PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 52 (1961)

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX FONCTIONS DE BESSEL

Dragomir Đoković

(Reçu le 23 novembre 1960)

Nous allons sommer la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+k)J_n(x)J_{n+k}(x), \tag{1}$$

où $k\,(>1)$ est un entier impair et $J_\nu(x)$ la fonction de Bessel de première espèce.

I. Stojanović, dans un article[1], a sommé la série (1) en traitant un problème de télécommunication. Sa méthode se résume comme suit:

Si l'on part du développement

$$F(\omega,t)=\exp(ix\sin\omega t)=\exp\left\{\frac{x}{2}\left(e^{i\omega t}-\frac{1}{e^{i\omega t}}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\,e^{in\omega t},$$

on trouve

$$A(\omega,t)=\operatorname{Re}F(\omega,t)=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos 2n\omega t,$$

$$B(\omega,t)=\operatorname{Im}F(\omega,t)=2\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\omega t$$

et

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{B(\omega,t)}{A(\omega,t)}=x\sin\omega t.$$

Si l'on dérive la dernière relation par rapport à t, en tenant compte de

$$|F(\omega,t)|=1$$

ou bien

$$A^2(\omega,t)+B^2(\omega,t)=1,$$

il vient

$$A\frac{\partial B}{\partial t}-B\frac{\partial A}{\partial t}=\omega x\cos\omega t.$$

---

[1] *I. Stojanović*: Izračunavanje sume nekih beskonačnih redova obrazovanih od proizvoda Bessel-ovih funkcija. Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et Physique, № 51, 1961.

En annulant les harmoniques impairs d'ordre supérieur, on obtient la formule

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^n (k-2n) J_n(x) J_{k-n}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+k) J_n(x) J_{n+k}(x) = 0.$$

Nous allons indiquer dans ce qui suit une méthode directe pour sommer (1). Désignons par S la somme de cette série, nous avons

$$(3)\qquad \begin{aligned} S &= 2\sum_{n=0}^{\infty} n J_n(x) J_{n+k}(x) + k\sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) J_{n+k}(x) \\ &= 2P + kQ \end{aligned}$$

avec

$$(4)\qquad P = \sum_{n=0}^{\infty} n J_n(x) J_{n+k}(x) \quad \text{et} \quad Q = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) J_{n+k}(x).$$

En partant de la série

$$(5)\qquad \bar{P} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(x) J_{n+k}(x).$$

et en utilisant les formules (4), on a

$$\bar{P} = P + \sum_{n=-\infty}^{-1} n J_n(x) J_{n+k}(x) = P + \sum_{n=1}^{\infty} (-n) J_{-n}(x) J_{k-n}(x) = P + (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} n J_n(x) J_{n-k}(x)$$

$$= P + \sum_{n=1}^{\infty} n J_n(x) J_{n-k}(x) \ \text{(parce que } k \text{ est supposé impair).}$$

Il en résulte

$$(6)\qquad \begin{aligned} \bar{P} &= P + \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^{n-k} n J_n(x) J_{k-n}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) J_n(x) J_{n+k}(x) \\ &= 2P + kQ + \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^{n+1} n J_n(x) J_{k-n}(x) \\ &= S + \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^{n+1} n J_n(x) J_{k-n}(x). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi réduit le calcul de S à celui de $\bar{P}$.

Partons maintenant des égalités

$$(7)\qquad e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, t^n,$$

$$(8)\qquad e^{\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, t^{-n}.$$

En dérivant l'équation (8) par rapport à t et en la multipliant ensuite par $-t$, il vient

$$\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)e^{\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(x)\,t^{-n}. \tag{9}$$

Multipliant les équations (7) et (9), membre par membre on obtient l'égalité suivante

$$\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(x) J_{n+r}(x)\right)t^{r}. \tag{10}$$

Si l'on compare les coefficients figurant devant t^k dans la relation (10), on trouve

$$P=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(x) J_{n+k}(x)=0. \tag{11}$$

Des relations (6) et (11) il suit

$$\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^{n+1} n J_n(x) J_{k-n}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+k) J_n(x) J_{n+k}(x)=0. \tag{12}$$

Montrons enfin que la formule (12) est équivalente à celle de *Stojanović* (2).

Pour le démontrer, il suffit de vérifier l'égalité suivante

$$\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^{n+1} n J_n(x) J_{k-n}(x)=\sum_{n=1}^{\frac{k-1}{2}}(-1)^{n}(k-2n) J_n(x) J_{k-n}(x). \tag{13}$$

L'expression figurant au second membre de (13) peut être transformée comme suit

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\frac{k-1}{2}}(-1)^{n}(k-2n) J_n(x) J_{k-n}(x) &= \sum_{n=1}^{\frac{k-1}{2}}(-1)^{k-n}[k-2(k-n)] J_{k-n}(x) J_n(x)\\
&= \sum_{n=\frac{k+1}{2}}^{k-1}(-1)^{n}(k-2n) J_n(x) J_{k-n}(x)\\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\frac{k-1}{2}}(-1)^{n}(k-2n) J_n(x) J_{k-n}(x)+\sum_{n=\frac{k+1}{2}}^{k-1}(-1)^{n}(k-2n) J_n(x) J_{k-n}(x)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^{n}(k-2n) J_n(x) J_{k-n}(x)\\
&= \frac{k}{2}\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^{n} J_n(x) J_{k-n}(x)+\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^{n+1} n J_n(x) J_{k-n}(x).\end{aligned} \tag{14}$$

D'après (14), l'égalité (13) se réduit à

$$\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^{n} J_n(x) J_{k-n}(x)=0. \tag{15}$$

Pour démontrer la relation (15) nous partons de la série suivante

$$\bar{Q} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, J_{n+k}(x). \tag{16}$$

A l'expression (16) on peut donner la forme que voici:

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= Q + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)\, J_{n+k}(x) = Q + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x)\, J_{k-n}(x)\\ &= Q + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\, J_{n-k}(x)\\ &= Q + (-1)^k \sum_{n=1}^{k-1} J_n(x)\, J_{n-k}(x) + (-1)^k \sum_{n=k}^{\infty} J_n(x)\, J_{n-k}(x)\\ &= Q + \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n J_n(x)\, J_{k-n}(x) - Q = \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n J_n(x)\, J_{k-n}(x).\end{aligned}$$

Il en résulte que la relation (15) prend la forme

$$\bar{Q} = 0. \tag{17}$$

Pour vérifier la dernière relation, multiplions les égalités (7) et (8) membre par membre.

Il vient alors

$$1 = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, J_{n+r}(x) \right) t^r. \tag{18}$$

Si l'on compare les coefficients de t^k, on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, J_{n+k}(x) = 0,$$

ce qui est bien la relation (17).

La démonstration de la formule de *Stojanović* (2) est donc terminée.

Rezime

O JEDNOJ FORMULI KOJA SE ODNOSI NA BESSEL-OVE FUNKCIJE

Dragomir Đoković

U ovom članku sumiran je red (1) za neparno $k\,(>1)$. Suma S toga reda je vezana relacijom (6) sa izrazom $\bar{P}$ koji je definisan sa (5). Iz razvoja (7) i (9), množenjem, dobijamo jednakost (10) iz koje izlazi $\bar{P} = 0$. Na osnovu toga i relacije (6) dolazi se do sumacione formule (12).

Zatim je pokazano da je ta formula ekvivalentna *Stojanovićevoj* formuli (2).