PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA – SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 42 (1960)

# PRILOZI PROUČAVANJU NEKIH PROBLEMA IZ TEORIJE REDOVA I JEDNOZNAČNIH ANALITIČKIH FUNKCIJA POMOĆU GEOMETRIJE LOBAČEVSKOG

*Lazar Karadžić*

## I. UVOD

**1.1**— Uočimo u ravni pravouglog koordinatnog sistema niz tačaka

$$\{M_n(S_n,a_n)\};\ S_n=\sum_1^n b_m;\ a_n,\ b_n>0.$$

Prema ovom nizu može se formirati red

$$\sum a_nb_n,$$

čiji članovi pretstavljaju niz površina pravougaonika $\{a_nb_n\}$. U drugom dijelu ovog rada je pokazato kako se prema nizu tačaka u ravni Lobačevskog može formirati odgovarajući red. Članovi ovako dobivenog reda biće oni četvorouglovi koji su ograničeni koaksialnim graničnim lukovima i njihovim osama ili su to u specijalnom slučaju sektori. Za ovako dobivene redove nađeni su geometriskim posmatranjem uslovi za njihovu konvergenciju. Ovi se uslovi mogu primjeniti na sve one date redove koji bi bili ekvikonvergentni sa na ovaj način dobivenim redovima. U nekim od ovih uslova uvlači se proizvoljan niz brojeva koji se može izabrati na proizvoljan način tako da bude zadovoljio određene uslove. Po ovoj metodi zgodno je geometriski posmatrati zbirljivost redova sa pozitivnim članovima po određenom postupku.

Članove jednog reda, kada su oni pozitivni, možemo smatrati kao granične lukove koji su raspoređeni između dveju paralela. Prema kondenzaciji ovih lukova u drugom dijelu ovog reda izvedeni su neki rezultati.

Primjedbe, koje su mi ukazali prof. Dr. D. Blanuša i prof. Dr. S. Bilinski prilikom interpretacije uslova konvergencije za redove sa pozitivnim članovima po metodi geometrije Lobačevskog na drugi način nego što je to u ovom radu prikazato, znatno su doprinele mojoj preorijentaciji. Ovom prilikom izražavam im duboku zahvalnost.

U III dijelu ovog rada prikazati su uslovi za uniformnu konvergenciju funkcionalnih redova. Ovi uslovi su analogni uslovima navedenim u II dijelu.

U IV dijelu ovog rada dolazi se na osnovu principa R. Newalinn-a a uz pomoć nekih obrazaca kojima je izražena biunivoka korespondencija između ravni Lobačevskog i ravni kompleksne promenljive do izvjesnih rezultata. Ti obrasci mogu se izvesti na sledeći način.

**1.2**— Uočimo u ravni Lobačevskog dvije tačke $M_1(u_1,v_1)$ i $M_2(u_2,v_2)$, čiji je položaj u odnosu na pravougli koordinatni sistem $Ouv$ određen pomoću prvih koordinata. Rastojanje $M_1M_2=r$ određuje se, kao što je poznato, obrascem

$$\operatorname{ch} r=\operatorname{ch}(u_2-u_1)\operatorname{ch} v_1 \operatorname{ch} v_2-\operatorname{sh} v_1 \operatorname{sh} v_2$$

Ovaj obrazac može se izraziti u obliku

$$\operatorname{ch} r=W_1W_2-U_1U_2-V_1V_2, \tag{I,1}$$

gde su $U_i$, $V_i$ i $W_i$ Weierstrass-ove koordinate:

$$U_i=\operatorname{sh} u_i \operatorname{ch} v_i,\ V_i=\operatorname{sh} v_i,\ W_i=\operatorname{ch} u_i \operatorname{ch} v_i\ \ (i=1,2).$$

Dakle, pomoću obrazaca (I,1) određuje se neeuklidsko rastojanje između dveju tačaka na dvokrilnom hiperboloidu

$$\left\{\begin{array}{l} W^2-U^2-V^2=1, \\ (U=\operatorname{sh} u \operatorname{ch} v,\ V=\operatorname{sh} v,\ W=\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v). \end{array}\right. \tag{I,2}$$

Poznate relacije:

$$W=\frac{R^2+|z|^2}{R^2-|z|^2},\ U=\frac{2Rx}{R^2-|z|^2},\ V=\frac{2Ry}{R^2-|z|^2}, \tag{I,3}$$

gde je $z$ kompleksan broj $z=x+yi$, određuju biunivoku korespondenciju između tačaka dvokrilnog hiperboloida (I,2) i ravni $z$.

Iz (I,2) i (I,3) sleduju ove relacije:

$$x=\frac{R\operatorname{sh}u\operatorname{ch}v}{1+\operatorname{ch}\rho},\ y=\frac{R\operatorname{sh} v}{1+\operatorname{ch}\rho}\quad (\operatorname{ch}\rho=\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v), \tag{I,4}$$

gde je $\rho$ otstojanje tačke $M(u,v)$ do početka $O$. Odavde je

$$x^2+y^2=R^2\operatorname{th}^2\frac{\rho}{2}. \tag{I,5}$$

Dakle, pomoću relacija (I,4) određena je biunivoka korespondencija između tačaka ravni Lobačevskog i tačaka u krugu (I,5) kad $\rho\to\infty$.

Ako se uzmu u obzir slijedeće relacije:

$$\left\{\begin{array}{l} W=\dfrac{|z|^2+1}{2x},\ U=\dfrac{|z|^2-1}{2x},\ V=\dfrac{y}{x}\ (x>0), \\[2ex] W=\dfrac{|z|^2+1}{2y},\ U=\dfrac{|z|^2-1}{2y},\ V=\dfrac{x}{y}\ (y>0), \end{array}\right. \tag{I,6}$$

$$z=x+yi,$$

i relacije (I,2), tada se dobivaju respektivno ovi rezultati:

$$
(\mathrm{I},7)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{e^u}{\operatorname{ch} v}, \; y=e^u \operatorname{th} v; \\[2ex] x=e^u \operatorname{th} v, \; y=\dfrac{e^u}{\operatorname{ch} v}. \end{cases}
$$

Dakle, pomoću relacije (I,7) uspostavljena je respektivno biunivoka korespondencija između tačaka ravni Lobačevskog i tačaka jedne od poluravnina $x>0$ ili $y>0$.

1.2.1— Od obrasca (I,1) prema relacijama (I,3) dobivaju se za granične lukove ovi obrasci:

$$
(\mathrm{I},8)\qquad \begin{cases} \operatorname{sh}\dfrac{r}{2}=\dfrac{R\,|z_2-z_1|}{\sqrt{(R^2-|z_1|^2)(R^2-|z_2|^2)}}, \\[2ex] \operatorname{th}\dfrac{r}{2}=\dfrac{R\,|z_2-z_1|}{|R^2=\bar{z}_1 z_2|}; \; |z_i|<R, \; i=1,2; \end{cases}
$$

a prema relacijama (6) dobivaju se za granične lukove respektivno ovi obrasci:

$$
(\mathrm{I},9)\qquad \begin{cases} \operatorname{sh}\dfrac{r}{2}=\dfrac{|z_2-z_1|}{2\sqrt{x_1 x_2}}, \quad \operatorname{th}\dfrac{r}{2}=\dfrac{|z_2-z_1|}{|\bar{z}_1+z_2|} \quad (x_i>0, \; i=1,2), \\[2ex] \operatorname{sh}\dfrac{r}{2}=\dfrac{|z_2-z_1|}{2\sqrt{y_1 y_2}}, \quad \operatorname{th}\dfrac{r}{2}=\dfrac{|z_2-z_1|}{|z_2-\bar{z}_1|} \quad (y_i>0, \; i=1,2), \\[2ex] \qquad (z_m=x_m+y_m i, \; m=1,2). \end{cases}
$$

1.2.2.— Slijedeće relacije:

$$
(\mathrm{I},10)\qquad U=\frac{1+zw}{z-w}, \; V=i\,\frac{1-zw}{z-w}, \; W=\frac{z+w}{z-w},
$$

pokazuju da je tačka $(U, V, W)$ na dvokrilnom hiperboloidu (I,2) određena parom kompleksnih brojeva $z$ i $w$. Prema tome između tačaka ravni Lobačevskog i tačaka dveju kompleksnih ravni $z$ i $w$ može se uspostaviti biunivoka korespondencija.

Iz (I,10) sleduju ove relacije:

$$
\xi=\frac{U}{W+1}, \; \zeta=\frac{V}{W+1} \quad (|w|<1, \; w=\xi+\zeta i),
$$

$$
x=\frac{U}{W-1}, \; y=\frac{V}{W-1} \quad (|z|>1, \; z=x+yi).
$$

Dakle, može se smatrati da su tačke $z$ i $w$ u relacijama (I,10) simetrične u odnosu na krug $|z|=1$.

Od obrasca (I,1) prema (I,10) dobiva se za granični luk ovaj obrazac

$$\operatorname{sh}^2 \frac{r}{2} = \frac{(z_1 - z)(w - w_1)}{(z_1 - w_1)(z - w)} \quad (|z_1 w_1| = 1),$$

ili ovaj

$$\operatorname{th}^2 \frac{r}{2} = \frac{(z - z_1)(w - w_1)}{(z - w_1)(z - w)} = (|z_1 w_1 z w), \quad (|z_1 w_1| = 1).$$

Odavde proizlazi supstitucija ovog oblika

$$W = \frac{az - z_0}{z_0 z + b}$$

$$\left((a = k^2 |z_1| - |z_1|^{-1},\ z_0 = (k^2 - 1)e^{\alpha i},\ b = |z_1| - k^2 |z_1|^{-1},\ k = \operatorname{th} \frac{r}{2}\right).$$

Fiksne tačke ove supstitucije su simetrične u odnosu na krug $|z| = 1$. Ova supstitucija za $a = 1$ i $b = -1$, tj. supstitucija

$$W = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1},$$

je hiperbolična involucija za $|z_0| < 1$ i ona čini invarijantni krug $|z| = 1$. Ako se u ovoj supstituciji stavi $\frac{z}{R}$ i $\frac{z_0}{R}$ mjesto $z$ i $z_0$, dobiće se tada supstitucija

$$W = \frac{R(z - z_0)}{\bar{z}_0 z - R^2} \quad (|z| < R), \tag{I,11}$$

koja preslikava krug $|z| = R$ na $|w| = 1$. Odavde se prema (I,8) ima

$$\operatorname{th} \frac{r}{2} = \frac{R|z - z_0|}{|R^2 - \bar{z}_0 z|} \quad (|z|, |z_0| < R)$$

gde je $r$ neeuklidsko rastojanje između tačaka $z$ i $z_0$.

