PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 48 (1960)

O JEDNOJ KLASI LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA DRUGOG REDA

Dragomir Đoković

(Primljeno 5 novembra 1960)

1º Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$y'' + (ax^2 + bx + c)\, y' + [B - (n-1)\, ax]\, y = 0, \tag{1}$$

gde su $a\,(\neq 0), b, c, B$ konstante i $n = 1,2,3, \ldots$ Ako ovu jednačinu diferenciramo n puta i stavimo

$$y^{(n)} = z, \tag{2}$$

dobijamo jednačinu

$$z'' + (ax^2 + bx + c)\, z' + [\,(n+1)\, ax + B + nb]\, z = 0 \quad (n = 1,2,3, \ldots) \tag{3}$$

koja je sličnog tipa.

Na osnovu relacije (2) možemo tvrditi da ako jednačinu (1) znamo rešiti pomoću kvadratura i specijalnih funkcija, onda je i jednačina (3) integrabilna u navedenom smislu.

Ovaj postupak pridruživanja jednačine (3) jednačini (1) publikovao je prof. *D.S. Mitrinović*.[1] U toj belešci on primećuje da je u *Kamke*-ovoj *Zbirci*[2] navedena samo jedna jednačina tipa (1), čiji je jedan partikularni integral poznat. To je jednačina

$$y'' - x^2 y' + xy = 0 \quad (y_1 = x). \tag{4}$$

Prof. *Mitrinović* je formirao još jednu takvu jednačinu

$$y'' + ax^2 y' - axy = 0 \quad (y_1 = x) \tag{5}$$

koja se može dobiti iz jednačine (4) smenom $x = -\sqrt[3]{a}\,t$.

U *Murphy*-evoj knjizi[3] nalazi se još jedna jednačina tipa (1)

$$y'' + x^2 y' - 4xy = 0 \quad (y_1 = x + x^4/4). \tag{6}$$

---

[1] *Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije*, XI, Beograd, 1959. str. 213—214.

[2] E. Kamke: *Differentialgleichungen — Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, Leipzig, 1959, D. Gl. 2.56.

[3] G. M. Murphy: *Ordinary differential equations and their solutions*, New York, 1960. p. 324, eq. 130.

Prof. *Mitrinović* na kraju pomenute beleške ističe da je od interesa obrazovati jednačine tipa (1) koje imaju poznat partikularni integral.

2^0 Sada ćemo pokazati da se jednačina (3) može integraliti ako je poznat jedan partikularni integral jednačine (1) i u slučaju kada je $n=-1,-2,-3,\ldots$ Ovo tvrđenje je ekvivalentno sledećem: Ako je poznat integral jednačine (3), tada se može integraliti i jednačina (1) pri čemu je $n=1,2,3,\ldots$

Da bismo ovo dokazali, posmatraćemo umesto jednačina (1) i (3) njihove konjugovane jednačine koje su sa našeg stanovišta integracije njima ekvivalentne. Te konjugovane jednačine glase respektivno

$$y''-\frac{d}{dx}[(ax^2+bx+c)y]+[B-(n-1)ax]y=0,$$

$$z''-\frac{d}{dx}[(ax^2+bx+c)z]+[(n+1)ax+B+nb]z=0.$$

Posle sređivanja dobija se

$$y''-(ax^2+bx+c)y'+[B-b-(n+1)ax]y=0, \tag{1'}$$

$$z''-(ax^2+bx+c)z'+[(n-1)ax+B+(n-1)b]z=0. \tag{3'}$$

Diferencirajući jednačinu (3′) n puta po x i stavljajući

$$z^{(n)}=y, \tag{2'}$$

dobijamo jednačinu (1′). Prema tome, ako znamo partikularni integral jednačine (3), možemo naći i integral njene konjugovane jednačine (3′). Zatim koristeći relaciju (2′), nalazimo integral jednačine (1′) i na kraju integral njoj konjugovane jednačine (1).

Time je naše tvrđenje dokazano.

Ako je $n=0$ jednačine (1) i (3) su istovetne i navedeni postupak ne daje ništa novo.

3^0 Vidimo da navedene jednačine (4), (5) i (6) tipa (1) imaju uvek po jedan polinomski partikularni integral. Sada ćemo navesti jedan opšti postupak pomoću koga se mogu formirati sve jednačine tipa (1) koje imaju jedan polinomski partikularni integral.

Označimo sa F sledeći linearni diferencijalni operator

$$F=\frac{d^2}{dx^2}+(ax^2+bx+c)\frac{d}{dx}+B-(n-1)ax \qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{7}$$

Jednačinu (1) možemo napisati u operatorskom obliku

$$Fy=0. \tag{8}$$

Funkcija Fx^k (k prirodan broj ili nula) je polinom. Koeficijent uz x^{k+1} u polikomu Fx^k je $(k-n+1)a$. Prema tome, polinom Fx^k za $k\neq n-1$ ima stepen $k+1$, a polinom Fx^{n-1} je stepena $\leqslant n-1$.

