PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 45 (1960)

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE TRANSLATION

Slaviša Prešić

(Reçu le 10 juillet 1960)

Dans cette Note, il s'agit de l'équation fonctionnelle suivante

$$f\{f(x, y), t\} = f(x, y+t) \tag{1}$$

dans le domaine des nombres complexes.

Soit Q l'ensemble de toutes les fonctions $f(x, y)$ telles que l'équation $f(x, y) = z$ admette, pour chaque x et z, une solution unique par rapport à y.

Nous allons démontrer la

Proposition I. *La solution générale de l'équation* (1) *dans l'ensemble* Q *est donnée au moyen de la formule*

$$f(x, y) = g^{-1}\{g(x) + y\}, \tag{2}$$

où $g(x)$ *désigne une fonction complexe qui possède une fonction inverse* $g^{-1}(x)$.

Démostration. Par la vérification directe on voit que $g^{-1}\{g(x)+y\} \in Q$ satisfait à l'équation (1).

Soit $z = f(x, y) \in Q$ une solution quelconque. D'après les hypothèses mentionnées, l'égalité $z = f(x, y)$ définit y comme fonction de x et de z. Posons $y = h(z, x)$ et formons l'équation qui est vérifiée par la fonction $h(z, x)$.

Grâce à l'équation (1), on a

$$f\{f(x, y), t\} = s, \qquad f(x, y+t) = s, \qquad f(x, y) = z.$$

On en tire

$$t = h(s, z), \qquad y + t = h(s, x), \qquad y = h(z, x),$$

d'où

$$h(z, x) = h(s, x) - h(s, z).$$

Si l'on pose $s = s_0$ (s_0 une valeur fixe), on a

$$h(z, x) = [-h(s_0, z)] - [-h(s_0, x)].$$

Il s'ensuit que

$$h(z, x) = y = g(z) - g(x),$$

en désignant par $g(x)$ une fonction arbitraire.

Par suite, si la fonction $z=f(x,y)\in Q$ est une solution de l'équation (1), elle vérifie aussi

$$g\{f(x,y)\}=g(x)+y,$$

d'où il découle

$$f(x,y)=g^{-1}\{g(x)+y\},$$

ce qu'il fallait démontrer.

La propostion indiquée peut être généralisée comme suit:

Proposition II. Soient S_1 et S_2 deux ensembles non vides. Supposons que l'ensemble S_2 par rapport à l'operation $*$ forme un groupe. Dans l'ensemble des fonctions $F(X,y)$ $(X\in S_1;\ y\in S_2;\ F(X,y)\in S_1)$ considérons un sous-ensemble Q des fonctions possédant la propriété que l'équation $F(X,y)=Z$ pour chaque $X,Z\in S_1$ ait une solution unique en $y\in S_2$.

Dans le sous-ensemble Q la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$F\{F(X,y),t\}=F(X,y*t) \tag{3}$$

est donnée par la formule

$$F(X,y)=G^{-1}\{G(X)*y\}, \tag{4}$$

où G (avec $X\in S_1;\ G(X)\in S_2$) désigne une fonction arbitraire ayant sa fonction inverse.

La démonstration de la proposition II est semblable à celle de la proposition I.

Monsieur le Professeur *J. Aczél* (à Debrecen) a bien voulu lire cette Note dans le manuscript et à cette occasion il m'a donné une suggéstion utile.

Rezime

O FUNKCIONALNOJ JEDNAČINI TRANSLACIJE

Slaviša Prešić

U ovom radu se proučava jednačina (1) na skupu kompleksnih brojeva. Nađeno je opšte rešenje (2) u skupu takvih funkcija $f(x,y)$ za koje jednačina $f(x,y)=z$ za svako x i z ima jedinstveno rešenje po y.

Teorema II uopštava teoremu I i glasi:

Neka su S_1 i S_2 bilo kakva dva neprazna skupa. Neka skup S_2 u odnosu na operaciju $*$ čini grupu.

U skupu funkcija $F(X,y)$ $(X\in S_1, y\in S_2, F(X,y)\in S_1)$ uočimo podskup Q takvih funkcija koje imaju osobinu da jednačina

$$F(X,y)=Z \text{ za sve } X,Z\in S_1$$

ima jedinstveno rešenje $y\in S_2$. U skupu Q opšte rešenje jednačine (3) je (4), gde je $G(X\in S_1, G(X)\in S_2)$ proizvoljna funkcija koja ima inverznu funkciju.