PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 51 (1961)

IZRAČUNAVANJE SUME NEKIH BESKONAČNIH REDOVA OBRAZOVANIH OD PROIZVODA BESELOVIH FUNKCIJA

I. S. Stojanović

(Primljeno 28 jula 1960)

SADRŽAJ. Tretirajući jedan problem iz oblasti telekomunikacija pronađen je pogodan obrazac za izračunavanje sume beskonačnih redova obrazovanih od proizvoda Beselovih funkcija čiji je oblik $\sum_{n=0}^{\infty}(k+2n)J_n(z)J_{n+k}(z)$, gde je k neparno.

SOMMAIRE. Dans le traitement d'un problème de télécommunication on a réussi à trouver une formule qui facilite le calcul de la somme de certains séries infinies formées des produits de fonctions de Bessel de type $\sum_{n=0}^{\infty}(k+2n)J_n(z)J_{n+k}(z)$, où k désigne un nombre impair.

Rešavajući jedan problem iz oblasti telekomunikacija došlo se do matematičkog izraza koji omogućava izračunavanje sume jednog beskonačnog reda obrazovanog od proizvoda Beselovih funkcija.

Zaključak o tačnosti ovakvog obrasca izveden je na osnovu poznatih fizičkih zakona i uslova koji obezbeđuju njihovu važnost i koji su, gledano sa fizičkog aspekta, potpuno generalni. S druge strane, izvršena je provera dobijenog obrasca razvijanjem u red po stepenima pri čemu je metoda identifikacije koeficijenata uz argumenat na određenom stepenu potvrdila važnost ovoga izraza, strogo uzevši do onog člana do koga je i vršena kontrola. Rigurozni matematički dokaz o ispravnosti izvedenog izraza nismo mogli izvesti s obzirom na glomaznost članova koji su dobijeni putem kojim se u ovom dokazu pošlo.

U pomenutoj analizi posmatrano je izobličenje frekventno modulisanog signala prilikom njegovog prenosa preko jednog četvoropola koji ne unosi nikakva izobličenja na amplitudu prenošenog signala, a čija je fazna karakteristika ma kakva funkcija učestanosti. Na taj način uzeta su u obzir samo fazna izobličenja.

Frekventno modulisani signal na ulazu u četvoropol je dat izrazom:

$$u = U\sin(\Omega_0 t + m\sin\omega t) \tag{1}$$

gde su:

U — amplituda signala,

$\frac{\Omega_0}{2\pi}$ — noseća učestanost,

$\frac{\omega}{2\pi}$ — modulišuća učestanost,

m — indeks modulacije $\left(m = \frac{\Delta F}{f}\right)$,

ΔF — devijacija učestanosti.

Prema tome, signal koji se želi preneti, tj. modulišući signal ima oblik

$$w_p = U_p \cos \omega t. \tag{2}$$

Izraz (1) se može napisati u obliku reda sastavljenog od prostoperiodičnih funkcija

$$u = U J_0(m) \sin \Omega_0 t + U \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) [\sin (\Omega_0 + n\,\omega)\, t + (-1)^n \sin (\Omega_0 - n\,\omega)\, t]. \tag{3}$$

Pretpostavimo da je faza datog četvoropola ma kakva funkcija učestanosti

$$\varphi(\Omega) = \varphi_0 + \varphi_n,$$

gde je Ω trenutna kružna učestanost, a

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \text{const}, \\ \varphi_n &= \varphi(n\,\omega) \end{aligned} \tag{4}$$

pri čemu je n ceo pozitivan ili negativan broj, a pretstavlja rang određenog harmonika.

Kad se signal, dat izrazom (3), prenese posmatranim četvoropolom svaki prostoperiodični član će biti fazno pomeren za odgovarajuću fazu shodno zakonu (4), tako da će na izlazu četvoropola signal imati oblik

$$\begin{aligned} u_i = U J_0(m) \sin(\Omega_0 t - \varphi_0) + U \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \{\sin [(\Omega_0 t - \varphi_0) + (n\,\omega\, t - \varphi_n)] + \\ + (-1)^n \sin [(\Omega_0 t - \varphi_0) - (n\,\omega\, t + \varphi_{-n})]\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ako se izraz (5) razvije i napiše u podesnijoj formi i pronađe diskriminisani signal, što je detaljno izvedeno u radu: I. S. Stojanović, *Proračun nelinearnih izobličenja frekventno modulisanog signala u brzom režimu modulacije*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, serija: Telekomunikacije i elektronika, № 15 (1959), videće se da je prenošeni signal izobličen u odnosu na izraz (2), tj. sastavljen od beskonačno mnogo harmonika. Za amplitudu neparnih harmonika ranga k dobija se tada izraz

$$(6)\qquad \breve{U}_k = Df\left\{\sum_{n=1}^{n=\frac{k-1}{2}} (-1)^n (k-2n)\, J_n(m)\, J_{k-n}(m)\, (e^{j(\varphi-(k-n)}-\varphi_n) + \right.$$

$$\left. + e^{-j(\varphi_{k-n}-\varphi-n)}) + \sum_{n=0}^{\infty} (k+2n)\, J_n(m)\, J_{n+k}(m)\, (e^{j(\varphi-(n+k)}-\varphi-n) + e^{-j(\varphi_{n+k}-\varphi_n)})\right\}$$

gde je D konstanta diskriminacije.