Uočimo na dvokrilnom hiperboloidu (I,2) tačku $M_1$ $(U, V, W)$ i tačku $M_2 (U + dU,\ V + dV,\ W + dW)$. Tačka $M_2$ ležaće na ovom hiperboloidu ako je

$$2(W dW - U dU - V dV) = dU^2 + dV^2 - dW^2.$$

Odavde iz (I,1) dobija se ovaj obrazac za elemenat luka u ravni Lobačevskog

$$dr^2 = dU^2 + dV^2 - dW^2.$$

## II. REDOVI SA KONSTANTNIM ČLANOVIMA

**2.1** Može se pretpostaviti da članovi reda

$$\sum a_n, \quad a_n > 0,$$

određuju u geometriji Lobačevskog granične lukove ili površine četvorouglova koji su ograničeni sa koaksialnim lukovima i njihovim osama. U ovoj se glavi pokazuje kako se shodno ovoj pretpostavci dolazi ne samo do poznatih nego i do novih kriterijuma za konvergenciju redova. Uzgred su data i neka geometriska tumačenja postupaka zbirljivosti.

Uočimo u ravni Lobačevskog niz tačaka [10a]

(II,1) $$M_u(S_n, v_n),\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad (u_{n+1},\ v_n > 0,\ n = 0,1,2,\dots),$$

čiji je položaj određen u odnosu na pravougli koordinatni sistem $Oxy$ pomoću prvih koordinata. Paralela $l_n$ povučena je kroz tačku $M_n$ prema pozitivnom pravcu $x$ ose. Koaksialni granični lukovi

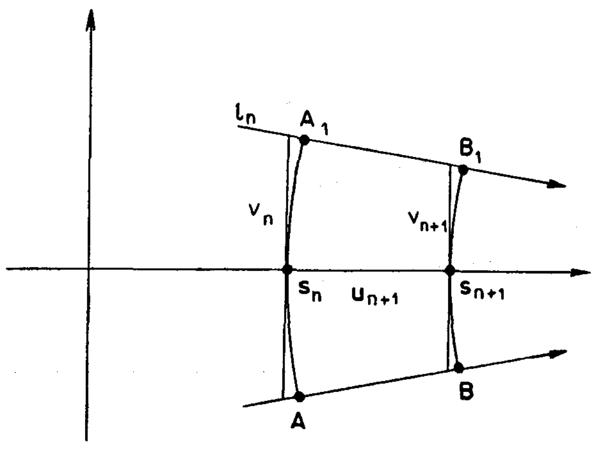
$$\overset{\frown}{AS_nA_1} = \mathrm{th}\, v_n \qquad \overset{\frown}{BS_{n+1}B_1} = e^{u_{n+1}}\mathrm{th}\, v_n$$

ovih paralela kao i njihovi segmenti $\overline{S_nS_{n+1}}$ i $\overline{AB}$ obrazuju četvorougao $AA_1B_1B$ (Sl. 1) čija je površina [17]

$$p_n = (1 - e^{-u_{n+1}})\,\mathrm{th}\, v_n.$$

Na taj se način prema nizu tačaka (1) može formirati ovaj red

(II,2) $$\sum_{0}^{\infty} (1 - e^{-n_{n+1}})\,\mathrm{th}\, v_n.$$




Sl. 1

Pretpostavimo da egzistira prava $x = C$, $C > 0$, koja siječe $x$ osu u tački $O_1$, a koju će paralela $l_n$ sjeći u tački $P_n$. Tada se ima

$$\mathrm{th}\, O_1P = e^{S_n - C}\ \mathrm{th}\, v_n < 1,\quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Iz ove pretpostavke očevidno proizlazi da će površina koja je određena redom (II,2) biti ograničena. Otud proizlazi ovaj rezultat:

*Ako je*

(II,3) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{\sum_1^n u_i} \operatorname{th} v_n < M,$$

*tada red (2) konvergira.*

Uslov (II,3) pokazuje da egzistira prava $x = C$, jer je $M = e^C$.
Ako je red

$$\sum u_n, \quad u_n > 0,$$

konvergentan, uslov (II,3) je uvijek zadovoljen. Prema tome kad konvergira ovaj red konvergira i red (II,2). Ako je ovaj red divergentan, tada uslov (II,3) nije uvijek zadovoljen. Tako naprimjer, ako je

$$u_n \geqslant O(1), \quad n \to \infty,$$

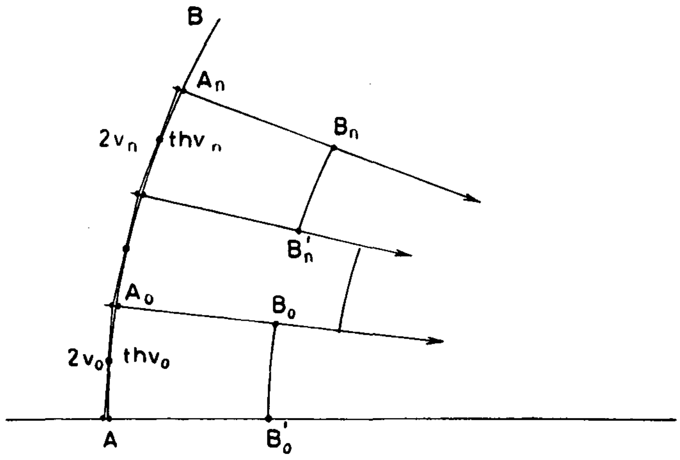
red (II,2) konvergira kada konvergira red

$$\sum \operatorname{th} v_n,$$

ali ako je

$$u_n = O(1), \quad n \to \infty,$$

tada, u slučaju kada uslov (II,3) nije zadovoljen, ne može se tvrditi da uočeni red divergira. Neka od ovih tvrđenja mogu se na lijep način interpretirati prema sl. 2




Sl. 2

**2.2** Neka bude rastojanje između tačaka $A_n$ i $B_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, (sl. 2) izraženo pomoću niza funkcija $\{u_n(x)\}$ koji ima slijedeće svojstvo:

(II,4) $$u_n(x) > 0, \quad \lim_{x\to\infty} u_n(x) = \infty, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \text{ za } x \geqslant x_0.$$

Ako je

(II,5) $$\lim_{n\to\infty} u_n(x) > 0 \text{ za } x \geqslant x_0,$$

tada je očevidno

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{0}^{\infty} (1 - e^{-u_{n+1}(x)}) \operatorname{th} v_n = S,$$

gde je $S = \sum \operatorname{th} v_n$. Ali ako je

(II,6) $$\lim_{n-\infty} u_n(x) = 0, \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i(x) = \infty, \ x \geqslant x_0,$$

tada red

(II,7) $$T(x) = \sum_{0}^{8} (1 - e^{-u_{n+1}(x)}) \operatorname{th} v_n$$

konvergira kada je

(II,8) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} e^{\sum_{1}^{n} u_i(x)} \operatorname{th} v_n < M, x \geqslant x_0,$$

gad je $M$ broj koji ne zavisi od $x$. Dakle, ako su ispunjeni uslovi (II,6) i (II,8), onda je red $\sum \operatorname{th} v_n$ zbirljiv po postupku (II, 7).

Ako članovi niza $\{u_n(x)\}$ zadovoljavaju uslov (II,4) i uslov

(II,9) $$U(x) = \sum_{1}^{\infty} |u_{n+1}(x) - u_n(x)| < \mathrm{M}, \ x \geqslant x_0,$$

gde je M broj koji ne zavisi od $x$, tada njegovi članovi zadovoljavaju uslov

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) \geqslant 0, \ x \geqslant x_0.$$

Uslov (II,9) pokazuje da je maksimalno rastojanje dva granična luka koji prolaze kroz ma koju od tačaka $B_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, za $x > x_0$, (sl. 2) uvijek manje ili najviše jednako vrednosti $U(x)$ za $x \geqslant x_0$.

**2.3** Ako niz $\{u_n\}$ zadovoljava uslov

$$0 < u_n < K, \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

tada je red

(II,10) $$\sum u_{n+1} \operatorname{th} v_n$$

ekvikonvergentan sa redom (II,2). No ovaj isti red bio bi ekvikonvergentan sa redom

$$\sum (1 - e^{-u_{n+1}/\lambda_{n+1}}) \lambda_{n+1} \operatorname{th} v_n, \ \lambda_n > 0,$$

kada je

$$0 < \frac{u_n}{\lambda_n} < K, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Prema tome red (10) konvergira ako je

(II,11) $$\lim_{n\to\infty} e^{\sum_{1}^{n} \frac{u_i}{\lambda_i}} \lambda_{n+1} \operatorname{th} v_n < M.$$

Dakle, ako egzistira takav niz pozitivnih brojeva $\{\lambda_n\}$ koji bi zadovoljavao uslov (II,11), tada red (II,10) konvergira, ali ako on ne bi egzistirao onda on ne bi konvergirao. Ovo očevidno proizlazi iz gore navedenog geometriskog posmatranja, jer kad je ispunjen uslov (II,11) za neki određeni niz $\{\lambda_n\}$, onda ostatak reda (10) teži nuli. U protivnom ako red (10) divergira, onda ne egzistira takav niz $\{\lambda_n\}$ koji bi zadovoljio uslov (11).

