PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 49 (1961)

DINAMIČKI KRITERIJUMI ZA PRAVOLINISKO I RAVNO KRETANJE TAČKE

Borislav Lilić

(Primljeno 20 oktobra 1960)

1. Pristup. — U prirodnom određivanju kretanja tačke potrebna su i dovoljna dva podatka:

1° linija trajektorije i

2° jednačina kretanja (zakon puta) tačke po toj liniji, kao funkcija njenog krivoliniskog otstojanja (apc·se) s od vremena t,

$$s = f(t). \tag{1}$$

Prvi podatak o trajektoriskoj liniji jeste čisto geometriskog karaktera. Drugi podatak o jednačini kretanja, u kojoj pored geometriske veličine dužine interveniše i kinematička veličina vreme, ima tek pravi kinematički karakter.

Saobrazno takvoj prirodnoj dvojnosti podataka za određivanje kretanja tačke, u Kinematici se usvajaju i dva osnovna klasifikaciona principa po kojima se vrši razvrstavanje raznih kretanja tačke. Tako, sa gledišta trajektoriskel inije kretanja se razlikuju prema njenom geometriskom obliku (opštije — kao pravolinisko, ravno i prostorno kretanje; posebnije — kao kružno, eliptično, helikoidalno itd. kretanje). Sa gledišta jednačine kretanja, pak, kretanja se razlikuju prema analitičkom obliku funkcije $f(t)$ (kao jednoliko, promenljivo, jednako promenljivo, ubrzano, usporeno, harmonisko, amortizovano harmonisko itd. kretanje).

Zbog toga, kada je, napose, reč o pravoliniskom ili o ravnom kretanju tačke, onda se ona imaju tako razumeti da su samo delimično određena propisima o oblicima njihovih trajektoriskih linija, dočim je način kretanja po tim linijama zbog moguće proizvoljnosti jednačine kretanja (1) ostao ipak posve neodređen. Štaviše, ako je kod pravoliniskih kretanja oblik trajektoreje još potpuno određen, kod ravnih kretanja je i taj oblik tek delimično određen propisom da trajektorija mora ležati u izvesnoj ravni, no inače na njoj može imati proizvoljan oblik.

U vezi sa takvim neodređenostima kod pravoliniskih i ravnih kretanja tačke u Dinamici su onda i moguća postavljanja i rešavanja za njih oba osnovna problema: i direktnog (kada je zadata sila, pa se traži kretanje) i indirektnog (kada je zadato kretanje, pa se traži sila).

Sa druge strane, međutim, očevidno je da baš zbog izvesne, ma i delimične geometriske određenosti pravoliniskih i ravnih kretanja tačke ni zakoni o silama koje proizvode takva kretanja ne mogu biti potpuno proizvoljni, već moraju biti potčinjeni izvesnim određenim uslovima. Ustanovljenje tih uslova, kako se bar na prvi pogled čini, zbog bitno geometriskog karaktera pitanja ne bi trebalo da pričinjava kakve izuzetne teškoće.

U ponekim savremenim kursevima iz Mehanike za te uslove se doista i pružaju izvesne formulacije, gde sa više gde sa manje brižljivosti. No, mora se konstatovati da je to pitanje, i pored katkad upornijih nastojanja, dosada ostalo nerešeno u svojoj celokupnosti. Postojeće formulacije takvih uslova odnose se ustvari na izvesne posebne zakone o silama, te stoga nose u sebi nedostatke koje im osporavaju opšte važenje. Da bi se bliže uvidelo o kakvim se nedostacima radi, dovoljno će biti zbog njihove jednoobraznosti da se ograniči na kritičkom razmatranju formulacija iz poznatog dela od Apela [1].

U ranijem izdanju toga dela (izdanje drugo, 1902; str. 319—320) učinjen je pokušaj da se formulišu opšti uslovi prvo za ravno a onda za pravolinisko kretanje tačke. Evo tih uslova sa njihovim vrlo kratkim dokazima.

R a v n o k r e t a n j e. — Kada se pokretna materijalna tačka nalazi pod dejstvom sile $\vec{F}$ stalno paralelne sa jednom nepomičnom ravni π i kada je njena početna brzina $\vec{v}_0$ paralelna sa tom ravni, trajektorija će ležati u ravni povučenoj kroz $\vec{v}_0$ paralelno sa π.

Po Apelu, takva teorema o uslovima za ravno kretanje tačke može se smatrati kao očevidna iz razloga simetrije, pošto nema razloga da tačka napusti rečenu ravan sa jedne ili sa druge strane. No, može se takođe ona izvesti iz jednačina kretanja. Radi toga, pretpostavimo da je sila $\vec{F}(X, Y, Z)$ paralelna sa koordinatnom ravni Oxy, a da je pokretna tačka stavljena u položaj $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i bačena paralelno sa ravni Oxy. Tada će se imati $Z=0$, pa će diferencijalna jednačina za koordinatnu osu Oz dati

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=0, \qquad \frac{dz}{dt}=z_0',$$

označivši sa z_0' projekciju početne brzine $\vec{v}_0$ na osu Oz. Ali, po pretpostavci, ta je projekcija nula; stoga će dalje biti

$$\frac{dz}{dt}=0, \qquad z=z_0,$$

što je i trebalo dokazati.

