction donnée de x, continue et strictement monotone, et $g^{-1}(x)$ son inverse.

Théorème 2. — *La solution générale continue de l'équation* (2. 1) *est*

$$f(t_1, t_2) = \{g(t_1) - 2\,g(t_2)\}\, F(g(t_1) + g(t_2)), \tag{2. 2}$$

où F est une fonction continue de l'argument mis en évidence.

Démonstration. — Si l'on pose

$$f(g^{-1}(t_1),\ g^{-1}(t_2)) = h(t_1, t_2), \tag{2. 3}$$

c'est-à-dire

$$f(t_1, t_2) = h(g(t_1),\ g(t_2)),$$

avec

$$g(x_1) = t_1,\ g(x_2) = t_2,\ g(x_3) = t_3,$$

l'équation (2. 1) reçoit la forme

$$h(t_1 + t_2, t_3) + h(t_2 + t_3, t_1) + h(t_3 + t_1, t_2) = 0.$$

Mettant à profit le théorème 1, de la dernière équation on déduit le théorème 2.

Remarque. — Désignons par E l'intervalle de définition de la fonction $g(x)$ et par E' l'ensemble de tous les éléments x ayant la forme

$$x = g^{-1}(g(x_1) + g(x_2)) \qquad (x_1, x_2 \in E).$$

La solution (2. 2) de l'équation (2. 1) est définie sur le carré $M \times M$ (fini ou non) où M désigne l'intervalle $E \cap E'$.

Si la fonction $g(x)$ a des discontinuités (de première espèce), le théorème énoncé peut s'appliquer à chaque intervalle où elle est continue.

A la fin de cet article nous indiquerons quelques cas particuliers de l'équation (2. 1).

3. Équation $f(x_1 x_2, x_3) + f(x_2 x_3, x_1) + f(x_3 x_1, x_2) = 0$.

Considérons l'équation fonctionnelle cyclique

$$(3.\ 1) \qquad f(x_1 x_2, x_3) + f(x_2 x_3, x_1) + f(x_3 x_1, x_2) = 0,$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction réelle des variables réelles x et y.

Théorème 3. — *La solution générale de l'équation* (3. 1), *continue dans tout le plan* Oxy, *sauf pour* $x = y = 0$, *est donnée par les formules*

$$(3.\ 2) \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= F_1(xy) \log \frac{x}{y^2} && (x>0,\ y>0) \\ &= F_2(xy) \log \frac{-x}{y^2} && (x<0,\ y>0) \\ &= F_1(xy) \log \frac{-x}{y^2} && (x<0,\ y<0) \\ &= F_2(xy) \log \frac{x}{y^2} && (x>0,\ y<0) \\ &= -2k - c \log |x| && (x \neq 0,\ y = 0) \\ &= k + c \log |y| && (x = 0,\ y \neq 0), \end{aligned}$$

où k et c représentent deux constantes arbitraires et $F_1(x)$ et $F_2(x)$ deux fonctions arbitraires, définies et continues pour $x>0$ et $x<0$ respectivement et telles que la fonction $f(x, y)$ soit continue sur les axes Ox et Oy.

Démonstration. — a) Si dans le théorème 2, l'on fait $g(x) = \log x$ $(x>0)$, on a $g^{-1}(x) = e^x$ et on en tire que l'équation (3. 1), dans le premier quadrant du plan Oxy, a la solution générale continue suivante:

$$(3.\ 3) \qquad f(x, y) = F_1(xy) \log \frac{x}{y^2} \qquad (x, y>0),$$

$F_1(x)$ étant une fonction continue arbitraire définie pour $x>0$.

b) Si l'on remplace x_1, x_2, x_3 par $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, l'équation (3. 1) devient

$$(3.\ 4) \qquad f(x_1 x_2, -x_3) + f(x_2 x_3, -x_1) + f(x_3 x_1, -x_2) = 0.$$

Au moyen de la notation $f(x, -y) \equiv \varphi(x, y)$ l'équation précédente prend la forme

(3. 5) $$\varphi(x_1 x_2, x_3) + \varphi(x_2 x_3, x_1) + \varphi(x_3 x_1, x_2) = 0.$$