Uočimo red

$$\varphi(x)=\sum_1^\infty a_n \varphi_n(x), \quad a_n>0.$$

Članovi ovog reda pretstavljaće površine četvorouglova, kao što je prikazato na sl. 2, ako je

$$a_n=k \operatorname{th} v_n, \quad k\geqslant 1; \quad \varphi_n(x)=1-e^{-u_n(x)}, \quad x\geqslant x_o, \quad n=1,2,3,\ldots,$$

gde niz $u_n(x)$ ima osobinu (II,4). Prema tome niz $\{\varphi_n(x)\}$ zadovoljava uslove:

$$\text{(II, 12)} \qquad \begin{cases} 0<\varphi_n(x)<1 \text{ za } x\geqslant x_o \\ \lim\limits_{x\to\infty} \varphi_n(x)=1, \qquad n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Uslov (II, 9) dobija u ovom slučaju oblik

$$\text{(II, 13)} \qquad U(x)=\sum_1^\infty \left| \lg \frac{1-\varphi_n(x)}{1-\varphi_{n+1}(x)} \right| <M, \quad x\geqslant x_0,$$

gde $M$ ne zavisi od $x$. Dakle, ovaj uslov, kao što je pokazato u prethodnoj tački, izražava da je niz $\{\varphi_n(x)\}$ kongerventan za svako $x\geqslant x_0$ i da je rastojanje između dva granična luka koji prolaze kroz makoju od tačaka $B_n$, $n=1, 2, 3, \ldots$, manje ili najviše jednako $U(x)<M$, $x>x_0$. Otud se prema Hardy-u [8] može formulisati ovaj stav:

*Za regularnost po metodi* $\varphi$ *potrebno je i dovoljno da budu u intervalu* $(x_0, \infty)$ *ispunjeni uslovi (II, 12) i (II, 13). U specijalnom slučaju ovi su uslovi zadovoljeni ako je*

$$0<\varphi_{n+1}(x)\leqslant \varphi_n(x).$$

Kod Hardy-a mjesto uslova (13) stoji uslov

$$T(x)=\sum |\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| <M.$$

Ovaj poslednji uslov je ispunjen ako je ispunjen uslov (13), jer je

$$T(x)\leqslant U(x) \text{ za } x\geqslant x_0.$$

Ova nejednakost je očevidna kad se uzme u obzir nejednakost

$$\sum \left| e^{-u_{n+1}(x)}-e^{-u_n(x)} \right| < \sum | u_{n+1}(x)-u_n(x)|, \quad x\geqslant x_0.$$

Tako naprimjer red $\sum a_n$ biće zbirljiv po postupku

$$\text{(II, 14)} \qquad \sum a_n \left(1-\frac{1}{x}\right)^n, \quad (a_n=k \operatorname{th} v_n>0),$$

jer niz $\left\{\varphi_n(x)\right\} \equiv \left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n\right\}$ zadovoljava sve uslove gornjeg stava. Prema tome veličina

$$U(x)=\sum\left|\lg\frac{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}\right|=\lg x$$

određuje nam rastojanje između graničnih lukova $\widehat{A_0B_0}$ i $\widehat{AB}$ (sl. 2).

Red (II, 14) konvergira ako je prema (11) za $\lambda_n=n$ ispunjen uslov

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{\sum\limits_1^n ma_m}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}<M,$$

gde $M$ ne zavisi od $x$. Ovaj je uslov ispunjen kada je $\sum\limits_1^n ma_m \sim \lg n^\alpha,\ n\to\infty$ $(\alpha\leqslant 1)$. Ovaj uslov kad se napiše u obliku

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|e^{\frac{1}{n}\sum\limits_1^n ma_m}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right|^n<M,$$

biće ispunjen ako je

$$\text{(II, 15)}\qquad \frac{1}{n}\sum_{m=1}^n ma_m\to 0 \text{ sa } \frac{1}{n} \text{ kad } n\to\infty.$$

Gornji rezultati prema Tauber-u mogu se na slijedeći način formulisati: *Svaki red* $\Sigma a_n\,(a_n>0)$ *zbirljiv po postupku*

$$\sum a_n r^n\to S,\quad r\to 1,$$

*biće konvergentan, kada je zadovoljen uslov konvergencije* (II, 15) *ili uslov*

$$\sum_1^n ma_m \sim \lg n^\alpha,\quad n\to\infty\ (\alpha\leqslant 1).$$

**2.4** Red

$$\text{(II, 16)}\qquad \sum_1^\infty a_n,\quad a_n>0,$$

gde je prema (II, 10)

$$\text{(II, 17)}\qquad u_{n+1}=1,\quad a_n=k\,\mathrm{th}\,v_n\quad (k\geqslant 1,\ n=1,2,3,\ldots)$$

prema (II, 11) konvergira ako je

$$\text{(II, 18)}\qquad \lim_{n\to\infty} e^{\sum\limits_1^n\lambda_m}\cdot\frac{a_{n+1}}{\lambda_{n+1}}<M;$$

gde je $\{\lambda_n\}$ jedan podesno izabran niz brojeva.

Iz uslova (II, 18) za $\lambda_n = \frac{\alpha}{n}$ sleduje ovaj

(II, 19)
$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^{1+\alpha} \cdot \frac{a_n}{\alpha} < M,$$

jer je

$$\sum_1^n \frac{1}{m} \backsim \lg n, \quad n \to \infty .$$

Prema tome red (II, 16) konvergira ako je u uslovu (II, 19) $\alpha > 0$. Tako naprimjer red

$$\sum \frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

konvergira za $\alpha > 0$.

Za određivanje niza $\{\lambda_n\}$ može nam korisno poslužiti slijedeća teorema Abel [1] — Dini [6]:

*Ako red* $\sum c_n$, $c_n > 0$, *divergira, red*

$$\sum \frac{c_n}{S_n^{\mu}} \quad (S_n = \sum_1^n c_m),$$

*konvergira za* $\mu > 1$, *a divergira za* $\mu \leqslant 1$.

Prema ovom stavu red

$$\sum \frac{c_n}{S_{n,i}^{\mu} S_{n,i-1} \ldots S_n},$$

gde je

(II, 20)
$$S_n = \sum_1^n C_m; \quad S_{n,1} = \sum_1^n \frac{c_m}{S_m}, \quad S_{n,2} = \sum_1^n \frac{c_m}{S_{m,1}\, S_m}, \ldots,$$

konvergira za $\mu > 1$, a divergira za $\mu \leqslant 1$.

Ako se u (II, 20) stavi $c_n = \frac{1}{n}$, dobiće se tada niz: $\{S'_{n,i}\}$. Izraz (II, 18) za

$$\lambda_n = \frac{1}{n\, S_{n,1} \ldots S_{n,i}^{\mu}}$$

biće zadovoljen ako je

(II, 21)
$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n\, S_{n,1} \ldots S_{n,i}^{\mu}\, a_n < M$$

za $\mu > 1$, a za $\mu \leqslant 1$ neće biti zadovoljen. Prema tome imaće se ovaj rezultat:

*Ako je ispunjen uslov* (II, 21), *onda red* (II, 16) *konvergira za* $\mu > 1$, *a divergira za* $\mu \leqslant 1$.

Niz $\{S_{n,i}\}$ asimptotski se ponaša kao

(II, 22)
$$S_{n,i} \sim O(\lg_{i+1} n), \quad n \to \infty, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \quad \left(c_n = \frac{1}{n}\right)$$

gde je

$$\lg_1 n = \lg n, \quad \lg_2 n = \lg(\lg n), \ldots, \quad \lg_i n = \lg(\lg_{i-1} n).$$

Ovo je očevidno jer je

$$S_{n,i}=O\left(\sum_{k}^{n}\frac{1}{n\lg n\ldots\lg_i n}\right)=O\left(\int_{k}^{n}\frac{dx}{x\lg x\ldots\lg_i x}\right)=O(\lg_{i+1}n),\ n\to\infty,$$

$$i=1,2,3,\ldots.$$

Prema tome uslov (II, 21) na osnovu (II, 22) dobija sada ovaj oblik

$$0<\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n n\lg n\lg_2 n\ldots\lg_i^{\mu} n)<M. \tag{II, 23}$$

Dakle red (II, 16) konvergira ako je u (II, 23) $\mu>1$, a divergira ako je $\mu\leqslant 1$. Prema tome će red

$$\sum\frac{1}{n\lg n\ldots\lg_i^{\mu} n}$$

konvergirati za $\mu>1$ a divergirati za $\mu\leqslant 1$.

**2.5.** — Geometriska interpretacija postupaka izvedenih u prethodnoj tački može se izvesti na slijedeći način.

Red (II,16) prema transformaciji $a_n=k\operatorname{th}v_n$, $k\geqslant 1$, može se napisati u obliku

$$\sum a_n=k\sum\operatorname{th}v_n,\ k\geqslant 1.$$

Neka slijedeći niz tačaka u ravni Lobačevskog

$$M_n(s_n,v_n),\ s_n=\sum_{m=1}^{n}\varepsilon\alpha_m,\ (\alpha_m>0,\ \varepsilon=\pm 1),$$

leži na paraleli $\operatorname{th}y=e^{-x}$. Članovi niza $\{\alpha_n\}$ označavaće tada otstojanje između susjednih graničnih lukova koji pripadaju nizu $\{\operatorname{th}v_n\}$. Zbog toga će se ubuduće pretpostaviti da u redu $\sum\operatorname{th}v_n$ članovi niza $\{v_n\}$ su prve ordinate ovih tačaka koje leže na paraleli $\operatorname{th}y=e^{-x}$. Vodeći računa o tome biće očevidne slijedeće jednakosti

$$\begin{aligned}&\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\operatorname{th}v_{n+1}}{\operatorname{th}v_n}=e^{\varepsilon\alpha_n},\\&e^{s_n}a_n=ke^{s_n}\operatorname{th}v_n=k,\quad k\geqslant 1.\end{aligned} \tag{II,24}$$

Prema tome može se pisati

$$a_n=ke^{-s_n}, \tag{II,25}$$

ili

$$a_n=e^{-\frac{s_n-\lg k}{n}}. \tag{II,26}$$

Iz uslova (II,23) proizlazi da se niz $\{a_n\}$ asimptotski ponaša kao

$$a_n\backsim e^{-[\lg n+\lg_2 n+\ldots+\lg_{i+1}n]},\quad n\to\infty.$$

Odavde prema (II,25) sleduje, ako niz $\{s_n\}$ zadovoljava uslov

(II,27)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\lg[n\lg n\ldots\lg_i^{\mu} n]} = 1,$$

tada dati red konvergira za $\mu > 1$, a divergira za $\mu \leqslant 1$.