Na osnovu toga možemo tvrditi da ako jednačina (8) ima rešenje oblika

$$y=\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu x^\nu \qquad (\alpha_m \neq 0), \tag{9}$$

tada mora biti $m=n-1$. Zbilja, ako pretpostavimo suprotno, tj. da je $m \neq n-1$ i zamenimo (9) u (8) dobili bismo jednakost

$$\sum_{\nu=1}^{m}\alpha_\nu Fx^\nu = 0,$$

koja je nemoguća, jer je poslednji sabirak na njenoj levoj strani polinom stepena $m+1$, a ostali sabirci polinomi nižeg stepena.

Da bismo utvrdili kada jednačina (8) ima polinomsko rešenje (koje je obavezno stepena $n-1$) a kada ne, poći ćemo od izraza

$$F(x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}) = Fx^{n-1}+\alpha_{n-2}Fx^{n-2}. \tag{10}$$

S obzirom na ono što je rečeno o stepenima funkcija Fx^k, možemo tvrditi da postoji jedno jedino α_{n-2} takvo da izraz (10) bude polinom stepena $\leqslant n-2$. Pošto smo tako izabrali konstantu α_{n-2}, posmatraćemo izraz

$$F(x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}+\alpha_{n-3}x^{n-3}), \quad \text{tj.} \quad Fx^{n-1}+\alpha_{n-2}Fx^{n-2}+\alpha_{n-3}Fx^{n-3}. \tag{11}$$

Kostantu α_{n-3} možemo na jedan jedini način izabrati tako da izraz (11) bude polinom stepena $\leqslant n-3$.

Nastavljajući ovaj postupak, dolazimo do zaključka da postoji jedan jedini sistem konstanata $\alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ takvih da je

$$F(x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}+\alpha_{n-3}x^{n-3}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0) = K = \text{const}. \tag{12}$$

Upoređujući jednačine (8) i (12), vidimo da ako jednačina (8) ima polinomsko rešenje to može biti jedino polinom

$$x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}+\alpha_{n-3}x^{n-3}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0 \tag{13}$$

ili on pomnožen nekom konstantom što ćemo smatrati kao isto rešenje. Prema tome, jednačina (1), tj. (8), može imati najviše jedno polinomsko rešenje, naime polinom (13). Taj polinom će stvarno biti integral jednačine (1) tada i samo tada kada je $K=0$. Kako je K funkcija od a, b, c, B i n, možemo iskazati sledeći rezultat:

Da bi jednačina (1) imala polinomsko rešenje, potrebno je i dovoljno da bude ispunjen uslov

$$K(a,b,c,B,n)=0. \tag{14}$$

Navedeni postupak se koristi i za praktično određivanje oblika funkcije K. To ćemo ilustrovati kasnije za neke posebne vrednosti parametra n.

Jednačina (3) ne može uopšte imati polinomska rešenja. Zbilja ako u njenoj levoj strani zamenimo y sa nekim polinomom stepena m, dobićemo posle sređivanja polinom stepena $m+1$. Jednačina (1′) je istog tipa kao jednačina (3) pa ni ona ne može imati polinomska rešenja.

Primetimo da se jednačina (3′) dobija iz jednačine (1) zamenom nezavisno promenljive $x=-t-b/a$. Prema tome, ako jednačina (1) ima polinomsko rešenje, imaće ga i jednačina (3′) i obrnuto.

Na osnovu toga možemo reći da su dosada pomoću kvadratura rešene samo one jednačine tipa

$$y''+(ax^2+bx+c)\,y'+(Ax+B)\,y=0 \tag{15}$$

koje same ili njihove konjugovane jednačine imaju polinomsko rešenje.

Vršeći u jednačini (1) smenu $x=\alpha t+\beta$ ($\alpha, \beta=\text{const}$), dobijamo jednačinu

$$z''+\alpha\,[a\alpha^2 t^2+(2a\beta+b)\,\alpha t+a\beta^2+b\beta+c]\,z'+\alpha^2\,[B-(n-1)\,a\beta-(n-1)\,a\alpha t]\,z=0.$$

Iz toga izlazi da ako je zadovoljena jednačina (14) biće zadovoljena i jednačina

$$K\big(a\alpha^3, (2a\beta+b)\alpha^2, \ \alpha\,(a\beta^2+b\beta+c), \alpha^2 B-(n-1)\,a\alpha^2\beta, n\big)=0. \tag{16}$$

