PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 53 (1961)

SUR CERTAINES EQUATIONS FONCTIONNELLES

Dragoslav S. Mitrinović et *Dragomir Đoković*

(Reçu le 12 février 1961)

1. Équations fonctionnelles considérées par S. Kurepa

S. Kurepa [1] a considéré les équations:

(1. 1) $$f(x_1+x_2, x_3)+f(x_1, x_2)=f(x_2, x_3)+f(x_1, x_2+x_3),$$

(1. 2) $$f(x_1+x_2, x_3, x_4)+f(x_1, x_2, x_3+x_4) \\ =f(x_2, x_3, x_4)+f(x_1, x_2+x_3, x_4)+f(x_1, x_2, x_3),$$

(1. 3) $$f(x_1+x_2, x_3, x_4, x_5)+f(x_1, x_2, x_3+x_4, x_5)+f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ =f(x_2, x_3, x_4, x_5)+f(x_1, x_2+x_3, x_4, x_5)+f(x_1, x_2, x_3, x_4+x_5),$$

et il a démontré les théorèmes suivants:

Théorème 1. 1. — Les fonctions

(1. 4) $$f(x_1, x_2)=F(x_1+x_2)-F(x_1)-F(x_2),$$

(1. 5) $$f(x_1, x_2, x_3)=F(x_1+x_2, x_3)+F(x_1, x_2)-F(x_1, x_2+x_3)-F(x_2, x_3),$$

(1. 6) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=F(x_1+x_2, x_3, x_4)+F(x_1, x_2, x_3+x_4) \\ -F(x_2, x_3, x_4)-F(x_1, x_2+x_3, x_4)-F(x_1, x_2, x_3)$$

(F fonction quelconque)

sont les solutions des équations (1, 1), (1, 2), (1, 3), respectivement.

Théorème 1. 2. — Si f est une fonction dérivable vérifiant l'équation (1. 1) ou (1. 2) ou (1. 3), elle a alors la forme correspondante (1. 4), (1, 5), (1. 6), où F désigne une fonction quelconque des arguments mis en évidence.

A la vérité, *S. Kurepa* a donné la solution de l'équation (1. 3) sous la forme que voici:

$$(1.7)\quad \begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = &\{G(x_1+x_2, x_3, x_4) + G(x_1, x_2, x_3+x_4) \\ &- G(x_2, x_3, x_4) - G(x_1, x_2+x_3, x_4) - G(x_1, x_2, x_3)\} \\ &+ \{H(x_1+x_2, x_3) - H(x_2, x_3) - H(x_1, x_2+x_3)\} \\ &+ \{K(x_1+x_2) - K(x_1) - K(x_2)\} + a. \end{aligned}$$

Cependant, à cette fonction on peut donner la forme (1. 6), car si l'on met

$$F(x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_2, x_3) + H(x_1, x_2) + K(x_1) - a,$$

on obtient la fonction $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sous la forme (1. 7).

Donc, les fonctions H et K et la constante a, intervenant dans la solution (1. 7), sont superflues.

Il en est de même avec les solutions de *Kurepa* des équations (1. 1) et (1.2).

2. Remarque de J. Erdös

Relativement à l'équation (1. 1) *Erdös* [2] a démontré le résultat suivant:

Théorème 2. 1. — Toute la fonction continue f vérifiant l'équation fonctionnelle (1. 1) possède la forme (1. 4), mais cette solution n'est pas la solution générale de l'équation (1. 1).

3. Généralisation des résultats de S. Kurepa

Soit $x_k \in E$ et que sur E soit définie une opération interne $\circ$, qui est associative. Pour les fonctions f, on les suppose définies sur E et que leurs valeurs appartiennent à un groupe abélien additif.

Ceci étant admis, on démontre sans difficulté le théorème que voici.

Théorème 3. 1. — Les équations fonctionnelles

$$(3.1)\quad f(x_1\circ x_2, x_3) + f(x_1, x_2) = f(x_2, x_3) + f(x_1, x_2\circ x_3),$$

$$(3.2)\quad \begin{aligned} &f(x_1\circ x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_2, x_3\circ x_4) \\ &\qquad = f(x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_2\circ x_3, x_4) + f(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

$$(3.3)\quad \begin{aligned} &f(x_1\circ x_2, x_3, x_4, x_5) + f(x_1, x_2, x_3\circ x_4, x_5) + f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &\qquad = f(x_2, x_3, x_4, x_5) + f(x_1, x_2\circ x_3, x_4, x_5) + f(x_1, x_2, x_3, x_4\circ x_5). \end{aligned}$$

ont comme solutions les fonctions respectives:

$$(3.4)\qquad f(x_1, x_2) = F(x_1 \circ x_2) - F(x_1) - F(x_2),$$

$$(3.5)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = F(x_1 \circ x_2, x_3) + F(x_1, x_2) - F(x_1, x_2 \circ x_3) - F(x_2, x_3),$$

$$(3.6)\qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(x_1 \circ x_2, x_3, x_4) + F(x_1, x_2, x_3 \circ x_4) - F(x_2, x_3, x_4) - F(x_1, x_2 \circ x_3, x_4) - F(x_1, x_2, x_3),$$

où F sont des fonctions quelconques des arguments mis en évidence.