P r a v o l i n i s k o k r e t a n j e. — Ako je sila $\vec{F}$ koja dejstvuje na pokretnu materijalnu tačku stalno paralelna sa jednom osom i ako je početna brzina $\vec{v}_0$ paralelna sa tom osom, tačka će opisivati pravu koja čini nosač početne brzine $\vec{v}_0$.

Po Apelu, ta teorema o uslovima za pravolinisko kretanje rezultuje iz prethodne, pošto se trajektorija mora nalaziti u svakoj ravni povučenoj kroz početnu brzinu $\vec{v}_0$ paralelno sa osom. No, ona se može dokazati, kao i prethodna, pretpostavljajući da je sila $\vec{F}$ paralelna sa koordinatnom osom Ox. Tada će se imati

$$\frac{d^2y}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

odakle je

$$\frac{dy}{dt}=y_0'=0, \qquad \frac{dz}{dt}=z_0'=0,$$

nazvavši y_0' i z_0' projekcije početne brzine $\vec{v}_0$ na ose Oy i Oz, projekcije koje su nule po pretpostavci. Stoga će dalje biti

$$y_0=0, \qquad z_0=0.$$

— Razmotrimo sada kritički prednje formulacije opštih uslova za ravno i pravolinisko kretanje tačke, koje po svojoj jasnoći i preciznosti dolaze svakako među najbolje u mehaničkoj literaturi.

Iz samih formulacija uslova a još više iz njihovih dokaza uviđa se da se oni odnose na veoma uske zakone o silama. Tako, kod uslova za ravno kretanje najopštiji zakon o sili koji bi još mogao doći u obzir bio bi pretstavljen poljem sile, u kome bi sile ležale u paralelnim ravnima. Kod uslova za pravolinisko kretanje, opet, dozvoljeni najopštiji zakon o sili činilo bi polje sile sa silama konstantnog pravca. Zato, ako bi se posmatralo već neko polje sile koje bi otstupalo od takvih najopštijih polja pretpostavljenih u formulisanim uslovima, trebalo bi smatrati da u njemu ne bi bilo ostvarljivo pravolinisko odnosno ravno kretanje. Međutim, može se odmah pokazati da tako ne stoje stvari. Uzmimo baš vrlo jednostavan primer polja centralne sile. U tom polju niti sile leže u paralelnim ravnima niti su konstantnog pravca. No, zna se da se u polju centralne sile u najopštijem slučaju ostvaruju ravna kretanja a u posebnom slučaju i pravoliniska, nasuprot formulisanim uslovima. U Apelovom delu se stoga mogućnost ravnog i pravoliniskog kretanja tačke u polju centralne sile dokazuje ne preko formulisanih uslova nego na sasvim nezavisan način od njih. Kada se, usto, uzme na um da sila u opštem slučaju može da zavisi ne samo od položaja tačke nego i od njene brzine i vremena, daje se zaključiti koliko uslovi u prednjim formulacijama imaju neopšti karakter. Isto kao i za centralna kretanja u Apelovom delu se, recimo, morao pružiti i poseban dokaz za ravno kretanje teškog tela u otpornoj sredini, gde pored sile konstantnog pravca učestvuje i sila sa pravcem brzine tela ([1]; izdanje drugo, str. 352).

Na taj način, u rezimeu kritičke analize napred formulisanih uslova za ravno i pravolinisko kretanje tačke moglo bi se reći:

Zbog uskosti zakona o silama na koje se odnose, ti uslovi su samo dovoljni a još ne i potrebni.

Takvi su, svakako, morali biti razlozi koji su prinudili autora nevedenog dela da u narednim izdanjima potpuno izostavi formulisane „opšte“ uslove za ravno i pravolinisko kretanje tačke. Zapravo, kod pravoliniskog kretanja tačke autor se u narednim izdanjima zadovoljio nabrajanjem nekoliko slučajeva zakona o silama kada se ostvaruje takvo kretanje: sila konstantnog pravca, centralna sila, pridodavanje otpora sredine i prinudno pravolinisko kretanje. ([1]; izdanje šesto, 1941; str. 347—349). Pritom, valja obratiti pažnju da se za slučaj zakona o sili konstantnog pravca daje istovetni dokaz kao i malo pre citirani dokaz za „opšti“ slučaj pravoliniskog kretanja iz ranijeg izdanja, što samo potvrđuje prednji zaključak kritičke analize. Za ravno kretanje čak je izostavljeno i takvo navođenje na posebnom mestu odnosnih zakona o silama koje bi ga proizvodile.

— Kada u sadašnjoj mehaničkoj literaturi tako stoje stvari u pogledu opštih uslova za pravolinisko i ravno kretanje tačke, umesno je postaviti pitanje:

Da li je uopšte moguće ustanoviti takve uslove?

Ova rasprava uzima upravo na sebe zadatak da na to pitanje pruži potvrdan odgovor.

Pri tome će se najpre razmatrati pravolinisko kretanje kao prostije a potom ravno kretanje.

— Radi kratkoće izražavanja u daljem izlaganju uvešće se saobrazno matematičkoj terminologiji ovaj naziv:

Opšti uslovi koje je potrebno i dovoljno da zadovoljava zakon o sili u zajednici sa početnim kinematičkim stanjem pokretne materijalne tačke (to jest u zajednici sa njenim početnim položajem i njenom početnom brzinom), da bi se ostvarilo njeno pravolinisko odnosno ravno kretanje, podrazumevaće se pod nazivom dinamički kriterijum za pravolinisko odnosno ravno kretanje tačke.