Iz gore rečenog izlazi, da konvergencija reda (II,16) kod koga je $a_n = k \operatorname{th} v_n$, zavisi od kondenzacije graničnih koaksialnih lukova: $\operatorname{th} v_n$, koji su smješteni između $x$ ose i ose $\operatorname{th} y = e^{-x}$. Granična vrednost te kondenzacije za konvergenciju datog reda određuje se prema nizu $\{s_n\}$. Uslovom (II,27) za $\mu > 1$ određena je približno donja vrednost te granice. Tako naprimjer red (II,16) konvergira uvjek kada je

$$\lim \frac{s_n}{n} = c, \quad c > 0.$$

Ovaj poslednji uslov biće ispunjen kad god je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \varepsilon\alpha_n = p, \quad p > 0.$$

Iz gore rečenog sleduje ovaj rezultat:

*Red (II,16) konvergira ako je*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim e^{-\alpha_n} < 1,$$

*ili kada je*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{-\frac{s_n}{n}} < 1,$$

*a divergira kada je*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{\alpha_n} > 1,$$

*ili kada je*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{-\frac{s_n}{n}} > 1.$$

U ovom rezultatu sadržana su poznata pravila Cauchy-a i D'Alembert-a.

Ako je niz $\{\varepsilon\alpha_n\}$ konvergentan, tada su prema (II,24) i (II,26) konvergentni i nizovi

(II,28)
$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \text{ i } \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$$

i oni konvergiraju prema istoj granici, jer se prema Cauchy-evu stavu [4] o aritmetičkoj sredini ima

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon\alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n}, \quad s_n = \sum_1^n \varepsilon\alpha_m.$$

Prema tome za članove reda (16) važi slijedeća poznata teorema:
*Ako jedan od nizova* (II,28) *konvergira, tada je*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}.$$

Iz relacija (II,26) očevidno sleduje

$$\sqrt[n]{a_n}\backsim e^{\frac{-\lg(n\lg n\ldots\lg_i^{\mu} n)}{n}},\quad n\to\infty,$$

Prema ovom uslovu red (II,16) konvergira za $\mu>1$ a divergira za $\mu\leqslant 1$. Ovaj se uslov može napisati u obliku

$$\frac{n}{\lg(n\lg n\ldots\lg_i n)}(1-\sqrt[n]{a_n})\backsim \lg_{i+1}^{\mu-1} n,\quad n\to\infty.$$

Otud proizlazi ovaj stav:
*Red* (II,16) *konvergira ako je*

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{\lg(n\lg n\ldots\lg_i n)}\quad(1-\sqrt[n]{a_n})>1;$$

*divergira ako je*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lg(n\lg n\ldots\lg_i n)}\quad(1-\sqrt[n]{a_n})\leqslant 1.$$

Ako se u izrazu (II,24) niz $\{\varepsilon\alpha_n\}$ asimptotski ponaša kao

$$\varepsilon\alpha_n\backsim\frac{\lambda}{n},\quad n\to\infty,$$

tada je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\backsim e^{-\frac{\lambda}{n}},\quad n\to\infty.$$

Iz ovog uslova slijedi Raabe-ov kriterijum:
*Red* (16) *konvergira ako je*

$$\varliminf_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)>1;$$

*on divergira ako je*

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leqslant 1.$$

Iz relacija (II,25) i (II,27) sleduje

$$a_n e^{\lg(n\lg n\ldots\lg_i^{\mu} n)}=e^{\lg(a_n n\lg n\ldots\lg_{i-1} n)+\mu\lg_{i+1}n}=k,\quad n\to\infty.$$

Odavde sleduje ovaj uslov

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\lg(a_n n\lg n\ldots\lg_i n)}{\lg_{i+1} n}=-\mu,$$

a iz njega proizlazi ovaj kriterijum [10a]:

*Red* (16) *konvergira ako je*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\frac{\lg(a_n n\lg n\ldots\lg_{i-2}n)}{\lg_i n}\right)<0;$$

*on divergira ako je*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\frac{\lg(a_n n\lg n\ldots\lg_{i-2}n)}{\lg_i n}\right)>0.$$

Ovaj kriterijum je znatno proširenje poznatog logaritamskog kriterijuma.

**2.6.** — Raspored koaksialnih graničnih lukova $\{\operatorname{th} v_n\}$, koji su smješteni između $x$ ose i paralele $\operatorname{th} y=e^{-x}$, najjednostavnije je posmatrati kada je niz $\{\operatorname{th} v_n\}$ monoton. Ovom nizu odgovara niz tačaka

$$M_n(s_n, v_n), \quad s_n=\sum_{m=1}^{n}\alpha_m, \quad \alpha_m>0,$$

na paraleli $\operatorname{th} y=e^{-x}$, gde je $\alpha_n$ rastojanje između graničnih lukova $\operatorname{th} v_{n-1}$ i $\operatorname{th} v_n$.

Iz niza koaksialnih graničnih lukova $\{\operatorname{th} v_n\}$ formiraćemo ovaj parcialan niz $\{\operatorname{th} v_{q_n}\}$, koji ima svojstvo da bude niz rastojanja između susjednih graničnih lukova, tj. niz

$$s_{q_{n+1}}-s_{q_n}=\beta_{q_n}=\sum_{m=q_n+1}^{q_{n+1}}\alpha_m$$

ograničen. Ako niz $\{a_n\}\equiv\{k\operatorname{th} v_n\}$ monotono opada, dobija se tada

$$\frac{a_{q_{n+1}}}{a_{q_n}}=\frac{\operatorname{th} v_{q_{n+1}}}{\operatorname{th} v_{q_n}}=e^{-\beta_{q_n}}, \quad 0<\beta_{q_n}<M.$$

Iz ovih pretpostavki slijedi:

1) $a_{q_n}=ke^{-s_{q_n}}, \quad s_{q_{n+1}}-s_{q_n}=\beta_{q_n}=O(1), \quad n\to\infty;$

2) da je očevidan ovaj niz nejednakosti

$$(q_{n+1}-q_n)\,a_{q_{n+1}}<\sum_{m=q_n+1}^{q_{n+1}}a_m<(q_{n+1}-q_n)a_{q_n}, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

iz kojeg proizlazi ova nejednakost

$$\text{(II, 29)} \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty}(q_{n+1}-q_n)\,a_{q_n}<\sum_{q_{n_0}+1}^{\infty}a_n<\sum_{n=n_0}^{\infty}(q_{n+1}-q_n)\,a_{q_n};$$

3) da niz cijelih brojeva $\{q_{n+1}-q_n\}$ treba da zadovoljava uslov

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{q_{n+2}-q_{n+1}}{q_{n+1}-q_n}\cdot\frac{a_{q_{n+1}}}{a_{q_n}}\leqslant 1,$$

iz koga proizlazi ovaj

(II,30) $$q_{n+1}-q_n=O\,(q_n-q_{n-1}),\quad n\to\infty\,.$$

Dakle, prema uslovima (II,29) i (II,30) redovi

(II,31) $$\sum a_n \quad \text{i} \quad \sum (q_{n+1}-q_n)\, a_{q_n}$$

su ekvikonvergentni.

Iz gore rečenog proizlazi ovaj stav Schlömilch-a [16]:

*Ako niz cijelih brojeva* $\{q_n\}$ *zadovoljava uslov*

$$q_n<q_{n+1}\to\infty\,,\quad n\to\infty\,,$$

*i uslov* (II,30) *i ako niz* $\{a_n\}$ *monotono opada, tada su redovi* (II,31) *ekvikonvergentni.*

**2.6.** — Određivanje niza $\{\lambda_n\}$ može se izvršiti po slijedećem postupku. Red

(II,32) $$\sum_1^{\infty} a_n b_n \quad (a_n, b_n>0),$$

prema gore navedenom uslovu konvergira ako je

(II,33) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{\sum\limits_1^n b_m\lambda_m}\,\frac{a_{n+1}}{\lambda_{n+1}}<M.$$

Za $\lambda_n=|z|^n$, $(z=\rho e^{\theta i})$, niz

$$\left\{\sum_1^n b_n|z|^n\right\}$$

konvergira za

$$|z|<\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{b_n}}\,.$$

Ovo ima smisla ako je

(II,34) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{b_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{S_n}<\mathrm{M};\quad S_n=\sum_1^n b_m\to\infty,\quad n\to\infty\,.$$

Za

$$\lambda_n=\frac{1}{S_n S_{n,1}\ldots S_{n,i}^{\mu}}\,,$$

gde je

(II,35) $$S_{n,1}=\sum_{m=1}^n\frac{b_m}{S_m},\quad S_{n,2}=\sum_{m=1}^n\frac{b_m}{S_m S_{m,1}},\ldots,\ S_{n,i}=\sum_{m=1}^n\frac{b_m}{S_m S_{m,1}\ldots S_{m,i-1}}$$

$$S_n=\sum_{m=1}^n b_m\to\infty\,,\quad n\to\infty\,,$$

uslov (II,33) kad se uzme u obzir gore pomenuti stav Abel—Dini-a, biće zadovoljen ako je

(II,36) $$0<\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n^{\mu},{}_i S_{n,\,i-1}\ldots S_{n,\,1} S_n a_n < M.$$

Odavde sleduje ovaj stav:

*Ako je ispunjen uslov* (36) *i uslov* $S_n\to\infty$, $n\to\infty$, *onda red* (II,32) *konvergira za* $\mu>1$, *a divergira za* $\mu\leqslant 1$.

Iz uslova (II,34) i (II,36) sleduje da se niz $\{a_n\}$ u minimalnom slučaju može asimptotski ponašati kao

$$a_n \backsim e^{-\mu n},\ n\to\infty\,,\ \mu\leqslant 0.$$

Odavde prema smjeni $a_n = k\,\mathrm{th}\,v_n$ izlazi potreban uslov da je niz ovih koaksialnih graničnih lukova, tj. niz $\{\mathrm{th}\,v_n\}$, raspoređen tako između $x$ ose i ose $\mathrm{th}\,y=e^{-x}$ što je rastojanje $\alpha_n$ između graničnih lukova $\mathrm{th}\,v_n$ i $\mathrm{th}\ v_{n+1}$ konačno za svako $n=1, 2, 3,\ldots$ Dakle da bi niz $\{\alpha_n\}$ bio ograničen potrebno je da bude zadovoljen uslov (II,34) i (II,36). Ako niz $\{a_n\}$ monotono opada, tada su u relacijama (II,34) i (II,36) sadržani i potrebni i dovoljni uslovi da niz $\{\alpha_n\}$ bude ograničen. Prema tome ako se uoči red

(II,37) $$\sum (S_{q_n} - S_{q_{n-1}}) a_{q_{n-1}},\ (S_{q_n}\to\infty\,,\ n\to\infty\,),$$

gde je $\{S_{q_n}\}$ parcijalan niz niza $\{S_n\}$, a $\{a_{q_n}\}$ parcijalan niz monotono opadajućeg niza $\{a_n\}$, onda će on prema gornjem stavu konvergirati ako je

(II,38) $$0<\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S^{\mu}_{q_{n},\,i} S_{q_{n},\,i-1}\ldots S_{q_n} a_{q_{n-1}} < M,$$

gde je

$$S_{q_{n},\,i} = \sum_{m=1}^{q_n} \frac{a_m}{S_{m,\,i-1}\ldots S_m}$$

Ako niz $\{S_{q_n}\}$ zadovoljava uslov:

(II,39) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{S_{q_n}} < M,$$

onda je u izrazu

$$\frac{a_{q_{n-1}}}{a_{q_n}} = \frac{\mathrm{th}\,v_{q_{n-1}}}{\mathrm{th}\,v_{q_n}} = e^{\alpha_n},\ n=1, 2, 3,\ldots,$$

niz pozitivnih brojeva $\{\alpha_n\}$ ograničen. Prema tome niz

(II,40) $$\left\{\frac{a_{q_{n-1}}}{a_{q_n}}\right\}$$

je ograničen.