Si dans les équations (3. 1), (3. 2), (3. 3), (3. 4), (3. 5), (3. 6) au lieu de $\circ$ on pose $+$ (l'addition ordinaire dans l'ensemble des nombres réels), on obtient les équations de *S. Kurepa* avec leurs solutions respectives.

La question relative au caractère de généralité de la solution indiquée dans le théorème 3. 1 reste ouverte.

4. Sur une classe étendue d'équations fonctionnelles

Soit $f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ une fonction réelle quelconque des variables réelles $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. L'opérateur linéaire $S_{n-1}^{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n}$ sera défini par l'égalité suivante

$$(4.1)\qquad S_{n-1}^{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \equiv (-1)^{n-1} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) - f(t_2, t_3, \ldots, t_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} f(t_1, t_2, \ldots, t_k + t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}, t_n).$$

Dans le cas général, l'opérateur défini plus haut, appliqué à une fonction f (dépendant au plus de $n-1$ variables indépendantes) fournit une fonction bien déterminée de n arguments. Si la notation suivante n'était pas de nature à conduire à une confusion, pour abréger l'écriture au lieu de $S_{n-1}^{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n}$, on poserait $S_{n-1}^{t_n}$.

Ainsi, par exemple, on a

$$S_3^{t_4}(t_1^2 + t_3) \equiv (-1)^3 (t_1^2 + t_3) - (t_2^2 + t_4) + \{(t_1 + t_2)^2 + t_4\} - (t_1^2 + t_4) + \{t_1^2 + (t_3 + t_4)\}.$$

Théorème 4. 1. — On a

$$(4.2)\qquad S_n^{t_{n+1}} S_{n-1}^{t_n} = 0 \qquad (0 \text{ zéro-opérateur})$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4.3)\qquad S_n^{t_{n+1}} S_{n-1}^{t_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \equiv 0,$$

où f désigne une fonction quelconque.

Démonstration. — Si l'on applique l'opérateur $S_n^{t_{n+1}}$ à tous deux membres de l'égalité (4. 1), on obtient

$$\begin{aligned} & S_n^{t_{n+1}} S_{n-1}^{t_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \\ & \quad = (-1)^{n-1} S_n^{t_{n+1}} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) - S_n^{t_{n+1}} f(t_2, t_3, \ldots, t_n) \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} S_n^{t_{n+1}} f(t_1, t_2, \ldots, t_k + t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}, t_n). \end{aligned}$$

Mettant à profit la définition de $S_n^{t_{n+1}}$, la dernière égalité reçoit la forme suivante

$$\begin{aligned} (4.\ 4) \qquad & S_n^{t_{n+1}} S_{n-1}^{t_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \\ & \quad = (-1)^{n-1} S_n^{t_{n+1}} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) - S_n^{t_{n+1}} f(t_2, t_3, \ldots, t_n) \\ & \quad + \Big\{ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} [(-1)^n f(t_1, t_2, \ldots, t_k + t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}, t_n) \\ & \qquad\qquad - f(t_2, t_3, \ldots, t_{k+1} + t_{k+2}, \ldots, t_n, t_{n+1})] \\ & \quad + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{v=1}^{k-1} (-1)^{k+v} f(t_1, t_2, \ldots, t_v + t_{v+1}, \ldots, t_{k+1} + t_{k+2}, \ldots, t_n, t_{n+1}) \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{v=k+2}^{n} (-1)^{k+v} f(t_1, t_2, \ldots, t_k + t_{k+1}, \ldots, t_v + t_{v+1}, \ldots, t_n, t_{n+1}) \Big\}. \end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, dans le { }, nous avons omis les termes pour $v = k$ et $v = k+1$, car ils se détruisent. Nous allons montrer que les sommes doubles se détruisent également. En effet, nous avons:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{v=1}^{k-1} (-1)^{k+v} f(t_1, t_2, \ldots, t_v + t_{v+1}, \ldots, t_{k+1} + t_{k+2}, \ldots, t_n, t_{n+1}) \\ & \quad = \sum_{k=3}^{n} \sum_{v=1}^{k-2} (-1)^{k+1+v} f(t_1, t_2, \ldots, t_v + t_{v+1}, \ldots, t_k + t_{k+1}, \ldots, t_n, t_{n+1}) \\ & \quad = \sum_{v=1}^{n-2} \sum_{k=v+2}^{n} (-1)^{k+1+v} f(t_1, t_2, \ldots, t_v + t_{v+1}, \ldots, t_k + t_{k+1}, \ldots, t_n, t_{n+1}) \\ & \quad = -\sum_{k=1}^{n-2} \sum_{v=k+2}^{n} (-1)^{k+v} f(t_1, t_2, \ldots, t_k + t_{k+1}, \ldots, t_v + t_{v+1}, \ldots, t_n, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Ceci étant, l'égalité (1. 4) devient