Taj naziv je baš i stavljen u naslov rasprave.

I. PRAVOLINISKO KRETANJE

2. Opšti dinamički kriterijum. — Za pravolinisko kretanje materijalne tačke daje se ustanoviti, nasuprot onom citiranom u prethodnom članu za specijalan slučaj zakona o sili, ovakav

Opšti kriterijum. *Da bi se tačka kretala pravoliniski, potrebno je i dovoljno da sila što dejstvuje na nju bude kolinearna sa njenom brzinom za sve vreme njenog kretanja. Ako bi brzina tačke u nekom trenutku bila nula, bilo bi potrebno i dovoljno da sila u tome trenutku bude kolinearna sa brzinom u jednom od prethodnih trenutaka, a napose sa početnom brzinom. Ako bi, pak, i početna brzina bila jednaka nuli, onda bi bilo potrebno i dovoljno da sila u trenutku kada je brzina nula bude kolinearna sa silom u početnom trenutku.*

Dokaz. Tako formulisan kriterijum mogao bi se dokazati polazeći od dinamičkih diferencijalnih jednačina kretanja. Dokaz se, međutim, znatno skraćuje, ako se iskoristi jedna poznata teorema Diferencijalne geometrije o osobini prave linije, budući da su neposredna dinamička računanja već sadržana pri izvođenju same teoreme. Ta teorema glasi [2]:

Da bi jedna linija bila prava, potrebno je i dovoljno da u svakoj njenoj tački fleksija (prva krivina) bude jednaka nuli.

U želji da se koristi vektorski račun kao kraći, uzeće se odredba kretanja pomoću vektora položaja $\vec{r}$ u funkciji od vremena t,

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{2}$$

pa će se vektorski izvodi te funkcije označiti tačkama iznad slova bez vektorske strelice. Tada je fleksija izražena vektorskom formulom

$$k = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3},$$

koja, naravno, vredi pod pretpostavkom da je prvi izvod $\dot{r}$ vektora položaja, to jest brzina $\vec{v}$ pokretne tačke različita od nule.

U smislu navedene teoreme i prema toj formuli, da bi fleksija bila nula u svakom trenutku odnosno u svakom položaju pokretne tačke, potrebno je i dovoljno da bude ispunjen uslov

$$\dot{r} \times \ddot{r} = 0.$$

Pomnoživši tu jednačinu sa masom m materijalne tačke i vezavši je kao faktor uz drugi izvod $\ddot{r}$, koji pretstavlja ubrzanje $\vec{w}$ tačke, taj uslov postaje

$$\vec{v} \times m\,\vec{w} = 0.$$

No, kako proizvod $m\,\vec{w}$ izražava silu $\vec{F}$ što dejstvuje na tačku, dolazi se najzad do uslova

$$\vec{v} \times \vec{F} = 0,$$

koji kazuje da je potrebno i dovoljno da sila $\vec{F}$ bude kolinearna sa brzinom $\vec{v}$ u svakom trenutku posmatranog vremenskog intervala kretanja tačke. A to je trebalo dokazati u prvom delu kriterijuma sa pretpostavkom da je brzina različita od nule za sve vreme kretanja tačke.

Ako, pak, u nekom trenutku brzina $\vec{v}$ pokretne tačke postane jednaka nuli, onda formula (2) za fleksiju k gubi aritmetički smisao, pa ni rasuđivanja na osnovu nje ne dolaze više u obzir. U tome slučaju valja pribeći direktnom dinamičkom rasuđivanju, koje se već znatno uprošćava. Doista, iz položaja sa brzinom nula tačka će se dalje kretati u pravcu sile. Da bi, stoga, tačka ostala na istoj pravoj trajektoriskoj liniji, potrebno je i dovoljno, očevidno, da pravac sile u položaju tačke sa brzinom nula pada u pravac brzine u bilo kom ranijem položaju tačke, a posebno brzine u njenom početnom položaju. Time je dokazan drugi deo kriterijuma.

Najzad, u slučaju da je **i** sama početna brzina $\vec{v}_0$ tačke jednaka nuli, pravac kretanja tačke iz početnog položaja a sa njime i pravac pravoliniske trajektorije će odrediti opet sila u tom položaju. Zbog toga, da bi tačka iz nekog svog potonjeg položaja sa brzinom nula nastavila kretanje po istoj trajektoriskoj pravoj, potrebno je i dovoljno da sila u tome položaju ima pravac sile u početnom položaju, kako se tvrdi u trećem delu kriterijuma.

A sa ovim trećim njegovim delom kriterijum je ujedno dokazan i u celosti.

— Dodajmo, radi potpunosti, da je krajnje poseban slučaj, kada bi sila u početnom trenutku zajedno sa brzinom tačke bila jednaka nuli, izostao iz kriterijuma, budući da bi tada tačka, očevidno, mirovala sve vreme u početnom položaju.

Drugi dokaz. Prvi glavni deo kriterijuma može se takođe dosta brzo dokazati polazeći od posebnih diferencijalnih jednačina kretanja tačke u prirodnom trijedru osa:

$$m\frac{dv}{dt}=F_t, \qquad m\frac{v^2}{\rho}=F_n, \qquad 0=F_b,$$

gde ρ znači poluprečnik fleksije trajektoriske linije.