Opšte važeći zakon je da neki prenosni sistem ne unosi fazna izobličenja ako je njegova fazna karakteristika linearna, tj. ako je fazna funkcija data izrazom

$$\varphi_n = \tau_0 n\, \omega,$$

gde je τ_0 konstanta proporcionalnosti.

Stavimo li ovaj uslov u izraz (6) dobijamo za k-ti harmonik prenošenog signala

$$(7)\qquad \breve{U}_k = 2Dfe^{-jk\tau_0\omega}\left[\sum_{n=1}^{n=\frac{k-1}{2}} (-1)^n (k-2n)\, J_n(m)\, J_{k-n}(m) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} (k+2n)\, J_n(m)\, J_{n+k}(m)\right].$$

Ako je $k=1$, tj. ako tražimo vrednost osnovnog harmonika prenošenog signala, dobijamo da je prvi član izraza (7) u zagradi ravan nuli, pa će biti

$$\breve{U}_1 = 2Dfe^{-j\tau_0\omega}\sum_{n=0}^{\infty} (1+2n)\, J_n(m)\, J_{n+1}(m).$$

Kako suma beskonačnog reda iznosi $\frac{1}{2}m$, dobijamo

$$\breve{U}_1 = 2Dfe^{-j\tau_0\omega}\cdot\frac{1}{2}m = D\Delta Fe^{-j\tau_0\omega},$$

odnosno prenošeni signal ima oblik

$$(8)\qquad u_1 = D\Delta F \cos\omega\,(t-\tau_o).$$

Ako uporedimo ovaj izraz sa izrazom (2), tj. sa signalom koji smo prenosili, vidimo da on nije izobličen i da pretstavlja poslati signal, samo je u vremenu zakasnio za veličinu τ_0, što je i logično. Prema tome, a na osnovu zakona da fazna izobličenja ne postoje kad faza linearno zavisi od učestanosti, svi ostali harmonici moraju biti ravni nuli, što znači da se može pisati da je

$$(9)\qquad \sum_{n=1}^{n=\frac{k-1}{2}} (-1)^n (k-2n)\, J_n(m)\, J_{k-n}(m) + \sum_{n=0}^{\infty} (k+2n)\, J_n(m)\, J_{n+k}(m) = 0$$

za svako neparno k koje je veće od 1.

Kao što se vidi, izraz (9) je sastavljen od dve sume: jedne beskonačne i druge konačne. Ovo daje mogućnost lakog izračunavanja sume tog beskonačnog reda što se je i htelo pokazati ovim radom.

Tako, na primer, za $k=3$ imaćemo da je na osnovu (9)

$$J_1(z) J_2(z) = 3 J_0(z) J_3(z) + 5 J_1(z) J_4(z) + 7 J_2(z) J_5(z) + \cdots \tag{10}$$

ako se umesto znaka m za argumenat upotrebi znak z.

Da bi se izvršila provera važnosti ove relacije možemo napisati izraz za Beselovu funkciju prve vrste n-tog reda u obliku

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(r+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}. \tag{11}$$

Na osnovu ovog obrasca možemo izračunati koeficijent uz argumenat z na m-tom stepenu, a za oblike proizvoda koji se javljaju u relaciji (10), tj. za $J_1(z) J_2(z)$ i $J_n(z) J_{n+3}(z)$.

Jednostavnim postupkom dobija se

$$J_1(z) J_2(z) = \sum_m \left\{ \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{r=0}^{r=\frac{m-3}{2}} \frac{(-1)^{\frac{m-3}{2}}}{r!\left(\frac{m-3}{2}-r\right)!\left(\frac{m-1}{2}-r\right)!\,(r+2)!} \right\},$$

$$(m=3, 5, 7, \ldots) \text{ i} \tag{12}$$

$$J_n(z) J_{n+3}(z) = \sum_m \left\{ \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{r=0}^{r=\frac{m-(2n+3)}{2}} \frac{(-1)^{\frac{m-(2n+3)}{2}}}{r!\left(\frac{m-3}{2}-r\right)!\left(\frac{m-(2n+3)}{2}-r\right)!\,(r+n+3)!} \right\}$$

$$(m=2n+3,\ 2n+5\ \ 2n+7, \ldots).$$

Uvrštavajući odgovarajuće izraze iz obrazaca (12) u relaciju (10), može se izvršiti provera važnosti ove relacije metodom identifikacije koeficijenata uz z^m na njenoj levoj i desnoj strani.

Ovaku proveru smo izvršili za članove čiji su stepeni $m=3,5,7,9$ i dobili potvrdu njene važnosti za te slučajeve. Sem toga odmah se lako vidi da relacija (10) važi i za slučaj $z=0$.

U zaključku može se kazati, da na osnovu postupka kojim je obrazac (9) izveden, on u potpunosti važi, a delimična provera za specijalan slučaj kad je $k=3$ (relacija (10)) potvrđuje njegovu važnost u uslovima u kojima je kontrolisan. Ostaje da se nađe matematički dokaz za njegovo važenje.