4⁰ Sada ćemo detaljnije analizirati slučajeve $n=1,2,3$. Neka je prvo $n=1$. Tada jednačina (1) ima oblik

$$y''+(ax^2+bx+c)\,y'+By=0.$$

Polinom nultog stepena (koji jedino dolazi u obzir), biće rešenje ove jednačine samo ako je $B=0$. Znači da je $K(a,b,c,B,1)=B$.
Uzmimo zatim $n=2$. Operator (7) tada ima oblik

$$F=\frac{d^2}{dx^2}+(ax^2+bx+c)\frac{d}{dx}+B-ax.$$

Saglasno opštem postupku nalazimo

$$Fx=(B+b)x+c, \ \ F1=-ax+B.$$

Kombinujući poslednje dve jednačine dobijamo

$$F(ax+b+B)=ac+B\,(b+B),$$

tj. $K(a,b,c,B,2)=ac+B\,(b+B)$. Ako c odredimo iz uslova $K=0$, imamo jednačinu

$$y''+\left[ax^2+bx-\frac{B\,(b+B)}{a}\right]y'+(B-ax)\,y=0$$

čije je jedno partikularno rešenje $y_1=ax+b+B$. Jednačina (5) je specijalni slučaj poslednje jednačine za $b=B=0$.

Na kraju neka je $n=3$. Tada operator (7) ima oblik

$$F=\frac{d^2}{dx^2}+(ax^2+bx+c)\,\frac{d}{dx}+B-2ax.$$

Pomoću njega nalazimo

$$
\begin{aligned}
F x^2 &= (B+b)\, x^2 + 2cx + 2,\\
F x &= -ax^2 + (B+2b)\, x + c, \qquad (17)\\
F\, 1 &= -2ax + B.
\end{aligned}
$$

Kombinujući prve dve od ovih jednačina dobijamo

$$F\,\{ax^2 + (B+2b)x\} = [\,(B+b)\,(B+2b) + 2ac]\,x + 2a + c\,(B+2b).$$

Kombinujući zatim ovu jednačinu sa trećom jednačinom iz skupa (17), dobijamo

$$
\begin{aligned}
F\,\{2a^2x^2 + 2a\,(B+2b)\,x + (B+b)\,(B+2b) + 2ac\}&\\
= B\,(B+b)\,(B+2b) + 4a^2 + 4ac\,(B+b)&,
\end{aligned}
$$

tj. $$K(a, b, c, B, 3) = B\,(B+b)\,(B+2b) + 4a^2 + 4ac\,(B+b).$$

Primetimo da mora biti $B+b \neq 0$, jer je u suprotnom $K = 4a^2 \neq 0$. Zato iz jednačine $K=0$ možemo odrediti konstantu c.

Tako dolazimo do rezultata:

Jednačina

$$y'' + \left\{ax^2 + bx - \frac{a}{B+b} - \frac{B\,(B+2b)}{4a}\right\} y' + (B - 2ax)\, y = 0$$

ima partikularni integral

$$y_1 = 2a^2x^2 + 2a\,(B+2b)\,x + (B+b)\,(B+2b) - \frac{2a^2}{B+b} - \frac{B\,(B+2b)}{2}.$$

5^0 Mnogi od dobijenih rezultata važe i za jednačinu

$$(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)\, y'' + (b_0x^2 + b_1x + b_2)\, y' + (c_0x + c_1)\, y = 0. \qquad (18)$$

Za specijalne vrednosti konstanti $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1$, ova jednačina ima partikularni integral oblika $\{P(x)\}^{\gamma}$, gde je $P(x)$ polinom i γ realna konstanta.

Na primer jednačina

$$x\,(x^2+1)\, y'' + \left(\frac{13}{5}\, x^2 + 1\right) y' - \frac{4}{5}\, xy = 0$$

ima za partikularno rešenje funkciju $y_1 = (x^2+1)^{1/5}$.

Jednačina

$$(x+1)\,(x^2-2)\, y'' + \left(\frac{13}{6}\, x^2 + \frac{2}{3}\, x - 3\right) y' - \frac{2}{3}\,(5x+2)\, y = 0$$

ima za partikularno rešenje $y_1 = (x^2-2)^{2/3}$.

Očigledno je da se mogu navesti i druge generalizacije koje bi se odnosile na jednačine tipa (18) samo višeg reda.

Résumé

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

D. Đoković

Comme réponse à un problème posé par *D.S. Mitrinović* (*Mathesis*, t. 69, 1960, p. 223-224: *Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de Serbie*, t. 11, 1959, p. 213-214), on indique que l'équation (3) s'intègre au moyen des quadratures pour $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, s'il en est ainsi de l'équation (1).

On forme la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) ait une solution particulière sous forme d'un polynôme.

On indique aussi une possibilité pour les généralisations du problème posé par *D. S. Mitrinović*.

Cette Note se rattache à une série de notes de *D. S. Mitrinović* publiées sous le titre: *Compléments au Traité de Kamke*. Voir: *Mathematical Reviews* à partir du volume 17 (1956).

Tehnički urednik i korektor
OLGA ALEKSIĆ

Slagač
MILORAD PETROVIĆ

Tiraž: 600 primeraka

Štampanje završeno decembra 1960 god. u Beogradskom grafičkom zavodu — Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17.