Uslov je potreban. Zaista pretpostavljajući da je trajektorija prava linija, njena fleksija $\frac{1}{\rho}$ je u svakom položaju pokretne tačke na njoj jednaka nuli, te je i projekcija F_n napadne sile na pravac glavne normale jednaka nuli. Na taj način, napadna sila se svodi u svim položajima pokretne tačke samo na svoju tangencijalnu komponentu $\vec{F}_t$. A to zapravo znači da napadna sila $\vec{F}$ za sve vreme kretanja tačke po pravoliniskoj trajektoriji mora ostati tangentna na takvu trajektoriju, odnosno kolinearna sa brzinom $\vec{v}$ tačke.

Uslov je dovoljan. Obratno, ako je sila $\vec{F}$ stalno kolinearna sa brzinom $\vec{v}$ tačke, odnosno tangentna na trajektoriju, imaće se

$$F_n=m\frac{v^2}{\rho}=0.$$

Kako, pak, po pretpostavci brzina v nije nula, to fleksija $\frac{1}{\rho}$ trajektoriske linije u svakoj njenoj tački mora ostati jednaka nuli. A kao što se zna iz Diferencijalne geometrije, jedina linija koja uživa to svojstvo, da joj je fleksija jednaka nuli u svim njenim tačkama, jeste zapravo prava linija.

3. Primene. — 1° Sila zavisi samo od položaja tačke. — Za takav zakon o sili kada, drugim rečima, postoji stacionirano polje sile daje se iz napred ustanovljenog opšteg kriterijuma izvesti dosta jednostavno ova

Teorema 1. — *Ako se u jednom zadatom polju sile može naći prava za čije sve tačke sile imaju njen pravac i ako se materijalna tačka iz bilo koga položaja na toj pravoj u polju pokrene takođe u njenom pravcu ili pusti bez brzine, onda će tačka vršiti kretanje po toj pravoj.*

Dokaz. Upotrebićemo indirektan dokaz kao celishodniji. Radi toga, pođimo od pretpostavke da će pokretna tačka, započevši kretanje saobrazno svome početnom kinematičkom stanju po posmatranoj pravoj, napustiti to kretanje po njoj u jednom izvesnom trenutku, odnosno na jednom izvesnom mestu, pa potražimo takvo mesto. Međutim, da bi tačka u svome kretanju skrenula sa pravoliniske trajektorije, potrebno je i dovoljno, na osnovu opšteg dinamičkog kriterijuma, da na takvom mestu sila ima različit pravac od posmatrane prave. Po uslovu teoreme, pak, to zapravo nije slučaj ni na jednom mestu posmatrane prave. Prema tome, pokretna tačka će doista morati da ostane na posmatranoj pravoj za sve vreme kretanje.

Primeri. — 1) *Polje sile konstantnog pravca.* — U ovakvom polju sve prave paralelne konstantnom pravcu sila ispunavaju uslov iz teoreme 1. Prema tome, da bi se ostvarilo pravolinisko kretanje u takvom polju, potrebno je i dovoljno da se tačka iz ma koga položaja baci sa brzinom u pravcu sile ili da se naprosto prepusti samoj sebi.

2) *Polje centralne sile.* — U ovom polju, pak, sve prave što prolaze kroz centar sile zadovoljavaju uslov iz teoreme 1. Prema tome, tu će pravolinisko kretanje moći biti ostvareno svagda kada se tačka iz ma koga položaja baci u pravcu prave kroz centar sile ili se naprosto prepusti samoj sebi.

2° Sila zavisi od brzine tačke. — Sila zavisna od brzine javlja se najčešće kao otpor pri kretanju tačke kroz kakvu fluidnu sredinu, pri čemu se, takođe najčešće, usvaja da je otpor upravljen u suprotnom smeru brzine. Za takvu silu stalno kolinearnu sa brzinom tačke daje se onda o njenom pravoliniskom kretanju neposredno izvesti ova

Teorema 2. *Ako se materijalna tačka pod dejstvom jednog sistema sila već kreće po izvesnoj pravoj, ona će se kretati takođe po istoj pravoj i kada se sistemu sila pridruži još sila koja ima stalno pravac brzine kretanja tačke.*

Zaista, kad se pod dejstvom jednog sistema sila tačka kreće pravoliniski, onda njihova rezultanta, prema opštem kriterijumu, mora biti svagda kolinearna sa brzinom; a ta kolinearnost između rezultante i brzine ostaje na snazi i kada se prvašnjem sistemu sila pridoda nova sila sa pravcem brzine, pa se uslovi za kretanje tačke po istoj pravoliniskoj trajektoriji nalaze i dalje ispunjeni.

— Tako, naprimer, u polju sile konstantnoga pravca ili u polju centralne sile tačka će se kretati pravolinisku i kroz otpornu sredinu, ako su usto ispunjeni uslovi o početnoj brzini iz primera 1) i 2) prethodne tačke 1°.

