PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 58 (1961)

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES RESTES DE SÉRIES CONVERGENTES À TERMES POSITIFS

Lazar Karadžić

Si l'on envisage dans le plan de Lobatchewsky la suite de points

$$(1) \qquad \{M_n(s_n, v_n)\} \qquad (s_n = \sum_1^n u_k, \; u_k > 0)$$

dont la situation par rapport au système rectangulaire de coordonées Oxy est déterminée au moyen des premières coordonnées, on peut alors, comme l'auteur l'a démontré[1], former, selon cette suite, la serie

$$(2) \qquad \sum_1^\infty (1 - e^{-u_{n+1}}) \operatorname{th} v_n$$

qui converge si

$$(3) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \, e^{s_n} \operatorname{th} v_n < \infty .$$

A chaque série à termes positifs que l'on peut écrire sous la forme

$$(4) \qquad \sum_1^\infty a_n b_n \quad (0 < a_n < 1, 0 < b_n < 1)$$

correspondra une suite de la forme (1). Lorsque l'on écrit cette série sous la forme (2) $\sum\limits_1^\infty a_n (1 - e^{lg(1-b_n)})$ elle convergera, alors, selon la condition (3), si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (1 - b_k)} < \infty .$$

Chaque parallèle à l'axe x, passant par le point M_n a également pour parallèle la droite $x = c_n$. Une telle suite $\{c_n\}$ correspondra à la série (4). Si

$$(5) \qquad 0 < \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (1 - b_k)} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (1 - b_k)} < \infty ,$$

alors, lorsqu'on prend en considération le travail susmentionné [1],

$$c_n = O(1), \qquad n \to \infty .$$

[1] L. Karadžić: *Prilozi proučavanju nekih problema iz teorije redova i jednoznačnih analitičkih funkcija pomoću geometrije Lobačevskog.* Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № 42 (1960), Beograd.

D'après ce qu'on a exposé précédemment, on peut formuler ce

Théorème — *Si les termes de la série* (4) *satisfont à la condition* (5), *alors*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k \cong \theta a_{n+1}, \qquad n \to \infty \quad (0 < \theta \leqslant 1).$$

D'après la condition (5) et en vertu de l'interprétation géométrique la suite $\left\{\prod_{k=1}^{n-1}(1-b_k)\right.$ est divergente, c. à d. c'est une suite—nulle. Si la série $\sum b_n$ est, donc, divergente, cette suite diverge. De là, lorsqu'on envisage la série de forme $\sum_{1}^{\infty} u_n$ $(u_n > 0)$ et qu'on l'écrit sous la forme

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{u_n}{\lambda_n} \lambda_n \qquad \left(0 < \frac{u_n}{\lambda_n},\ \lambda_n < 1\right),$$

la suite $\left\{\prod_{k=1}^{n}(1-\lambda_k)\right\}$ est divergente. D'après le théorème susmentionné le reste de cette série se comportera d'une façon asymptotique comme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \cong \theta \frac{u_{n+1}}{\lambda_{n+1}}, \qquad n \to \infty \quad (0 < \theta \leqslant 1),$$

si

$$0 < \varliminf_{n\to\infty} \frac{u_n}{\lambda_n \prod_{k=1}^{n-1}(1-\lambda_k)} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{u_n}{\lambda_n \prod_{k=1}^{n-1}(1-\lambda_k)} < \infty .$$

Ainsi, par exemple, chez la série $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha > 1)$ lorsqu'on pose $\lambda_n = \frac{\alpha - 1}{n}$, e reste, d'après ce théorème, se comporte d'une manière asymptotique comme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \cong \theta \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha}}, \qquad n \to \infty, \qquad \left(0 < \theta \leqslant 1, \frac{\alpha-1}{m} < 1\right).$$

C'est évident, car dans ce cas-ci on a $\prod_{k=m}^{n}\left(1 - \frac{\alpha-1}{k}\right) \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}, \qquad n \to \infty .$

Lorsqu'on prend en considération la condition (5), le reste de la série (4) se comporte d'une manière asymptotique comme

$$R_n = \sum_{n+1}^{\infty} a_k b_k \sim \prod_{k=1}^{n-1}(1-b_k), \quad n \to \infty .$$

Résumé

ASIMPTOTSKO PONAŠANJE OSTATAKA KONVERGENTNIH REDOVA SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

Lazar Karadžić

U ovom članku pomoću geometrije Lobačevskog, dokazuje se stav: *Ako članovi reda* (4) *zadovoljavaju uslov* (5), *tada je*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k \cong \theta a_{n+1}, \qquad n \to \infty \quad (0 < \theta \leqslant 1).$$