$$\begin{aligned} (4.\ 5) \qquad & S_n^{t_{n+1}} S_{n-1}^{t_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \\ & \quad = (-1)^{n-1} S_n^{t_{n+1}} f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) - S_n^{t_{n+1}} f(t_2, t_3, \ldots, t_n) \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \{(-1)^n f(t_1, t_2, \ldots, t_k + t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}, t_n) \\ & \qquad\qquad - f(t_2, t_3, \ldots, t_{k+1} + t_{k+2}, \ldots, t_n, t_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Étant donné que

$$(4.6)\qquad S_n^{t_{n+1}} f(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}) \equiv (-1)^n f(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}) - f(t_2,t_3,\ldots,t_n)$$
$$+\left\{\left[\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1} f(t_1,t_2,\ldots,t_k+t_{k+1},\ldots,t_{n-1},t_n)\right]\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+1} f(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1})\right\} \equiv -f(t_2,t_3,\ldots,t_n)$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1} f(t_1,t_2,\ldots,t_k+t_{k+1},\ldots,t_{n-1},t_n),$$

$$(4.7)\qquad S_n^{t_{n+1}} f(t_2,t_3,\ldots,t_n) \equiv (-1)^n f(t_2,t_3,\ldots,t_n) - f(t_3,t_4,\ldots,t_{n+1})$$
$$+\left\{f(t_3,t_4,\ldots,t_{n+1}) + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1} f(t_2,t_3,\ldots,t_k+t_{k+1},\ldots,t_n,t_{n+1})\right\}$$
$$\equiv (-1)^n f(t_2,t_3,\ldots,t_n) + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1} f(t_2,t_3,\ldots,t_k+t_{k+1},\ldots,t_n,t_{n+1})$$

l'expression (4. 5) se réduit à

$$S_n^{t_{n+1}} S_{n-1}^{t_n} f(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}) \equiv 0.$$

C'est précisément l'égalité (4. 3), ce qui démontre le théorème 4. 1.

Théorème 4. 2. — L'équation fonctionnelle

$$(4.8)\qquad S_n^{x_{n+1}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 \qquad (n=2,3,4,\ldots)$$

a comme solutions la fonction

$$(4.9)\qquad f(t_1,t_2,\ldots,t_n) = S_{n-1}^{t_n} F(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}),$$

où F désigne une fonction quelconque des variables mises en évidence.

Théorème 4. 3. — Dans l'ensemble des fonctions dérivables la solution (4. 9) de l'équation fonctionnelle (4. 8) est la solution générale.

Démonstration. — Le théorème 4.2 est la conséquence immédiate du théorème 4. 1.

Pour démontrer le théorème 4. 3, mettons l'équation (4. 8) sous la forme

$$(-1)^n f(x_1,x_2,\ldots,x_n) - f(x_2,x_3,\ldots,x_{n+1})$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} f(x_1,x_2,\ldots,x_k+x_{k+1},\ldots,x_n,x_{n+1}) = 0.$$

Si l'on dérive par rapport à x_{n+1} la dernière équation et si l'on pose

$$\frac{\partial}{\partial t_n} f(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},t_n)\Big|_{t_n=0} = (-1)^n g(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}),$$

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -g(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1} g(x_1, x_2, \ldots, x_k + x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n).$$

On en tire par l'intégration

$$(4.10) \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-1)^{n-1} G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) - G(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$+ H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1} G(x_1, x_2, \ldots, x_k + x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial t_{n-1}} G(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = g(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),$$

où la fonction arbitraire dérivable dépendant des $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ est prise sous la forme

$$(-1)^{n-1} G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

A l'égalité (4. 10) on peut donner la forme

$$(4.11) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S_{n-1}^{x_n} G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Étant donné que, selon la supposition, f présente une solution de l'équation (4. 8) et puisque, vu le théorème 4. 2, la fonction

$$S_{n-1}^{x_n} G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

est aussi une solution de la même équation, l'égalité

$$S_n^{x_{n+1}} H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0$$

aura également lieu.