3° Sila zavisi od položaja tačke i vremena. — Takav zakon o sili određuje izvesno nestacionirano polje sile. Zadržimo ovde pažnju na jednom posebnijem slučaju nastacionarnog polja sile, kad se sa vremenom menjaju samo intenziteti sila a ne i njini pravci. Tada, iz opšteg kriterijuma proizilazi bez daljih rasuđivanja ova

Teorema 3. — *Ako u nekom stacionarnom polju sile postoji mogućnost da se ostvari pravolinisko kretanje tačke, onda će biti ostvarljivo i kretanje po istoj trajektoriskoj pravoj u nestacionarnom polju sile nastalom iz stacionarnog tako što se u ovom menjaju sa vremenom samo intenziteti sila a ne i njini pravci.*

Jer, opšti kriterijum vodi računa samo o pravcima sila a ne i o njinim intenzitetima.

— Naprimer, u nestacionarnom polju sile konstantnoga pravca i u nestacionarnom polju centralne sile mogu se pod istim uslovima za početne brzine ostvariti kretanja po istim trajektoriskim pravama kao u odgovarajućim stacionarnim poljima sile iz tačke 1° ovoga člana, primeri 1) i 2).

4° Prinudno pravolinisko kretanje. — U takvom kretanju se pored direktno napadnih sila javlja i reakcija prave. Ali, prema opštem kriterijumu rezultanta svih tih sila, direktno napadnih i reakcije, mora biti stalno upravljena po pravoj po kojoj se tačka prinudno kreće.

II. RAVNO KRETANJE

4. Opšti dinamički kriterijum. — Analogno opštem kriterijumu za pravolinisko kretanje materijalne tačke, i za ravno kretanje njeno daje se ustanoviti ovakav

Opšti kriterijum. *Da bi tačka vršila ravno kretanje, potrebno je i dovoljno da se sila što dejstvuje na nju i njena brzina za sve vreme njenog kretanja nalaze u ravni paralelnoj nepomičnoj ravni π, koja je određena silom i brzinom u početnom trenutku. U slučaju da je početna brzina jednaka nuli nepomičnu ravan π određuju pravci sila u početnom položaju i njemu beskonačno bliskom položaju pokretne tačke.*

Dokaz. I ovde se dokaz znatno uprošćava, ako se pozove na jednu drugu poznatu teoremu Diferencijalne geometrije, koja utvrđuje opštu osobinu ravnih linija. Ta teorema glasi [3]:

Da bi jedna linija bila ravna, potrebno je i dovoljno da u svakoj njenoj tački torzija (druga krivina) bude jednaka nuli.

Zadržavajući oznake iz člana 3, označimo još sa s luk trajektoriske krive počev od izvesne tačke na njoj u smeru njene orijentacije. Tada se trozija trajektoriske krive može izrazit, između drugih, i ovakvom formulom

$$\tau = \frac{d}{ds} \frac{\dot{r} \times \ddot{r}}{|\dot{r} \times \ddot{r}|}, \tag{3}$$

koja, naravno, vredi pod pretpostavkom da prvi izvod $\dot{r}$ i drugi izvod $\ddot{r}$, to jest brzina $\vec{v}$ i ubrzanje $\vec{w}$ tačke, nisu jednaki nuli i da nisu kolinearni.

U smislu pozajmljene teoreme i prema toj formuli, da bi torzija trajektoriske krive bila nula u svakom trenutku odnosno u svakom položaju pokretne tačke, potrebno je i dovoljno da bude ispunjen uslov

$$\frac{\dot{r} \times \ddot{r}}{|\dot{r} \times \ddot{r}|} = \vec{b}$$

odnosno

$$\frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \vec{b},$$

označivši sa $\vec{b}$ jedan konstantan vektor, koji zapravo pretstavlja ort binormale.

Pomnoživši u razlomku na levoj strani brojitelj i imenitelj sa masom m materijalne tačke, taj uslov analognim rasuđivanjem kao u članu 2 postaje

$$\frac{\vec{v}\times\vec{F}}{|\vec{v}\times\vec{F}|}=\vec{b}. \tag{4}$$

Takav uslov kazuje ustvari da je za ravnu trajektorisku liniju potrebno i dovoljno da za sve vreme kretanja tačke pravci brzine i sile grade ravan čija normala ima konstantan pravac; ovaj pravac, pak, određen je onda zbog svoje konstantnosti kao pravac normale na ravan kroz brzinu i silu u jednom trenutku kretanja kada su oni poznati, recimo na ravan u početnom trenutku, ravan nazvanu sa π u kriterijumu. U toj ravni se onda očigledno i vrši čitavo kretanje tačke.

Kako je malo pre napomenuto, formula (3) za torziju gubi smisao u svakom trenutku u kome je ili brzina jednaka nuli, ili je ubrzanje odnosno sila jednaka nuli, ili su brzina i sila kolinearni. No, sva ta tri posebna slučaja jesu sa dinamičkog stanovišta već toliko uprošćena, da se može preći na direktno dinamičko rasuđivanje. U prvom posebnom slučaju, kada je brzina tačke u nekom trenutku odnosno u nekom njenom položaju nula, pravac njenog daljeg kretanja određuje pravac sile u tome položaju; budući da je ovaj pravac paralelan ravni π, kako to propisuje prvi deo kriterijuma, tačka će iz svog položaja sa brzinom nula nastaviti kretanje ostajući i dalje u istoj ravni π. U drugom posebnom slučaju, kada je sila jednaka nuli, da bi bilo daljeg kretanja tačke, potrebno je i dovoljno da bar njena brzina bude različita od nule; a pošto ta brzina zbog ranijeg kretanja tačke u ravni π mora takođe ležati u toj ravni, tačka će nastaviti da se kreće po inerciji u pravcu te brzine ostajući i dalje u istoj ravni. U trećem slučaju, kada su brzina i sila kolinearne, tačka će se kretati takođe pravoliniski u pravcu brzine, koja saobrazno ranijem kretanju tačke već leži u ravni π. Na taj način, vidi se da su sva ova tri posebna slučaja obuhvaćena već opštim uslovom iz prvog dela kriterijuma o paralelnosti brzine i sile sa ravni π za sve vreme kretanja tačke, te stoga nisu izričito ni iskazani u kriterijumu.

