PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE

№ 50 (1961)

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE CYCLIQUE*

Dragomir Đoković

(Reçu le 25 février 1961)

Considérons l'équation fonctionnelle cyclique

$$(1)\quad \begin{aligned} &f(x_1\circ x_2\circ\cdots\circ x_p,\ x_{p+1}\circ x_{p+2}\circ\cdots\circ x_{2p},\ x_{2p+1}\circ x_{2p+2}\circ\cdots\circ x_{4p})\\ &+f(x_2\circ x_3\circ\cdots\circ x_{p+1},\ x_{p+2}\circ x_{p+3}\circ\cdots\circ x_{2p+1},\ x_{2p+2}\circ x_{2p+3}\circ\cdots\circ x_1)+\cdots\\ &+f(x_{4p}\circ x_1\circ\cdots\circ x_{p-1},\ x_p\circ x_{p+1}\circ\cdots\circ x_{2p-1},\ x_{2p}\circ x_{2p+1}\circ\cdots\circ x_{4p-1})=0.\end{aligned}$$

On suppose que les variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots, x_{4p}$ appartiennent à un ensemble qui, par rapport à l'operation $\circ$, est un semi-groupe possédant l'élément neutre e. On suppose également que les valeurs de la fonction f appartiennent à un groupe additif abélien M. Relativement à ce groupe on ne suppose que l'équation $mX=A$ ($X, A\in M$; m nombre naturel quelconque) ait une solution unique $X=A/m$.

Proposition. — Sous les conditions mentionnées plus haut la solution générale de l'équation (1) est donnée par la formule

$$(2)\quad f(t_1, t_2, t_3)=\{F_1(t_1, t_2\circ t_3)-F_1(t_2, t_3\circ t_1)\}+\{F_2(t_1\circ t_2, t_3)-F_2(t_3, t_1\circ t_2)\},$$

où F_1 et F_2 sont deux fonctions arbitraires des arguments indiqués.

Démonstration. — Par le calcul direct on vérifie aisément que (2) est la solution de l'équation (1).

Supposons maintenant que f soit une solution quelconque de l'équation considerée et démontrons que f a la forme (2).

Si l'on pose

$$x_1=t_1,\ x_{p+1}=t_2,\ x_{2p+1}=t_3,\ x_i=e \text{ pour } i\neq 1, p+1, 2p+1\ (1\leqslant i\leqslant 4p)$$

* Dans cette Note on donne la démonstration d'un des résultats énoncés (sans démonstration) dans la Note:
D. S. Mitrinović — D. Đoković: *Sur une classe d'équations fonctionnelles cycliques* (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 252, 1961).

de l'équation (1) il suit

$$p\{f(t_1, t_2, t_3)+f(e, t_1, t_2\circ t_3)+f(t_3, e, t_1\circ t_2)+f(t_2, t_3, t_1)\}=0$$

ou bien

(3) $$f(t_1, t_2, t_3)+f(t_2, t_3, t_1)=-f(t_3, e, t_1\circ t_2)-f(e, t_1, t_2\circ t_3).$$

En y permutant les variables, on obtient les égalités suivantes:

(4) $$-f(t_2, t_3, t_1)-f(t_3, t_1, t_2)=f(t_1, e, t_2\circ t_3)+f(e, t_2, t_3\circ t_1)$$

(5) $$f(t_3, t_1, t_2)+f(t_1, t_2, t_3)=-f(t_2, e, t_3\circ t_1)-f(e, t_3, t_1\circ t_2).$$

Par addition des égalités (3), (4), (5), on a

(6) $$\begin{aligned}2f(t_1, t_2, t_3)=&\{f(t_1, e, t_2\circ t_3)-f(t_2, e, t_3\circ t_1)\}+\{f(e, t_2, t_3\circ t_1)\\&-f(e, t_1, t_2\circ t_3)\}-f(t_3, e, t_1\circ t_2)-f(e, t_3, t_1\circ t_2).\end{aligned}$$

En appliquant la formule (6), on obtient

$$\begin{aligned}2f(t_3, e, t_1\circ t_2)=&\{f(t_3, e, t_1\circ t_2)-f(e, e, t_1\circ t_2\circ t_3)\}+\{f(e, e, t_1\circ t_2\circ t_3)\\&-f(e, t_3, t_1\circ t_2)\}-f(t_1\circ t_2, e, t_3)-f(e, t_1\circ t_2, t_3)\end{aligned}$$

ou bien

(7) $$-f(t_3, e, t_1\circ t_2)-f(e, t_3, t_1\circ t_2)=f(t_1\circ t_2, e, t_3)+f(e, t_1\circ t_2, t_3).$$

Si l'on utilise (6) et (7), on trouve

$$\begin{aligned}4f(t_1, t_2, t_3)=&2\{f(t_1, e, t_2\circ t_3)-f(t_2, e, t_3\circ t_1)\}+2\{f(e, t_2, t_3\circ t_1)-f(e, t_1, t_2\circ t_3)\}\\&+\{f(t_1\circ t_2, e, t_3)-f(t_3, e, t_1\circ t_2)\}+\{f(e, t_1\circ t_2, t_3)-f(e, t_3, t_1\circ t_2)\}.\end{aligned}$$

Par suite, la fonction $f(t_1, t_2, t_3)$ a précisément la forme (2), ce qui fallait démontrer.

Rezime

O JEDNOJ CIKLIČNOJ FUNKCIONALNOJ JEDNAČINI

Dragomir Đoković

U ovom radu dokazuje se jedan od rezultata navedenih bez dokaza u članku

D. S. Mitrinović — D. Đoković: *Sur une classe d'équations fonctionnelles cycliques* (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris t. 252, 1961).

Tehnički urednik i korektor Dragan Aleksić

Slagač Nikola Kušić

Tiraž: 600 primeraka

Štampanje završeno marta 1961 godine u Beogradskom grafičkom zavodu Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17