PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 46 (1960)

ÜBER EINE BEZIEHUNG ZWISCHEN DEN BESSELSCHEN FUNKTIONEN MIT DEN INDIZES 0 UND 1

Stanimir Fempl

(Eingegangen am 9 September 1960)

1. Man bezeichne — wie bekanntlich — mit

$$J_n(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+n}}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

die Besselsche Funktion mit dem index n. Für natürliche Werte n, speziel für $n=0$ und $n=1$ ist

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}\quad\text{und}\quad J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!\,(n+1)!}\,.$$

Durch Anwendung der Laplacetransformation, wenn die Originalfunktionen von der Gestalt $J_0(rt)\,J_0(st)$, $J_0(rt)\,J_1(rt)$ oder $J_1(rt)\,J_1(st)$ sind, bekommt man füt Bildfunktionen Ausdrücke in welchen vollständige elliptische Normalintegrale I und II Art erscheinen. Dagegen, wenn die Originalfunktion das Produkt $J_0(rt)\,J_1(st)$ darstellt, so ist die Bildfunktion ein vollständiges elliptisches Integral III Art [1]. Durch Einführung der Heumanschen Funktion [2]

$$\Lambda_0(k,\beta)\overset{def}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k'^2\sin\beta\cos\beta\,\Delta_1(\beta)}{k'^2\cos^2\beta+k^2\cos^2\psi}\,\frac{d\,\Psi}{\Delta(\psi)}\tag{1}$$

wo

$$k^2+k'^2=1,\ \Delta(\Theta)=\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta},\quad \Delta_1(\Theta)=\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta},$$

kann man das Resultat in der Form [1]

$$\int_0^{\infty}e^{-pt}J_0(rt)\,J_1(st)\,dt=\frac{1}{s}\left[1-\Lambda_0(k,\beta)\right]\tag{2}$$

schreiben. Dabei ist

$$\sin\beta=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{p^2+r^2+s^2}{A}\right)},\ k^2=\frac{(s^2-p^2-r^2+A)\,(r^2-p^2-s^2+A)}{(p^2+r^2-s^2+A)\,(p^2-r^2+s^2+A)},\tag{3}$$

$$A^2=(p^2+r^2+s^2)^2+4\,p^2s^2.$$

In dieser Abhandlung benutze ich die Eigenschaften der Heumanschen Funktion und auf Grund dessen komme ich zu einer interessanten Beziehung zwischen den Besselschen Funktionen

$$\text{(I)} \qquad \int_0^\infty te^{-pt}\,[\,sJ_0(rt)\,J_0(st) - rJ_1(rt)\,J_1(st)\,]\,\mathrm{d}t = p\int_0^\infty te^{-pt}\,J_0(rt)\,J_1(st)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Heuman zeigte [2]:

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial\Lambda_0}{\partial k} = \frac{2\,(E-K)\sin\beta\cos\beta}{k\pi\,\Delta_1(\beta)}, \qquad \frac{\partial\Lambda_0}{\partial\beta} = \frac{2\,(E-Kk'^2\sin^2\beta)}{\pi\,\Delta_1(\beta)}.$$

Dabei sind die Grössen K und E vollständige elliptische Integrale I und II Art in der Legendreschen Normalform. Da die Funktionen J_0 und J_1 stetig sind und ebenso die partiellen Ableitungen des Integranden in Beziehung auf p, r und s, so erhält man durch Differentiation von (2) nach p:

$$\text{(5)} \qquad \int_0^\infty te^{-pt}\,J_0(rt)\,J_1(st)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\frac{\partial\Lambda_0}{\partial p} = -\frac{1}{s}\left(\frac{\partial\Lambda_0}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial p} + \frac{\partial\Lambda_0}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial p}\right).$$

Durch Differentiation von (2) nach r ergiebt sich

$$\text{(6)} \qquad \int_0^\infty te^{-pt}\,J'_0(rt)\,J_1(st)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\frac{\partial\Lambda_0}{\partial r},$$

worin

$$J'_\nu(\lambda t) = \frac{\mathrm{d}\,J_\nu(\lambda t)}{\mathrm{d}\,(\lambda t)} \qquad (\nu = 0,\,1).$$

Weil aber unter Anwendung der bekannten Relation [3]

$$\text{(7)} \qquad \frac{1}{2}\left\{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right\} = J'_n(x)$$

und der Beziehung

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

fur $n=0$

$$J'_0(x) = -J_1(x)$$

folgt, so kann man die Gleichung (6) in folgender Gestalt schreiben

$$\text{(8)} \qquad \int_0^\infty te^{-pt}\,J_1(rt)\,J_1(st)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left(\frac{\partial\Lambda_0}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{\partial\Lambda_0}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial r}\right).$$