En utilisant le résultat a), on trouve que dans le premier quadrant du plan Oxy, la solution générale continue de l'équation (3. 5) est

$$f(x, -y) = \varphi(x, y) = \bar{F}_2(xy) \log \frac{x}{y^2} \qquad (x, y > 0)$$

ou bien

$$f(x, y) = \bar{F}_2(-xy) \log \frac{x}{y^2} \qquad (x > 0,\ y < 0)$$

c'est-à-dire, en posant $\bar{F}_2(x) \equiv F_2(-x) \quad (x > 0)$,

(3. 6) $$f(x, y) = F_2(xy) \log \frac{x}{y^2} \qquad (x > 0,\ y < 0).$$

c) Posons $-x_3$ au lieu de x_3 dans l'équation (3. 1). Il vient alors

(3. 7) $$f(x_1 x_2, -x_3) + f(-x_2 x_3, x_1) + f(-x_3 x_1, x_2) = 0.$$

Bornons-nous au cas $x_1, x_2, x_3 > 0$ et posons

$$x_1 = e^{y_1}, \quad x_2 = e^{y_2}, \quad x_3 = e^{y_3}.$$

On a alors

(3. 8) $$f(e^{y_1+y_2}, -e^{y_3}) + f(-e^{y_2+y_3}, e^{y_1}) + f(-e^{y_3+y_1}, e^{y_2}) = 0.$$

Après la substitition

(3. 9) $$\begin{aligned} f(x, y) &= -\psi(\log x, \log(-y)) \qquad (x > 0,\ y < 0) \\ &= \ \ \varphi(\log(-x), \log y) \qquad (x < 0,\ y > 0) \end{aligned}$$

ou bien

$$f(e^{t_1}, -e^{t_2}) = -\psi(t_1, t_2), \quad f(-e^{t_1}, e^{t_2}) = \varphi(t_1, t_2),$$

l'équation (3. 8) devient

(3. 10) $$\psi(y_1 + y_2, y_3) = \varphi(y_2 + y_3, y_1) + \varphi(y_3 + y_1, y_2).$$

Si l'on y fait le changement des variables à l'aide des formules suivantes

$$y_1 = y + \frac{t}{3}, \quad y_2 = -x - y + \frac{t}{3}, \quad y_3 = x + \frac{t}{3},$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{1}{3}(-y_1 - y_2 + 2y_3), \quad y = \frac{1}{3}(2y_1 - y_2 - y_3), \quad t = y_1 + y_2 + y_3,$$

il vient alors

$$\psi\left(\frac{2t}{3} - x,\ \frac{t}{3} + x\right) = \varphi\left(\frac{2t}{3} - y,\ \frac{t}{3} + y\right) + \varphi\left(\frac{2t}{3} + x + y,\ \frac{t}{3} - x - y\right).$$

Si l'on pose

$$\varphi\left(\frac{2t}{3}-x,\quad \frac{t}{3}+x\right)\equiv\sigma(t, x),\quad \psi\left(\frac{2t}{3}-x,\quad \frac{t}{3}+x\right)\equiv\tau(t, x),$$

ou bien

$$\varphi(t_1, t_2)\equiv\sigma\left(t_1+t_2,\quad \frac{2t_2-t_1}{3}\right),\quad \psi(t_1, t_2)\equiv\tau\left(t_1+t_2,\quad \frac{2t_2-t_1}{3}\right), \tag{3. 11}$$

on obtient l'équation

$$\tau(t, x)=\sigma(t, y)+\sigma(t, -x-y). \tag{3. 12}$$

En y faisant $y=-x$ on a

$$\tau(t, x)=\sigma(t, -x)+\sigma(t, 0). \tag{3. 13}$$

Des relations (3. 12) et (3. 13) il suit

$$\sigma(t, -x)+\sigma(t, 0)=\sigma(t, y)+\sigma(t, -x-y). \tag{3. 14}$$

Pour $x=0$ la dernière relation devient

$$\sigma(t, -y)=2\sigma(t, 0)-\sigma(t, y). \tag{3. 15}$$

En appliquant la formule (3. 15), l'équation (3. 14) s'écrit sous la forme

$$\sigma(t, x+y)=\sigma(t, x)+\sigma(t, y)-\sigma(t, 0). \tag{3. 16}$$

En introduisant la fonction

$$\rho(t, x)\equiv\sigma(t, x)-\sigma(t, 0), \tag{3. 17}$$

il vient alors

$$\rho(t, x+y)=\rho(t, x)+\rho(t, y).$$

La solution générale continue de cette équation est

$$\rho(t, x)=x\,\omega(t), \tag{3. 18}$$

où $\omega(t)$ est une fonction continue et arbitraire.