Završivši time sa dokazom prvog dela kriterijuma, za drugi deo kriterijuma treba dokazati još da će ravan π u slučaju da je početna brzina nula biti određena pravcima sila u početnom položaju i u beskonačno bliskom položaju pokretne tačke. Zaista, pravac kretanja tačke iz njenog početnog položaja M_0 u trenutku t_0 biće tada opet određen pravcem sile $\vec{F_0}$ u tome položaju. U trenutku $t_1=t_0+dt$, posle proteklog elementarnog (beskonačno kratkog) vremenskog intervala, tačka će na tome pravcu doći u položaj M_1; pritom, ona je prešla elementaran put $\overrightarrow{M_0M_1}=\frac{1}{2}\frac{\vec{F_0}}{m}dt^2$ (sa tačnošću do beskonačno malih drugoga reda) i zadobila brzinu $\vec{v_1}=\frac{\vec{F_0}}{m}dt$ (sa tačnošću do beskonačno malih prvoga reda). U položaju M_1 na tačku će dejstvovati sila $\vec{F_1}$ uopšte različitog pravca od pravca sile $\vec{F}_0$. Prema uslovu (4) morala bi se onda u položaju M_1 imati jednačina

$$\frac{\vec{v}_1 \times \vec{F}_1}{|\vec{v}_1 \times \vec{F}_1|} = \frac{\vec{F}_0 \times \vec{F}_1}{|\vec{F}_0 \times \vec{F}_1|} = \vec{b},$$

jednačina koja konstantnom ortom $\vec{b}$ binormale upravo određuje traženu ravan π kretanja tačke kada je njena početna brzina nula.

Dodajmo, radi potpunosti, još objašnjenje kako bi se odredila ravan kretanja π u posebnom slučaju da, pored početne brzine jednake nuli, sila $\vec{F}_1$ bude kolinearna sa silom $\vec{F}_0$. Ako bi se, naime, javio takav slučaj, pa čak posebnije da sila i u daljem kretanju bude kolinearna sa silom $\vec{F}_0$, tačka bi se prema kriterijumu iz člana 2 kretala pravoliniski sve do trenutka kada bi sila napustila takvu kolinearnost. Za taj trenutak bi se onda mogao primeniti isti zaključak, koji je malo pre izveden za trenutak t_1.

5. Primene. — 1° Sila zavisi od položaja tačke. — Slično kao kod pravoliniskog kretanja, i ovde se za slučaj da postoji stacionarno polje sile iz opšteg kriterijuma za ravno kretanje tačke daje brzo ustanoviti ovakva

Teorema 1. *Ako se u jednom zadatom polju sile može naći ravan za čije sve tačke pravci sila leže u njoj i ako se materijalna tačka iz bilo koga položaja na istoj ravni pokrene takođe u pravcu po njoj ili pusti bez brzine, onda će tačka vršiti kretanje sa trajektorijom u toj ravni.*

Dokaz. Analogno onome kod pravoliniskog kretanja, upotrebićemo i ovde indirektan dokaz kao celishodniji. Radi toga, pođimo opet od pretpostavke da će pokretna tačka, započevši kretanje saobrazno svome početnom kinematičkom stanju po posmatranoj ravni, napustiti to kretanje po njoj u jednom izvesnom trenutku odnosno na jednom izvesnom mestu, pa potražimo takvo mesto. Međutim, da bi tačka u svome kretanju izišla iz posmatrane ravni, potrebno je i dovoljno, na osnovu opšteg dinamičkog kriterijumu za ravno kretanje, da na takvom mestu sila ne leži u posmatranoj ravni. Po uslovu teoreme, pak, to zapravo nije slučaj ni na jednom mestu posmatrane ravni. Prema tome, pokretna tačka će doista morati ostati na posmatranoj ravni za sve vreme kretanja.

Primeri. — 1) *Polje sile konstantnog pravca.* — Svaka ravan u takvom polju paralelna sa konstantnim pravcem sila ispunjava uslov iz teoreme 1. Prema tome, ma iz koga položaja u polju da se baci sa ma kakvom brzinom (izuzev, razume se, sa brzinom u pravcu sile ili jednakom nuli, kada bi se imalo pravolinisko kretanje, prema članu 2, tačka 1°, primer 1), tačka će se kretati u ravni koja prolazi kroz početnu brzinu paralelno konstantnom pravcu sila.

2) *Polje centralne sile.* — Svaka ravan u takvom polju koja prolazi kroz centar sile zadovoljava uslov iz teoreme 1. Prema tome, ma iz koga položaja u polju da se baci sa ma kakvom brzinom (izuzev, razume se, sa brzinom u pravcu kroz centar sile ili jednakom nuli, kada bi se imalo pravolinisko kretanje, prema članu 2, tačka 1°, primer 2), tačka će se kretati u ravni određenoj početnom brzinom i centrom sile.