Ako je

(II.41) $$b_n = O(1), \quad n \to \infty; \quad \varliminf_{n \to \infty} b_n > 0,$$

tada je poznato da su redovi

$$\sum a_n \quad \text{i} \quad \sum a_n b_n$$

ekvikonvergentni. Isto tako biće ekvikonvergentni redovi

(a) $$\sum a_n b_n \quad \text{i} \quad \sum (S_{q_{n+1}} - S_{q_n}) a_{q_n}$$

kada niz $\{a_n\}$ monotono opada, što se vidi iz slijedećeg izlaganja. Iz nejednakosti

$$(S_{q_{n+1}} - S_{q_n}) a_{q_{n+1}} < \sum_{m=q_n+1}^{q_{n+1}} a_m b_m < (S_{q_{n+1}} - S_{q_n}) a_{q_n},$$

koja je očevidna s obzirom na pretpostavku da niz $\{a_n\}$ monotono opada, sleduje na osnovu (II,40) ova nejednakost

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (S_{q_n} - S_{q_{n-1}}) a_{q_{n-1}} < \sum_{m=1}^{\infty} (S_m - S_{m-1}) a_m < \mu \sum_{m=1}^{\infty} (S_{q_n} - S_{q_{n-1}}) a_{q_{n-1}},$$

iz koje proizlazi ono što smo gore tvrdili. Dakle prema gore navedenim uslovima red $\Sigma a_n$ je ekvikonvergentan sa redovima (a).

Iz gore rečenog proizlazi ovaj stav:

*Ako niz brojeva* $\{S_{q_n}\}$, *gde je* $\{S_{q_n}\}$ *parcijalan niz niza* $\{S_n\} \equiv \sum_{m=1}^{n} b_m$ $(b_n = O(1),\ n \to \infty;\ \varliminf_{n \to \infty} b_n > 0)$ *zadovoljava uslove:*

$$S_{q_n} < S_{q_{n+1}} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{S_{q_n}} < M,$$

*i ako niz* $\{a_n\}$ *monotono opada, tada su redovi*

$$\sum a_n,\ a_n > 0, \quad \text{i} \quad \sum (S_{q_{n+1}} - S_{q_n}) a_{q_n}$$

*ekvikonvergentni.*

Iz ovog stava proizlazi ovaj:

*Ako niz cijelih brojeva* $\{q_n\}$ *zadovoljava uslov*

$$q_n < q_{n+1} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

*i uslov*

(II,42) $$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{q_n} < M,$$

*i ako niz* $\{a_n\}$ *monotono opada, tada su redovi*

$$\sum a_n,\ a_n > 0, \quad \text{i} \quad \sum (q_{n+1} - q_n) a_{q_n}$$

*ekvikonvergentni.*

Uslov (II,42) je zadovoljen u specijalnom slučaju ako je

$$q_{n+1} = O(q_n),\ n \to \infty,$$

$$q_{n+1} - q_n = O(q_n - q_{n-1}),\ n \to \infty.$$

Otud iz gornjeg stava slijedi poznati stav Schlömilch-a.

Prema gore rečenom može se formulisati ovaj stav [10b]:

*Neka bude funkcija $f(x)$ u intervalu $(0, \infty)$ pozitivna i monotona i neka niz $\{a_n\}$ zadovoljava uslov*

$$a_n > 0,\quad a_n = O(1),\quad n \to \infty;\quad \underline{\lim}_{n \to \infty}\, a_n > 0.$$

*Tada su redovi*

$$\sum a_{n+1} f(S_n),\quad S_n = \sum_{m=1}^{n} a_m,\quad \text{i}\quad \sum (S_{q_{n+1}} - S_{q_n}) f(S_{q_n})$$

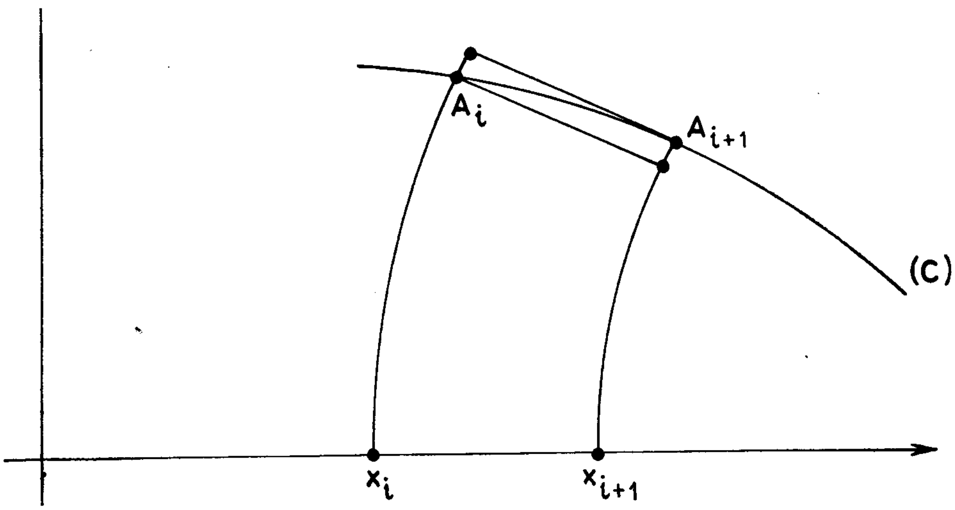
*ekvikonvergentni ako je*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, \sqrt[n]{S_{q_n}} < M,$$

*gde je $\{S_{q_n}\}$ parcijalan niz niza $\{S_n\}$.*

**2.7.** — Neka bude $f(x)$ neprekidna funkcija koja je u intervalu $(0, \infty)$ ograničena i pozitivna. Kad se ona napiše u obliku

$$f(x) = k \operatorname{th} \varphi(x),\ k \geqslant 1,$$




Sl. 3

tada na njenom grafiku $(C)$ u ravni Lobačevskog (sl. 3) veličina $\widehat{x_i A_i}$ određuje granični luk $k \operatorname{th} \varphi(x_i)$ kome je osa $x$ osa.

Ako interval $[a, b]$ tačkama $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}$, podijelimo na $n$ dijelova i ako sa $P_1$ i $Q_1$ označimo površine upisanih odnosno opisanih četvorouglova, a sa $J_i$ površinu ograničenu sa lukom $A_iA_{i+1}$ krive $(C)$ i graničnim lukovima $\widehat{x_iA_i}$ i $\widehat{x_{i+1}A_{i+1}}$ i $x$ osom, onda će biti očevidna ova nejednakost

$$P_i = k\,(1-e^{-(x_{i+1}-x_i)})\,\mathrm{th}\,\varphi(x_i) < J_i < k\,e^{x_{i+1}-x_i}(1-e^{-(x_{i+1}-x_i)})\,\mathrm{th}\,\varphi(x_{i+1}) = Q_i.$$

Odavde proizlazi ovaj elemenat za površinu $J$

$$\mathrm{d}J = k\,\mathrm{th}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\alpha,$$

gde je

$$\mathrm{d}\alpha = 1 - e^{-\mathrm{d}x}, \quad x > 0.$$

Odavde proizilazi da je Stietjes-ov integral funkcija $f(x)$ u ovom slučaju jednak Rieman-ovu integralu, tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Geometriski ovaj integral pretstavlja prema slici 3 onu površinu $J$ koja je ograničena lukom $\widehat{AB}$ krive (C), graničnim lukovima $k\,\mathrm{th}\,\varphi(a)$ i $k\,\mathrm{th}\,\varphi(b)$ i $x$ osom.

Uočimo na krivoj (C) niz tačaka

$$M_n(S_n, f(S_n)), \quad S_n = \sum_{m=1}^{n} a_m.$$

Ako je funkcija $f(x)$ u intervalu $(0, \infty)$ pozitivna i monotona, tada prema uslovu

(II,43) $$e^{S_n} f(S_n) \to \infty, \quad n \to \infty, \quad (a_n > 0, f(S_n) = k\,\mathrm{th}\,\varphi(S_n)),$$

biće očevidan ovaj niz nejednakosti:

$$(1-e^{-a_n}) f(S_{n-1}) \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant e^{a_n}(1-e^{-a_n}) f(S_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

ili ovaj

(II,44) $$e^{\alpha_n}(1-e^{-a_n}) f(S_n) \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant e^{a_n-\alpha_n}(1-e^{-a_n}) f(S_{n-1}),$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gde je

$$e^{\alpha_n} = \frac{f(S_{n-1})}{f(S_n)}, \quad (a_n > 0, \ \alpha_n = \mathrm{O}(1), \ n \to \infty).$$

Odavde proizlazi da red

(II,45) $$\sum (1-e^{-a_n}) f(S_n)$$

konvergira kad konvergira integral

(II,46) $$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x,$$

a kad ovaj integral divergira onda divergira i red

$$\sum e^{a_n}(1-e^{-a_n})f(S_{n-1}). \tag{II,47}$$

Ako se uoči red

$$\sum a_n f(S_n) \tag{II,48}$$

onda je on, kako je to ranije rečeno, ekvikonvergentan sa redom (II,44) ili sa redom

$$\sum (1-e^{-a_n/\lambda_n})\cdot f(S_{n-1})\,\lambda_n,\quad \lambda_n>0,$$

gde je

$$a_n=\mathrm{O}(\lambda_n),\quad n\to\infty.$$

Zbog toga red (II,47) konvergira ako konvergira integral (II,45).