Des équations (3. 16) et (3. 13) il suit maintenant

$$\begin{aligned}\sigma(t, x)&=x\omega(t)+\lambda(t),\\ \tau(t, x)&=2\lambda(t)-x\omega(t),\end{aligned} \tag{3. 19}$$

$\lambda(t)$ étant aussi une fonction continue arbitraire.

En utilisant les formules (3. 11), on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2)&=\frac{2t_2-t_1}{3}\,\omega(t_1+t_2)+\lambda(t_1+t_2),\\ \psi(t_1, t_2)&=2\lambda(t_1+t_2)-\frac{2t_2-t_1}{3}\,\omega(t_1+t_2).\end{aligned} \tag{3. 20}$$

La relation (3. 9) donne

$$f(x, y) = -\frac{1}{3}\,\omega(\log(-xy))\log\frac{x}{y^2} - 2\lambda(\log(-xy)) \qquad (x>0,\ y<0)$$

$$= -\frac{1}{3}\,\omega(\log(-xy))\log\frac{-x}{y^2} + \lambda(\log(-xy)) \qquad (x<0,\ y>0),$$

ou bien

(3. 21) $$f(x, y) = G_1(xy)\log\frac{x}{y^2} - 2\,G_2(xy) \qquad (x>0,\ y<0)$$

$$= G_1(xy)\log\frac{-x}{y^2} + G_2(xy) \qquad (x<0,\ y>0),$$

avec $\frac{1}{3}\,\omega(\log(-x)) \equiv -G_1(x)$ et $\lambda(\log(-x)) \equiv G_2(x)$.

En comparant les solutions (3. 6) et (3. 21), on trouve

$$G_1(x) \equiv F_2(x), \quad G_2(x) \equiv 0$$

et par conséquent

(3. 22) $$f(x, y) = F_2(xy)\log\frac{-x}{y^2} \qquad (x<0,\ y>0).$$

d) Si dans l'équation (3. 1), on remplace x_1 et x_2 par $-x_1$ et $-x_2$, il vient

(3. 23) $$f(x_1 x_2, x_3) + f(-x_2 x_3, -x_1) + f(-x_3 x_1, -x_2) = 0.$$

Si l'on introduit la notation

(3. 24) $$f(x, y) = h(x, -y)$$

on obtient l'équation

$$h(x_1 x_2, -x_3) + h(-x_2 x_3, x_1) + h(-x_3 x_1, x_2) = 0$$

laquelle est précisément celle du type (3. 7). Par suite, sa solution est

$$h(x, y) = G_3(xy)\log\frac{x}{y^2} - 2\,G_4(xy) \qquad (x>0,\ y<0)$$

$$= G_3(xy)\log\frac{-x}{y^2} + G_4(xy) \qquad (x<0,\ y>0).$$

Vu (3. 24), on a

(3. 25) $$f(x, y) = G_3(-xy)\log\frac{x}{y^2} - 2\,G_4(-xy) \qquad (x>0,\ y>0)$$

$$= G_3(-xy)\log\frac{-x}{y^2} + G_4(-xy) \qquad (x<0,\ y<0).$$

En confrontant les relations (3. 3) et (3. 25), on trouve

$$G_3(-x) \equiv F_1(x), \quad G_4(x) \equiv 0.$$

A l'aide de ce résultat, on a

(3. 26) $$f(x, y) = F_1(xy)\log\frac{-x}{y^2} \qquad (x<0,\ y<0).$$

e) Dans ce qui précède nous avons trouvé la forme de la fonction $f(x, y)$ dans l'intérieur des quatre quadrants du plan Oxy. Il reste encore à trouver sa forme sur les axes. Dans ce but, dans (3. 1), posons $x_3 = 0$. Il vient

$$f(x_1 x_2, 0) + f(0, x_1) + f(0, x_2) = 0. \tag{3. 27}$$

Avec la notation

$$f(x, 0) \equiv -\alpha(x), \quad f(0, x) \equiv \beta(x)$$

l'équation (3. 27) prend la forme suivante:

$$\alpha(x_1 x_2) = \beta(x_1) + \beta(x_2). \tag{3. 28}$$

Si l'on y pose $x_2 = 1$, on trouve

$$\alpha(x_1) = \beta(x_1) + \beta(1). \tag{3. 29}$$

En utilisant (3. 29), l'équation (3. 28) devient

$$\beta(x_1 x_2) = \beta(x_1) + \beta(x_2) - \beta(1).$$

Avec la notation

$$\gamma(x) = \beta(x) - \beta(1) \tag{3. 30}$$

on a

$$\gamma(x_1 x_2) = \gamma(x_1) + \gamma(x_2).$$

La solution générale, de cette équation continue partout sauf pour $x = 0$, est*

$$\gamma(x) = c \log |x| \quad (c = \text{const}).$$

De (3. 30) et (3. 29) on déduit à présent

$$\beta(x) = k + c \log |x| \quad (k = \text{const})$$

$$\alpha(x) = 2k + c \log |x|$$

ou bien

$$f(x, 0) = -2k - c \log |x|, \quad f(0, x) = k + c \log |x|. \tag{3. 31}$$

Des relations (3. 3), (3. 6), (3. 22), (3. 26) et (3. 31) il suit que le théorème 3 est bien vrai.

La solution (3. 2) est continue dans tout le plan dans le cas où $k = 0$ et $c = 0$.

4. Cas particuliers de l'équation

$$f\{g^{-1}[g(x_1) + g(x_2)], x_3\} + f\{g^{-1}[g(x_2) + g(x_3)], x_1\} + f\{g^{-1}[g(x_3) + g(x_1)], x_2\} = 0$$

a) Si $g(x) = g^{-1}(x) = 1/x$ $(x > 0)$, on a l'équation suivante

$$f\left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}, x_3\right) + f\left(\frac{x_2 x_3}{x_2 + x_3}, x_1\right) + f\left(\frac{x_3 x_1}{x_3 + x_1}, x_2\right) = 0 \quad (x_1, x_2, x_3 > 0)$$

---

* J. Aczél. *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel 1961, p. 47—48.

dont la solution générale continue est

$$f(t_1, t_2)=\left(\frac{1}{t_1}-\frac{2}{t_2}\right) F\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right) \qquad (t_1, t_2>0).$$

b) Pour $g(x)=g^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, on a l'équation fonctionnelle

$$f\left\{\sqrt{1-(\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2})^2},\ x_3\right\}+f\left\{\sqrt{1-(\sqrt{1-x_2^2}+\sqrt{1-x_3^2})^2},\ x_1\right\}$$
$$+f\left\{\sqrt{1-(\sqrt{1-x_3^2}+\sqrt{1-x_1^2})^2},\ x_2\right\}=0$$

dont la solution générale continue est

$$f(t_1, t_2)=(\sqrt{1-t_1^2}-2\sqrt{1-t_2^2})\ F(\sqrt{1-t_1^2}+\sqrt{1-t_2^2}) \qquad (0\leqslant t_1, t_2\leqslant 1).$$

Avec la notation

$$f(\sqrt{1-t_1^2},\ t_2)\equiv\varphi(t_1, t_2),$$

on a l'équation fonctionnelle

$$\varphi(\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2},\ x_3)+\varphi(\sqrt{1-x_2^2}+\sqrt{1-x_3^2},\ x_1)$$
$$+\varphi(\sqrt{1-x_3^2}+\sqrt{1-x_1^2},\ x_2)=0$$

à solution générale continue suivante:

$$\varphi(t_1, t_2)=(t_1-2\sqrt{1-t_2^2})\ F(t_1+\sqrt{1-t_2^2}) \qquad (0\leqslant t_1, t_2\leqslant 1).$$

Enfin, si l'on pose $\sin x_1$, $\sin x_2$, $\sin x_3$ au lieu de x_1, x_2, x_3, on obtient l'équation fonctionnelle

$$\varphi(\cos x_1+\cos x_2,\ \sin x_3)+\varphi(\cos x_2+\cos x_3,\ \sin x_1)$$
$$+\varphi(\cos x_3+\cos x_1,\ \sin x_2)=0 \qquad \left(0\leqslant x_1, x_2, x_3\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

dont la solution générale continue est

$$\varphi(t_1, t_2)=(t_1-2\sqrt{1-t_2^2})\ F(t_1+\sqrt{1-t_2^2}) \qquad (0\leqslant t_1, t_2\leqslant 1).$$

MM. *D. S. Mitrinović* et *J. Aczél* ont bien voulu lire une première redaction de cet article. Leurs observations ont contribué à améliorer le texte en quelques endroits.

Les démonstrations indiquées dans c) et d) peuvent être raccourcies, comme l'avait observé M. *J. Aczél*.