2° Sila zavisi od brzine tačke. — Ograničavajući se i ovde na otpor fluidne sredine koji je kolinearan sa brzinom tačke, o ravnom kretanju tačke daje se iz kriterijuma neposredno izvesti ova

Teorema 2. *Ako se materijalna tačka pod dejstvom jednog sistema sila već kreće po izvesnoj ravni, ona će se kretati takođe po istoj ravni i kada se sistemu sila pridruži još sila koja je stalno kolinearna sa brzinom tačke.*

Zaista, paralelnost između ravni kroz rezultantu i brzinu tačke i ravni π ostaće na snazi i kada se prvašnjem sistemu sila pridoda sila kolinearna sa brzinom.

— Naprimer, u polju sile konstantnog pravca ili u polju centralne sile tačka će vršiti ravno kretanje i kroz otpornu sredinu, ako su usto ispunjeni uslovi o početnoj brzini iz primera 1) i 2) prethodne tačke 1°.

3° Sila zavisi od položaja tačke i vremena. — Zadržavajući i ovde pažnju na posebnijem slučaju takvog nestacionarnog polja sile kada sa vremenom variraju samo intenziti sila a ne i njini pravci, iz kriterijuma bez daljeg rezultuje ova

Teorema 3. *Ako u nekom stacionarnom polju sile postoji mogućnost da se ostvari kretanje tačke po izvesnoj ravni, onda će biti ostvarljivo i kretanje po istoj ravni u nestacionarnom polju sile nastalom iz stacionarnog tako što se u ovom menjaju sa vremenom samo intenziteti sila a ne i njini pravci.*

Jer, kriterijum vodi računa samo o pravcima sila a ne i o njinim intenzitetima.

— Naprimer, u nestacionarnom polju sile konstantnoga pravca i u nestacionarnom polju centralne sile mogu se pod istim uslovima za početne brzine ostvariti kretanja po istim ravnima kao i u odgovarajućim stacionarnim poljima sile iz tačke 1° ovoga člana, primeri 1) i 2).

4° Prinudno ravno kretanje. — U takvom kretanju rezultanta svih sila što dejstvuje na tačku, i direktno napadnih i reakcije ravni, mora ležati stalno u ravni po kojoj se tačka prinudno kreće.

6. Zaključna primedba. — Iz prednjih razmatranja i rezultata uviđa se da se ustanovljavanjem opštih dinamičkih kriterijuma za pravolinisko i ravno kretanje tačke postižu dve osnovne koristi.

Sa jedne strane, u sadašnjoj mehaničkoj literaturi za pojedine zakone o sili izvode se različiti dokazi o ostvarljivosti pravoliniskog i ravnog kretanja tačke, pozivajući se pritom na više teorema između kojih se ne zapaža neka bliska srodnost. Opšti dinamički kriterijumi, pak, omogućavaju da se sva dokazna rasuđivanja postave na jednu zajedničku idejnu osnovu i u jedan zajednički idejni okvir, čime se postiže njihova daleko veća jednostavnost i preglednost.

Sa druge strane, dok dosadašnja izvođenja dokaza za ostvarljivost pravoliniskih i ravnih kretanja tačke po pojedinim zakonima o sili ispadaju katkad i nešto duža, dotle opšti dinamički kriterijumi dopuštaju takođe da se sva ona svedu i na minimalnu meru.

R é s u m é

CRITÈRES DYNAMIQUES DU MOUVEMENT RECTILIGNE ET DU MOUVEMENT PLAN D'UN POINT

Borislav Lilić

On entend par cette dénomination les conditions générales qu'il est nécessaire et suffisant pour que la loi de la force, ensemble avec l'état cinématique initial d'un point matériel, satisfasse afin que se produise le mouvement rectiligne, ou bien le mouvement dont la trajectoire se trouve dans un plan, de ce point.

Dans la littérature actuelle de Mécanique ces conditions sont formulées pour certaines lois spéciales de forces et pour cette raison elles doivent être qualifiées comme étant seulement suffisantes et point du tout nécessaires en général. Dans la présente étude on a établi les critères dynamiques généraux et l'on a montré leur application conforme au but.

1. Mouvement rectiligne. — Pour le mouvement rectiligne on a établi le critère ci-dessous.

C r i t è r e. *Pour que le point exécute un mouvement rectiligne il est nécessaire et suffisant que la force qui le sollicite soit collinéaire avec sa vitesse pendant toute la durée de son mouvement. Si la vitesse était nulle à un moment donné, il serait nécessaire et suffisant que la force fût au ce moment collinéaire avec la vitesse à un moment précédent et tout particulièrement à la vitesse initiale. Si, pourtant, la vitesse initiale était égale à zéro, il serait nécessaire et suffisant qu'au moment où la vitesse est égale à zéro, la force fût collinéaire avec la force au moment initial.*

La démonstration de ce critère est fondée sur le théorème connu de la Géométrie différentielle: Pour qu'une ligne soit droite il est nécessaire et suffisant que la flexion en tout point de cette ligne soit égale à zéro.

En appliquant ce critère à certaines lois particulières de la force, on déduit quelques théorèmes importants.