Isto tako red

$$\sum a_n f(S_{n-1}) \tag{II,49}$$

je ekvikonvergentan sa redom (II,47) ili sa redom

$$\sum e^{a_n/\lambda_n}(1-e^{a_n/\lambda_n})f(S_{n-1})\,\lambda_n\,(a_n=\mathrm{O}(\lambda_n),\ n\to\infty).$$

Otud u vezi uslova (II,44) proizlazi da red (II,49) divergira kad divergira integral (II,46).

Iz gore rečenog proizlazi ovaj stav Denjoy-a [5a].

*Ako je* $$a_n>0,\quad S_n=\sum_{m=1}^{n} a_m\to\infty,\quad n\to\infty,$$

*i ako funkcija $f(x)$ monotono opada, tada iz konvergencije integrala (II,46) slijedi konvergencija reda (II,48) a iz divergencije ovog integrala slijedi divergencija reda (II,49).*

Uočimo slučaj kada $a_n\to\infty$, $n\to\infty$. Prema slijedećoj podjeli intervala $[S_{n-1}, S_n]$

$$S_{n-1}<x_1<x_2<\cdots<x_m<x_{m+1}<\cdots<S_n$$

i za

$$\alpha=1-e^{-\frac{x_m-x_{m-1}}{x_m}}$$

biće integral Stieltjes-a funkcija $xf(x)$ tj. integral $\int\limits_{S_{n-1}}^{S_n} xf(x)\,\mathrm{d}\alpha$, jednak integralu Riemann-a $\int\limits_{S_{n-1}}^{S_n} f(x)\,\mathrm{d}x$. Zbog toga, kada je funkcija $f(x)$ u intervalu $(0,\infty)$ pozitivna i monotona i kada zadovoljava uslov (II,43), biće očevidan ovaj niz nejednakosti:

$$\left(1-e^{-\frac{a_n}{S_n}}\right)S_{n-1}f(S_{n-1})<\int\limits_{S_{n-1}}^{S_{n-1}+a_n/S_n} f(x)\,\mathrm{d}x<\left(1-e^{-\frac{a_n}{S_n}}\right)e^{\frac{a_n}{S_n}}S_n f(S_n),\quad n=1,2,3,\ldots$$

Prema ranije rečenom niz $\{\alpha_n\}$ u izrazu

$$\frac{S_n f(S_n)}{S_{n-1} f(S_{n-1})} = \frac{\operatorname{th} \varphi(S_n)}{\operatorname{th} \varphi(S_{n-1})} = e^{-\alpha_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

biće ograničen ako je

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{S_n} < M.$$

Zbog toga se gornji niz nejednakosti može napisati u obliku

$$\lambda a_n f(S_n) < \int_{S_{n-1}}^{S_{n-1} + a_n/S_n} f(x) \, \mathrm{d} x < e^{a_n/S_n} a_n f(S_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Odavde izlazi da je red $\sum a_n f(S_n)$ ekvikonvergentan sa integralom (II,46).

Iz gore rečenog proizlazi ovaj stav [10b]:

*Ako niz* $\{a_n\}$ *zadovoljava uslove:*

(II,50) $$a_n > 0; \quad S_n = \sum_{m=1}^{n} a_m \to \infty, \ n \to \infty; \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{S_n} < M,$$

*i ako je funkcija* $f(x)$ *u intervalu* $(0, \infty)$ *pozitivna i monotona, tada su red*

$$\sum a_n f(S_n), \quad a_n > 0,$$

*i integral*

$$\int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d} x$$

*ekvikonvergentni.*

Uslov (II,50) biće u specijalnom slučaju zadovoljen ako je

$$S_n = \mathrm{O}(S_{n-1}), \quad n \to \infty.$$

Otud iz gornjeg stava rezultira stav Karamate J. [11]. Ako je $0 < a_n < M$, tada iz gornjeg stava rezultira stav Litlewood-a [13].

## III. FUNKCIONALNI REDOVI

**3.1.** — Uočimo u ravni Lobačevskog niz tačaka [10c]

(III,1) $$M_n\left(\sum_{m=0}^{n} |u_m(x_0)|, \ |v_n(x_0)|\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (u_0(x_0) = 0)$$

čiji je položaj u odnosu na pravougle koordinate $Oxy$ određen pomoću prvih koordinata. Polazeći od ovog niza tačaka može se, kao što je to rečeno u prethodnoj glavi, formirati red

(III,2) $$\sum_{0}^{\infty} \left(1 - e^{-|u_{n+1}(x_0)|}\right) \operatorname{th} |v_n(x)|.$$

Geometriski lako je uočiti da ovaj red konvergira ako egzistira prava $x=C$, $C>0$, koja bi bila presečena sa svim paralelama koje su povučene kroz tačke (III,1) u pozitivnom smjeru $x$ ose. Elementarnim putem dolazi se do slijedećeg uslova za egzistenciju prave $x=C$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{\sum_1^n |u_m(x_0)|} \operatorname{th} |v_n(x_0)| < M.$$

Otud iz uslova

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{\sum_1^n |u_m(x)|} \operatorname{th} |v_n(x)| < M, \quad x \in [a, b],$$

gde je $M$ broj nezavisan od $x$, sleduje: 1) svakoj tački iz intervala $[a, b]$ odgovara prava $x=C$, $C \geqslant 0$;

2) ostatak reda

$$\text{(III,3)} \qquad \sum_0^\infty \left(1 - e^{-|u_{m+1}(x)|} \operatorname{th} |v_n(x)|\right.$$

uniformno konvergira ka nuli kada je

$$\lim_{n\to\infty} |v_n(x)| = 0, \quad x \in [a, b].$$

Odavde proizlazi ovaj rezultat:

*Ako je*

$$\text{(III,4)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{\sum_1^n |u_m(x)|} \operatorname{th} |v_{n+1}(x)| < M; \quad v_n(x) \to 0, \ n\to\infty; \quad x \in |a, b|,$$

*gde je $M$ broj koji ne zavisi od $x$, red (III,3) uniformno konvergira u intervalu $[a, b]$.*

Ako se uoči red

$$\sum \alpha_n(x)\, \beta_n(x),$$

onda će on biti u intervalu $[a, b]$ apsolutno ekvikonvergentan red sa redom

$$\sum \left(1 - e^{-|\beta_n(x)|}\right) |\alpha_n(x)|,$$

gde je prema redu (III,3)

$$|\beta_n(x)| = |u_{n+1}(x)| \text{ i } |\alpha_n(x)| = k \operatorname{th} |v_n(x)|, \quad k \geqslant 1,$$

ili redu

$$\sum \left(1 - e^{-\frac{|\beta_n(x)|}{\lambda_n}}\right) |\alpha_n(x)|\, \lambda_n,$$

kada je

$$\beta_n(x) = O(\lambda_n), \quad n\to\infty, \ x \in [a, b],$$

gde je $\{\lambda_n\}$ jedan podesno izabran niz pozitivnih brojeva. Odavde prema gornjem rezultatu može se formulisati ovaj stav:

*Ako egzistira takav niz* $\{\lambda_n\}$ *sa pozitivnim članovima da su ovi uslovi zadovoljeni*

$$(\text{III}, 5) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{\sum\limits_{m=1}^{n} \lambda_m |\beta_m(x)|} \frac{|\alpha_{n+1}(x)|}{\lambda_{n+1}} < M; \; |\alpha_n(x)| = o(\lambda_n), n\to\infty, \in x[a, b],$$

*gde je M broj koji ne zavisi od x, tada red*

$$(\text{III}, 6) \qquad \sum \alpha_n(x)\,\beta_n(x)$$

*uniformno konvergira u intervalu* $[a, b]$.

Niz $\{\lambda_n\}$ treba odrediti tako da se niz $\left\{\sum\limits_{m=1}^{n} \lambda_m |\beta_m(x)|\right\}$ asimptotski ponaša kao

$$\sum_{m=1}^{n} \lambda_m |\beta_m(x)| = O(\lg n), \; n\to\infty, \; x \in [a, b].$$

Tako naprimjer ako se uoči red

$$\sum_{0}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$$

i stavi

$$\lambda_n = \frac{\alpha}{n} (\alpha > 0); \; \beta_n(x) = x^n \text{ i } \alpha_n(x) = 1 - x,$$

tada će se, kad se pusti da $x \to 1-0$, dobiti prema uslovu (III, 5) ovaj oblik

$$\frac{1}{\alpha} \overline{\lim_{n\to\infty}} (n+1)(1-x)^{1-\alpha}, \; x\to 1-0 \left(x = 1 - \frac{1}{n}\right).$$

Dakle sa $\alpha \geqslant 0$ uslov (III, 5) nije uniformno zadovoljen, pa prema tome ovaj red ne konvergira uniformno u intervalu [0,1].