Schliesslich, wenn man nach s differentiert, so liefert die Gleichung (2)

$$\text{(9)} \qquad \int_0^\infty te^{-pt}\,J_0(rt)\,J'_1(st)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s^2}\,[1-\Lambda_0(k,\beta)] - \frac{1}{s}\frac{\partial\Lambda_0}{\partial s}.$$

Aus der bekannten Rekursionsformel [3] aber

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}\,J_n(x)$$

und der Gleichung (7) folgt

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x),$$

so dass man für $n = 1$

$$J'_1(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x)$$

erhält. Auf Grund dessen nimmt die linke Seite der Gleichung (9) die Form

$$\int_0^\infty t e^{-pt} J_0(rt) \left[J_0(st) - \frac{1}{st} J_1(st) \right] dt.$$

Zerlegt man dieses Integral, nimmt für das zweite Glied den aus (2) resultierenden Wert, so reduziert sich die Gleichung (9) auf

(10) $$\int_0^\infty t e^{-pt} J_0(rt) J_0(st)\, dt = -\frac{1}{s} \left(\frac{\partial \Lambda_0}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial s} + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} \right).$$

Die Grössen k und β sind homogene Funktionen vom Grade 0 in den veränderlichen p, r, s. Nach dem Eulerschen Satze wird hiemit

$$p \frac{\partial k}{\partial p} + r \frac{\partial k}{\partial r} + s \frac{\partial k}{\partial s} = 0.$$

Dasselbe gillt für die partiellen Ableitungen der Funktion β. Deshalb, wenn man die Gleichungen (5), (8) und (10) respektiv mit p, r und s multipliziert und addiert, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty t e^{-pt} \{ p J_0(rt) J_1(st) + r J_1(rt) J_1(st) - s J_0(rt) J_0(st) \}\, dt = 0,$$

woraus gleich die Gleichung (I) folgt, was zu beweisen war.

2. Von Bedeutung sind noch die Werte der Integralen

$$I_1 = \int_0^\infty t e^{-pt} J_0(rt) J_1(st)\, dt, \qquad I_2 = \int_0^\infty t e^{-pt} J_1(rt) J_1(st)\, dt,$$

$$I_3 = \int_0^\infty t e^{-pt} J_0(rt) J_0(st)\, dt$$

Auf Grund der Gleichungen (4) und (5) ergiebt sich für I_1:

(11) $$I_1 = \frac{2}{s \pi \Delta_1(\beta)} \left\{ (E - K) \left(\sin\beta \cos\beta \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial p} \right) + K \Delta^2_1(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial p} \right\},$$

während aus dem Werte für $\log k^2$ aus (3) nach einer kürzeren Rechnung

$$\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial p} = \frac{2p}{N} \{ [A^2 - p^4 + (r^2 - s^2)^2]\, p \frac{\partial A}{\partial p} - 2A [A^2 - p^4 - (r^2 - s^2)^2] \}$$

folgt. Dabei ist

(12) $$\mathrm{N} = 16 s^2 (2p^2 + r^2)(p^2 r^2 + p^2 s^2 + r^2 s^2).$$

Da noch

$$\text{(13)} \qquad \sin\beta\cos\beta = \frac{ps}{A}, \qquad \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{2p\,(p^2+r^2+3s^2)}{A}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial p} = \frac{s}{A^2}(p^2-r^2-s^2),$$

so ergiebt sich

$$\frac{1}{k}\sin\beta\cos\beta\frac{\partial k}{\partial p}+\frac{\partial\beta}{\partial p}$$

$$= -\frac{16\,p^2 s^3}{A^2 N}(3p^2r^4+4p^4s^2+4p^4r^2+9p^2r^2s^2+r^6+r^2s^4+2r^4s^2)+\frac{s}{A^2}(p^2-r^2-s^2).$$