1° Pour le cas où la force dépend da la position du point, — en d'autres termes où il existe un champ de force stationnaire, on aura le

T h é o r è m e 1. *Si l'on peut trouver, dans un champ de force donné, une droite dont tous les points seraient sollicités par des forces suivant la direction de cette droite et que l'on lance le point matériel de n'importe quelle position sur cette ligne située dans le champ, également dans la direction de la droite ou bien si on l'abandonne sans vitesse, le point exécutera alors le mouvement sur cette droite.*

En vertu de ce théorème on conclut directement que le mouvement rectiligne sera réalisable dans les deux exemples suivants du champ de force:

1) dans un champ de force à direction constante sur n'importe quelle droite parallèle à cete direction;

2) dans le champ de force centrale sur n'importe quelle droite qui passe par le centre de force.

2° Pour le cas où la force dépend de la vitesse du point et plus particulièrement quand elle se manifeste comme résistance du milieu fluide, collinéaire avec la vitesse, on aura le

Théorème 2. *Si un point matériel est déjà en mouvement sur une droite, sous l'action d'un système de forces, il se mouvra aussi sur la même droite même lorsqu'une force ayant constamment la direction de la vitesse du mouvement du point vient se joindre au système de forces.*

Par exemple, dans le champ de force à direction constante ou bien dans le champ de force centrale le point exécutera le mouvement rectiligne même dans un milieu résistant, de la même façon que dans les exemples 1) et 2) de l'alinéa 1°.

3° Au le cas où la force dépend de la position du point et du temps — en d'autres termes quand il existe un champ de force nonstationnaire, et plus particuliérement lorsque les intensités seules des forces sont variables dans le temps et non leurs directions, il résulte de ce critére le

Théorème 3. *Si dans un champ de force stationnaire il y a possibilité de réaliser le mouvement rectiligne du point, sera également réalisable, dans ce cas, le mouvement sur la même trajectoire droite dans le champ de force nonstationnaire, résultant du champ stationnaire, de façon que dans celui-ci ne sont variables dans le temps que les intensités des forces et non leurs directions.*

Par exemple, dans un champ de force nonstationnaire à direction constante ainsi que dans le champ nonstationnaire de force centrale on peut réaliser les mouvements sur les mêmes trajectoires de la même façon que dans les champs stationnaires correspondants de l'exemple 1) et 2) de l'alinéa 1°.

4° Dans le cas du mouvement d'un point assujetti à décrire une droite, la résultante des forces directement appliquées et de la réaction doit être constamment dirigée selon la même droite.

2. Mouvement plan. — Dans ce cas-là est valable le critère ci-dessous.

Critère. *Pour que le point exécute le mouvement dont la trajectoire est située dans un plan, il est nécessaire et suffisant que la force qui exerce une action sur ce point et sa vitesse se trouvent, pendant toute la durée de son mouvement, dans un plan parallèle au plan immobile π, déterminé par la force et la vitesse dans la position initiale du point. Pour le cas où la vitesse initiale est égale à zéro, le plan immobile π est déterminé par les directions respectives des forces dans la position initiale du point mobile et dans la position infiniment proche.*

La démonstration de ce critère est déduite d'un autre théorème de la Géométrie différentielle: Pour qu'une ligne soit située dans un plan, il est nécessaire et suffisant que la torsion en chacun de ses points soit égale à zéro.

L'application de ce critère aux lois particulières des forces, traitées dans le cas du mouvement rectiligne, donnerait des théorèmes complètement analogues pour le mouvement plan. Il suffit donc de retenir l'attention sur le cas spécial du champ de force stationnaire. Pour ce champ-là on déduit le

Théorème 1. *Si l'on peut trouver, dans un champ de force donné, un plan tel qu'en tous ses points les forces seraient situées dans ce plan et si l'on lance le point matériel de n'importe quelle position située dans le même plan,* *dans une direction également située dans ce plan, ou si on l'abandonne sans vitesse, le point exécutera alors un mouvement suivant une trajectoire dans ce plan.*

C'est ainsi que se réalise le mouvement plan dans les deux exemples susmentionnés de champ de force:

1) dans le champ de force de direction constante dans le plan qui passe par la vitesse initiale parallèlement à la direction constante de la force;

2) dans le champ de force centrale dans le plan déterminé par la vitesse initiale et le centre de force.

En conclusion, on peut observer que l'établissement des critères dynamiques généraux pour le mouvement rectiligne et le mouvement plan d'un point offre un double avantage. En effet, ces critères permettent, d'une part, de réunir sur une base d'idées commune tous les raisonnements démonstratifs pour les lois particulières de force, ce qui contribue à rendre ces raisonnements beaucoup plus clairs; d'autre part, les critères en question permettent de réduire ces raisonnements au minimum.

LITERATURA

[1] Paul Appell — *Traité de Mécanique rationnelle* — Paris, Gauthier-Villars; t. I.

[2] В. И. Смирнов — *Курс высшей математики* — Москва, Гос. изд. техн.-теор. лит.; том II, издање дванаесто; стр. 361.

[3] Direktan i elegantan dokaz te teoreme može se naći, recimo, u kursu: Paul Appell — *Éléments d'Analyse mathématique* — Paris, Gauthier-Villars; izdanje treće, 1913; str. 330—331.