Ako je red

$$\sum |\beta_n(x)|$$

u intervalu $[a, b]$ uniformno konvergentan, tada će red (III, 6) uniformno konvergirati u ovom intervalu ako je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{\sum\limits_{1}^{n} |\beta_m(x)|} |\alpha_{n+1}(x)| < M.$$

Ovaj će uslov biti zadovoljen ako je u ovom intervalu niz $\{\alpha_n(x)\}$ uniformno ograničen. Odavde proizlazi ovaj poznati stav:

*Ako u intervalu* $[a, b]$ *red* $\Sigma |\beta_n(x)|$ *je uniformno konvergentan a niz* $\{\alpha_n(x)\}$ *uniformno ograničen, tada red* (III,6) *uniformno konvergira u ovom intervalu.*

Prema uslovu za uniformu konvergenciju reda (6)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} e^{\sum\limits_1^n \lambda_m |\beta_m(x)|} \frac{|\alpha_{n+1}(x)|}{\lambda_{n+1}} < M, \text{ za } x \in [a, b],$$

a na osnovu poslednjeg stava može se formulisati ovaj rezultat:

*Ako je u intervalu* $[a, b]$ *red* $\Sigma\lambda_n |\beta_n(x)|$ *uniformno konvergentan a niz* $\left\{\frac{|\alpha_n(x)|}{\lambda_n}\right\}$ *uniformno ograničen, tada je u ovom intervalu red* (III, 6) *uniformno konvergentan.*

Tako naprimjer Dirichlet-ov red

$$\text{(III,7)} \qquad \sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad (s = x + yi,\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_n \to \infty,\ n \to \infty),$$

biće konvergentan za onu vrednost $s$ za koju je ispunjen uslov

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} e^{\sum\limits_1^n \lambda_m |\alpha_m|} e^{-\lambda_{n+1}x} / \lambda_{n+1} < M$$

gde $M$ ne zavisi od $x$. Ovaj uslov biće očevidno ispunjen za

$$R(s) > \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum\limits_1^n \lambda_m |a_m|}{\lambda_{n+1}}.$$

Ako se uoči Dirichlet-ov red (III, 7) tada će on, prema rečenom u glavi II, apsolutno konvergirati za one vrijednosti broja $s$ u kojima je zadovoljen uslov

$$|a_n e^{-\lambda_n s}| = k \operatorname{th} |v_n(x)| \sim e^{-r \lg n},\quad n \to \infty \quad (k > 1,\ r > 1).$$

Odavde se dobija apscisa $x = c$ apsolutne konvergencije ovog reda

$$c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\frac{1}{\lambda_n} \lg |a_n| + \frac{r \lg n}{\lambda_n}\right].$$

Isto tako imaće se za Taylor-ov red

$$\sum a_n z^n$$

ovaj uslov

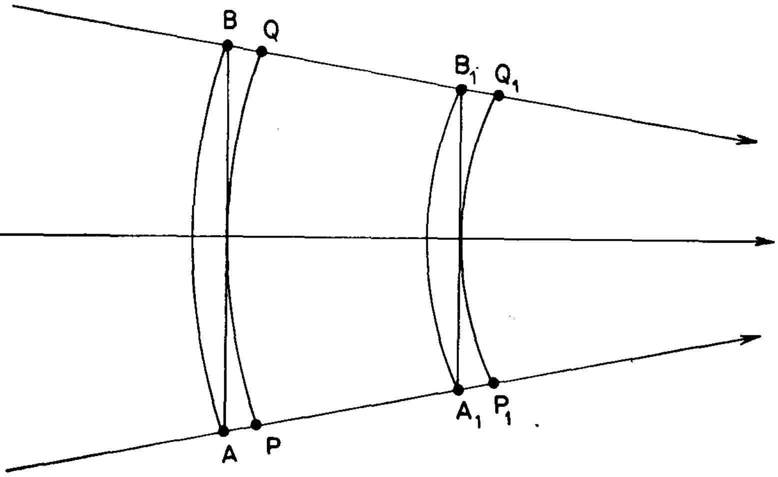
$$|a_n z^n| = k \operatorname{th} |v_n(x)| \sim e^{-r \lg n},\quad n \to \infty,\ r > 1.$$

Odavde proizlazi Cauchy-Hadamard-ov kriterijum za određivanje poluprečnika konvergencije $R$

$$\mathrm{R} = 1 / \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

## IV. NEKE POSLEDICE PRINCIPA HIPERBOLIČNE METRIKE

**4.1.** — Uočimo u ravni Lobačevskog dvije ose $l_1$ i $l_2$. Ovim dvjema osama neka odgovaraju granični lukovi $\widehat{AB}$ i $\widehat{PQ}$ (sl. 4).




Sl. 4

Neka bude prema (I, 8)

$$\widehat{AB} = \operatorname{sh} \frac{r}{2} = \frac{R\,|z_2 - z_1|}{\sqrt{(R^2 - |z_1|^2)(R^2 - |z_2|^2)}}, \tag{IV,1}$$

$$\widehat{PQ} = \operatorname{th} \frac{r}{2} = \frac{R\,|z_2 - z_1|}{|R^2 - \bar{z}_1 z_2|} \quad (\widehat{AB} = r). \tag{IV,2}$$

U I odeljku ovog rada data je biunivoka korespondencija između tačaka ravni Lobačevskog i tačaka kruga $|z| = R$. Ako je funkcija $f(z)$ regularna u krugu $|z| < R$ i ako je $|f(z)| \leqslant M$ za $z \leqslant R$, tada se i funkcijom

$$w = \varphi(z) = \frac{R}{M} f(z)$$

postiže takođe biunivoka korenspondencija između tačaka ravni Lobačevskog i tačaka kruga $|w| < R$. Prema tome imaće se

$$\widehat{A_1B_1} = \operatorname{sh} \frac{r_1}{2} = \frac{M\,(f(z_2) - f(z_1)\,|}{\sqrt{(M^2 - |f(z_1)|^2)\,(M^2 - |f(z_2)|^2)}} \tag{IV,3}$$

$$\widehat{P_1Q_1} = \operatorname{th} \frac{r_1}{2} = \frac{M\,|f(z_2) - f(z_1)|}{|M^2 - \overline{f(z_1)}\,f(z_2)|}, \tag{IV,3}$$

gde je prema (sl. 4.) $\overline{A_1B_1} = r_1$. Dakle, ako funkcija $w = \varphi(z)$ jednoznačno preslikava oblast $|z| < \boldsymbol{R}$ na oblast $|w| < \boldsymbol{R}$, onda će se ovom funkcijom jednoznačno preslikati granični lukovi (IV, 1) i (IV, 2) u njima odgovarajuće koaksialne granične lukove (IV, 3).

Iz gore rečenog, kad se uzme u obzir princip hiperbolične metrike [ 15 ], sleduju ove jednakosti:

$$
\text{(IV,4)} \quad \begin{cases} \dfrac{M\,|f(z_2)-f(z_1)|}{\sqrt{(M^2-|f(z_1)|^2)(M^2-|f(z_2)|^2)}} = e^{-d}\,\dfrac{R\,|z_2-z_1|}{\sqrt{R^2-|z_1|^2)(R^2-|z_2|^2)}}\,, \\[2ex] \dfrac{M\,|f(z_2)-f(z_1)|}{|M^2-\overline{f(z_1)}f(z_2)|} = e^{-d'}\,\dfrac{R\,|z_2-z_1|}{|R^2-\bar{z}_1 z_2|}\,, \end{cases}
$$

gde je

$$
\frac{\widehat{A_1B_1}}{\widehat{AB}} = \frac{\operatorname{sh}\frac{r_1}{2}}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}} = e^{-d}, \quad \frac{\widehat{P_1Q_1}}{\widehat{PQ}} = \frac{\operatorname{th}\frac{r_1}{2}}{\operatorname{th}\frac{r}{2}} = e^{-d'} \, (d=\overline{AA_1},\ d'=\overline{PP_1}).
$$

U specijalnom slučaju, ako je $f(0)=0$, ove jednakosti svode se na sledeće:

$$
|f(z)| = \frac{M\,|z|}{R\sqrt{e^d-(e^d-1)\left|\frac{z}{R}\right|^2}}\,, \quad |f(z)| = \frac{M}{R}\,e^{-d'}\,|z|\,.
$$

Odavde za $d=d'=0$ sleduje u oba slučaja $|f(z)|=\dfrac{M}{R}$. Dakle $d$ i $d'$ pretstavljaju rastojanja odnosnih graničnih lukova. Ovo rastojanje jednako je nuli za funkciju $f(z)=\dfrac{M}{R}e^{\alpha i}z$, a postaje beskonačno veliko ako je $f(z)=f(z_2)$ za $z_1 \neq z_2$. Prema tome ovo rastojanje je uvijek konačno u onoj oblasti $D_z$ u kojoj je funkcija $f(z)$ univalentna, dok postaje beskonačno veliko u izvjesnim tačkama oblast $D_z$ u kojoj je funkcija multivalentna.

Iz gore rečenog sleduju ovi rezultati

*Ako je funkcija $f(z)$ regularna u krugu $|z|<R$ i ako je $|f(z)|<M$ za $|z|<R$, tada je*

$$
\text{(IV,5)} \qquad \frac{M\,|f(z)-f(z_0)|}{\sqrt{(M^2-|f(z)|^2)(M^2-|f(z_0)|^2)}} \leqslant \frac{R\,|z-z_0|}{\sqrt{(R^2-|z|^2)(R^2-|z_0|^2)}}
$$

*ili*

$$
\text{(IV,6)} \qquad \frac{M\,|f(z)-f(z_0)|}{|M^2-\overline{f(z_0)}f(z)|} \leqslant \frac{R\,|z-z_0|}{|R^2-\bar{z}_0 z|}
$$

*gde se jednakost u krugu $|z|<R$ dostiže u oba slučaja samo ako je $f(z)=\dfrac{M}{R}e^{\alpha i}z$.*

Nejednakost (IV, 4) za $z=0$ i $f(0)=0$ svodi se na poznatu Schwarz-ovu nejednakost

$$f(z) \leqslant \frac{M}{R} |z| \qquad (|z|<R).$$

Odavde sleduje

$$f(z) = \left| \frac{M}{R} e^{-d'} |z| \right|,$$

gde je

$$\frac{P_1 Q_1}{\widehat{A_1 B_1}} = \frac{\operatorname{th}\frac{r_1}{2}}{\operatorname{th}\frac{r}{2}} = e^{-d'} \left( \operatorname{th}\frac{r_1}{2} = \left| \frac{f(z)}{M} \right|, \ \operatorname{th}\frac{r}{1} = \left| \frac{z}{R} \right| \right).$$

Dakle, prema Schwarz-ovoj lemi funkcija $\varphi(z) = \frac{R}{M} f(z)$ preslikava granični luk $\widehat{PQ}$ u granični luk $\widehat{P_1 Q_1}$ kao što je to na (sl. 4.) prikazato.

**4.2.** — U I odeljku ovog rada data je biunivoka korespondencija između tačaka ravni Lobačevskog i tačaka jedne od poluravnina: $Re\ z>0$ i $I_m\ z>0$.