Mit Rücksicht auf (12), wenn man die rationale Funktion

$$\text{(14)} \qquad R_1(p,r,s) = \frac{-p^2(3p^2r^4+4p^4s^2+4p^4r^2+9p^2r^2s^2+r^6+r^2s^4+2r^4s^2)}{(2p^2+r^2)(p^2r^2+p^2s^2+r^2s^2)}$$

einführt, bekommt man für I_1 den Wert

$$\text{(II)} \quad \int_0^\infty te^{-pt}J_0(rt)\,J_1(st)\,dt = \frac{2}{A^2\pi\,\Delta_1(\beta)}\{[p^2-r^2-s^2+R_1(p,r,s)]\,E-[(p^2-r^2-s^2)\,k'^2\sin^2\beta$$

$$+R_1(p,r,s)]\,K\}.$$

Auf Grund der Gleichungen (4) und (8) wird der Ausdruck für I_2 ähnlich dem in der Gleichung (11), nur werden statt $\frac{\partial k}{\partial p}$ und $\frac{\partial\beta}{\partial p}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial k}{\partial r}$ und $\frac{\partial\beta}{\partial r}$ erscheinen. Da noch

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{2r\,(p^2+r^2+s^2)}{A},$$

so kann man sich durch ein ähnliches Verfahren wie bei Ermittlung des Integrals I_1 leicht überzeigen dass sich

$$\frac{1}{k}\sin\beta\cos\beta\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{16\,p^3s^3r}{A^2N}(5p^2s^2+2p^4+s^4+r^2s^2)$$

und

$$\frac{\partial\beta}{\partial r} = \frac{2prs}{A^2}$$

ergiebt. Deshalb, mit Rücksicht auf (12), wenn man die rationale Funktion

$$\text{(15)} \qquad R_2(p,r,s) = \frac{p^2(5p^2s^2+2p^4+s^4+r^2s^2)}{(2p^2+r^2)(p^2r^2+p^2s^2+r^2s^2)}$$

einführt, bekommt man für I_2 den Wert

$$\text{(III)} \quad \int_0^\infty te^{-pt}J_1(rt)\,J_1(st)\,dt = \frac{2pr}{A^2\pi\Delta_1(\beta)}\{[2+R_2(p,r,s)]\,E-[2k'^2\sin^2\beta+R_2(p,r,s)]\,K\}.$$

Im Ausdrucke für das Integral I_3 werden sich die Ableitungen $\frac{\partial k}{\partial s}$, $\frac{\partial\beta}{\partial s}$ und

$$\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{2s\,(3p^2+r^2+s^2)}{A}$$

befinden. Da jetzt

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = -\frac{p}{A^2}(p^2 + r^2 - s^2)$$

und für $\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial s}$ bekommt man den Wert

$$\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial s} = \frac{16\,p^2 s}{AN}(3p^2r^4 + 4p^4s^2 + 2p^4r^2 + r^6 + 4p^2r^2s^2 + r^4s^2),$$

so ergiebt sich nach Einführung der rationalen Funktion

$$R_3(p, r, s) = \frac{p^2\,(3p^2r^4 + 4p^4s^2 + 2p^4r^2 + r^6 + 4p^2r^2s^2 + r^4s^2)}{(2p^2 + r^2)(p^2r^2 + p^2s^2 + r^2s^2)}$$

folgender Wert für I_3:

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^\infty t\,e^{-pt} J_0(rt)\,J_0(st)\,\mathrm{d}t = -\frac{2p}{A^2 s\pi\Delta_1(\beta)}\{[s^2 - p^2 - r^2 + R_3(p, r, s)]\,E - $$
$$- [(s^2 - p^2 - r^2)\,k'^2 \sin^2\beta + R_3(p, r, s)]\,K\}.$$

Am Ende, bemerken wir noch, dass durch Multiplikation der Gleichungen (II), (III) und (IV) resp. mit p, r und $-s$ und Addition, wieder die Gleichung (I) resultiert, was auch zu erwarten war.

LITERATUR

[1] F. P. Byrd — D. M. Friedman:
Handbook of Elliptic Integrals for engineers and physicists. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1954.

[2] C. Heuman:
Tables of complete Elliptic Integrals. Journal of Mathematics and Physics vol. 20 (1941), p. 127—206.

[3] Т. П. Толстов:
Ряды Фурье, Москва—Ленинград 1951.

Rezime

O JEDNOJ VEZI IZMEĐU BESSELOVIH FUNKCIJA INDEKSA 0 i 1

Stanimir Fempl

Neka su $J_0(x)$ i $J_1(x)$ Bessel-ove funkcije prve vrste sa indeksima 0 i 1. Poznato je da primena Laplace-ove transformacije na original oblika $J_0(rt)\,J_1(st)$ daje za sliku izraz u kome se pojavljuje potpuni eliptički integral treće vrste. Uvodeći Heuman-ovu funkciju (1) i koristeći njene osobine, pisac iz formule (2) izvodi vezu (I) između Bessel-ovih funkcija.

U radu se takođe izračunavaju vrednosti integrala (II), (III) i (IV).