D'après (4. 6) la dernière équation reçoit la forme suivante

$$-H(x_2, x_3, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1} H(x_1, x_2, \ldots, x_k + x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0.$$

Cette équation s'écrit sous la forme

$$(4.12) \qquad H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (-1)^{n-1} S_{n-1}^{x_n} H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

En employant la dernière formule, on peut donner à la fonction f, déterminée par (4. 11), la forme que voici:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S_{n-1}^{x_n} G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + (-1)^{n-1} S_{n-1}^{x_n} H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Si l'on y pose

$$F = G + (-1)^{n-1} H,$$

on aura

(4. 13) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S_{n-1}^{x_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Donc, le théorème 4. 3 est démontré.

Sans difficulté, on démontre aussi le résultat suivant:

Théorème 4. 4. — Si les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont les éléments d'un ensemble, muni d'une opération interne $\circ$ associative et si les valeurs des fonctions qu'on y considère appartiennent à un groupe abélien additif, la solution de l'équation fonctionnelle

$$(-1)^n f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} f(x_1, x_2, \ldots, x_k \circ x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0$$

admet alors la forme suivante

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (-1)^{n-1} F(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) - F(t_2, t_3, \ldots, t_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} F(t_1, t_2, \ldots, t_k \circ t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}, t_n)$$

où F est une fonction arbitraire.

5. Cas particuliers

Pour $n=2$ l'équation (4. 8) prend la forme suivante

$$S_2^{x_3} f(x_1, x_2) = 0$$

ou bien

(5. 1) $$f(x_1, x_2) - f(x_2, x_3) + f(x_1 + x_2, x_3) - f(x_1, x_2 + x_3) = 0,$$

ce qui est l'équation (1. 1).

D'après (4. 9) la solution de cette équation est

(5. 2) $$f(t_1, t_2) = S_1^{t_2} F(t_1) = F(t_1 + t_2) - F(t_1) - F(t_2),$$

et elle est en parfait accord avec la solution (1. 4).

Pour $n=3$ et $n=4$ on obtient respectivement les équations fonctionnelles

(5. 3) $$S_3^{x_4} f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

(5. 4) $$S_4^{x_5} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

En écrivant ces équations sous leurs formes développés, on retombe sur les équations (1. 2) et (1. 3).

Les solutions des équations (5. 3) et (5. 4) sont respectivement

(5. 5) $$f(t_1, t_2, t_3) = S_2^{t_3} F(t_1, t_2),$$

(5. 6) $$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = S_3^{t_4} F(t_1, t_2, t_3)$$

et ce sont précisément les solutions (1. 5) et (1. 6).

Par suite, nous avons construit une classe étendue des équations fonctionnelles à solutions connues dont des cas particuliers sont les équations traitées par *S. Kurepa.*

Considérons encore le cas particulier correspondant à $n = 5$, à savoir

$$S_5^{x_6} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$$

ou bien

(5. 7) $$\begin{aligned} -f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) - f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ + f(x_1 + x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - f(x_1, x_2 + x_3, x_4, x_5, x_6) \\ + f(x_1, x_2, x_3 + x_4, x_5, x_6) - f(x_1, x_2, x_3, x_4 + x_5, x_6) \\ + f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 + x_6) = 0. \end{aligned}$$

Vu la formule (4. 9), la solution de l'équation fonctionnelle (5. 7) est

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = S_4^{t_5} F(t_1, t_2, t_3, t_4)$$

c'est-à-dire

(5. 8) $$\begin{aligned} f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = F(t_1, t_2, t_3, t_4) - F(t_2, t_3, t_4, t_5) \\ + F(t_1 + t_2, t_3, t_4, t_5) - F(t_1, t_2 + t_3, t_4, t_5) \\ + F(t_1, t_2, t_3 + t_4, t_5) - F(t_1, t_2, t_3, t_4 + t_5), \end{aligned}$$

où F désigne une fonction arbitraire des arguments indiqués.

Le caractère de généralité de cette solution est précisé au théorème 4. 3.

Le contenu de ce paragraphe est résumé dans une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. 252, 1961.

6. Remarque

En dehors des types d'équations fonctionnelles considérées dans cet article et dans la Note [3], on peut former, de manière analogue, d'autres équations fonctionnelles à solutions connues.

Tout ceci sera l'objet des recherches prochaines des auteurs de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Kurepa: *On some functional equations* (Glasnik matematičko-fizički i astronomski; serija II, t. 11, 1956. p. 3—5).

[2] J. Erdös: *A remark on the paper „On some functional equations" by S. Kurepa* (Glasnik matematičko-fizički i astronomski, serija II, t. 14, 1959, p. 3—5).

[3] D. S. Mitrinović — D. Đoković: *Sur une classe d'équations fonctionnelles cycliques* (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 252, 1961, p 1090—1092).