Lukovi (sl. 4):

$$\widehat{AB} = \operatorname{sh}\frac{r}{2} = \frac{|z-z_0|}{2\sqrt{I_m z \cdot I_m z_0}}, \quad \widehat{A_1 B_1} = \operatorname{th}\frac{r}{2} = \left| \frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}} \right|;$$

$$\widehat{AB} = \operatorname{sh}\frac{r}{2} = \frac{|z-z_0|}{2\sqrt{R_e z \cdot R_e z_0}}, \quad \widehat{A_1 B_1} = \operatorname{th}\frac{r}{2} = \left| \frac{z-z_0}{z+\overline{z_0}} \right|$$

preslikaće se funkcijom $w=f(z)$, ako je $I_m\ f(z)>0$ za $I_m\ z>0$ ili ako je $Re\ f(z)>0$ za $Re\ z>0$ i ako je regularna u odnosnim poluravninama, respektivno u slijedeće granične lukove:

$$\text{(IV,7)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\widehat{PQ} = \operatorname{sh}\frac{r_1}{2} = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{2\sqrt{I_m f(z) \cdot I_m f(z_0)}}, \quad \widehat{P_1 Q_1} = \operatorname{th}\frac{r_1}{2} = \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-\overline{f(z_0)}} \right|; \\ &\widehat{PQ} = \operatorname{sh}\frac{r_1}{2} = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{2\sqrt{R_e f(z)\, R_e f(z_0)}} = \widehat{PQ} = \operatorname{th}\frac{r_1}{2} = \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)+\overline{f(z_0)}} \right|. \end{aligned} \right.$$

Iz gore rečenog i principa hiperbolične metrike sleduju ove jednakosti:

$$\text{(IV,8)} \qquad \frac{|f(z)-f(z_0)|}{\sqrt{I_m f(z)\, I_m f(z_0)}} = e^{-d} \frac{|z-z_0|}{\sqrt{I_m z\, I_m z_0}},$$

$$\text{(IV,8)} \qquad \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-\overline{f(z_0)}} \right| = e^{-d'} \left| \frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}} \right|;$$

$$
\text{(IV,9)} \qquad \begin{cases} \dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{\sqrt{R_e f(z)\, R_e f(z_0)}} = e^{-d} \cdot \dfrac{|z-z_0|}{\sqrt{R_e z\, R_e z_0}}, \\[2ex] \left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{f(z)+\overline{f(z_0)}}\right| = e^{-d'} \left|\dfrac{z-z_0}{z+\overline{z_0}}\right|, \end{cases}
$$

gde je $d$ i $d'$ otstojanje između odnosnih graničnih lukova. Odavde sleduje:

*Ako je funkcija $f(z)$ regularna u poluravnini $I_m z>0$ ili u poluravnini $R_e z>0$ i ako je $I_m f(z)>0$ za $I_m z>0$, ili ako je $R_e f(z)>0$ za $R_e z>0$, tada se respektivno ima*

$$
\text{(IV,10)} \qquad \frac{|f(z)-f(z_0)|}{\sqrt{I_m f(z)\, I_m f(z_0)}} \leqslant \frac{|z-z_0|}{\sqrt{I_m z\, I_m z_0}}, \quad \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-\overline{f(z_0)}}\right| \leqslant \left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right|;
$$

$$
\text{(IV,11)} \qquad \frac{|f(z)-f(z_0)|}{\sqrt{R_e f(z)\, R_e f(z_0)}} \leqslant \frac{|z-z_0|}{\sqrt{R_e z\, R_e z_0}}, \quad \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)+\overline{f(z_0)}}\right| \leqslant \left|\frac{z-z_0}{z+\overline{z_0}}\right|,
$$

*gde se jednakost u poluravnini dostiže funkcijom $f(z)=M.\ z$.*

Poslednja od ovih nejednakosti je poznata kao osnovna nejednakost Julia.

**4. 3.**— Granične lukove (IV, 1) i (IV, 2), kao što je to rečeno u tački 1., jednoznačna analitička funkcija $\varphi(z)=\dfrac{R}{M}f(z)$ ($|f(z)|<M$ za $|z|<R$) preslikava u granične lukove (IV, 3). Isto tako granične lukove (IV, 3) ova ista funkcija preslikava respektivno u granične lukove $\widehat{A_2B_2}$ i $\widehat{P_2Q_2}$. Dakle, funkcija

$$
\varphi_1=\varphi(\varphi)=\frac{R}{M}f_1\left(\frac{Rf(z)}{M}\right)
$$

preslikava granične lukove $\widehat{A_1B_1}$ i $\widehat{P_1Q_1}$ u granične lukove $\widehat{A_2B_2}$ i $\widehat{P_2Q_2}$. gde je $d_1$ i $d'_1$ njihovo odgovarajuće rastojanje. Prema tome je

$$
\widehat{AB}=e^{-(d+d_1)}\widehat{A_2B_2}, \quad \widehat{PQ}=e^{-(d+d_1)}\widehat{P_2Q_2}.
$$

Ako se ovaj postupak iterira $n$-puta, tada se dobija niz funkcija

$$
\text{(IV, 12)} \qquad \varphi_n=\varphi(\varphi_{n-1})=\frac{R}{M}f\left(\frac{R}{M}f_{n-1}\right)
$$

i njima odgovarajući niz graničnih lukova:

$$
\text{(IV, 13)} \qquad \widehat{A_nB_n}=\frac{M\left|f_n\left(\dfrac{R}{M}f(z_2)\right)\right| - f_n\left(\dfrac{R}{M}f(z_1)\right)\Big|}{\sqrt{\left(M^2-\left|f_n\left(\dfrac{R}{M}\left(f(z_1)\right)\right|^2\right)\left(M^2-\left|f_n\left(\dfrac{R}{M}f(z_2)\right)\right|^2\right)}},
$$

(IV, 14) $$\widehat{P_n Q_n} = \frac{M \left| f_n\left(\frac{R}{M} f(z_2)\right) - f_n\left(\frac{R}{M} f(z_1)\right) \right|}{\left| M^2 - f_n\left(\frac{R}{M} f(z_1)\right) f_n\left(\frac{R}{M} f(z_2)\right) \right|}.$$

Iz gore rečenog sleduju jednakosti:

(IV, 15) $$\begin{cases} \widehat{AB} = e^{s_n} \widehat{A_n B_n} & (s_n = d + d_1 + \cdots + d_{n-1}), \\ \widehat{PQ} = e^{s'_n} \widehat{P_n Q_n} & (s'_n = d' + d'_1, + \cdots, + d'_{n-1}), \end{cases}$$

gde je $d_i$ i $d'_i$ otstojanje respektivno između graničnih lukova $\widehat{A_i B_i}$ i $\widehat{A_{i+1} B_{i+1}}$, $\widehat{P_i Q_i}$ i $\widehat{P_{i+1} Q_{i+1}}$; Niz graničnih lukova (IV, 13) ili (IV, 14) čini jedan monotono opadajući niz

$$\widehat{A_n B_n} < \widehat{A_{n-1} B_{n-1}};\ \widehat{P_n Q_n} < \widehat{P_{n-1} Q_{n-1}}.$$

Prema tome ovi nizovi graničnih lukova konvergiraju. Ako bi granice ovih nizova bile različite od nule, tj. ako bi bilo

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{A_n B_n} = \widehat{A_o B_o},\ \lim_{n\to\infty} \widehat{P_n Q_n} = \widehat{P_o Q_o} \quad (\widehat{A_o B_o},\ \widehat{P_o Q_n} \neq 0),$$

tada bi prema (IV, 13) i (IV, 14) bilo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R}{M} f_n\left(\frac{R}{M} f(z_1)\right) = \alpha \quad (0 < |\alpha| < R),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R}{M} f_n\left(\frac{R}{M} f(z_2)\right) = \beta \quad (0 < |\beta| < R).$$

Tačke $\alpha$ i $\beta$ bile bi tada fiksne tačke funkcije $\varphi(z) = \frac{R}{M} f(z)$:

$$f(\alpha) = \frac{M}{R} \alpha \text{ i } f(\beta) = \frac{M}{R} \beta$$

i to atraktivne tačke. Niz (IV, 13) i (IV, 14) za $z_1 = \alpha$ i $z_2 = \beta$ ne bi bio monoton, tj. ne bi bio uslov (IV, 15) zadovoljen, što je prema principu hiperbolične metrike nemoguće. Isto tako uslov (IV, 15) ne bi bio ispunjen kada bi, recimo, tačka $\alpha$ bila indiferentna ili repulzivna tačka funkcije $\varphi(z)$. Dakle, nizovi (IV, 13) i (IV, 14) konvergiraju uniformno ka nuli, jer je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R}{M} f_n\left(\frac{R}{M} f(z_1)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{R}{M} f(z_2)\right) = \alpha$$

$$(z_1 \neq z_2,\ |\alpha| \leqslant R).$$

Funkcija $f(z) = e^{\alpha i} z$ čini invarijantnim granične lukove (IV, 1) i (IV, 2). Tako i funkcija

$$f(z) = e^{\alpha i} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (|z_0| < 1)$$

čini invarijantnim granične lukove (IV, 1) i (IV, 2) za $R = 1$ i $z_1 = z_0$.

Iz gore rečenog sleduje ovaj

**Stav 1.** — *Ako je funkcija* $w=f(z)$ *regularna u krugu* $|z|<R$, *ako ona nije oblika*

$$f(z)=e^{\lambda i}z,\ f(z)=e^{\lambda i}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\ (|z_0|<1), \tag{IV, 18}$$

*i ako je* $|f(z)|<M$ *za* $|z|<R$, *tada niz iteracija funkcije* $\varphi(z)=\frac{R}{M}f(z)$ *tj. niz*

$$\{f_n(z)\}\ (|z|<R),$$

*gde je*

$$f_1=\frac{R}{M}f\left(\frac{R}{M}f(z)\right),\ f_2=\frac{R}{M}f\left(\frac{R}{M}f_1\right),\ldots,$$

*konvergira određenoj konstanti* $\alpha$ *koja leži u krugu* $|z|=R$ *ili na njegovom rubu.*

*Fiksne tačke ove funkcije za* $|z|<R$ *leže na rubu kruga* $|w|=M$ *izuzev atraktivne tačke* $\alpha$, *gde je* $|\alpha|\leqslant R$.

Fiksne tačke makoje od supstitucija

$$\frac{z-z_p}{1-\overline{z}_p z}\quad (|z_p|<1,\ p=1,2,\ldots)$$

nalaze se na rubu kruga $|z|=1$ od kojih nijedna prema gornjem stavu nije atraktivna. Prema tome fiksne tačke racionalne funkcije

$$R\ (z)=\prod_{p=1}^{n}\frac{z-z_p}{1-\overline{z}_p z}\ (|R(z)|<1 \text{ za } |z|<1),$$

leže na rubu kruga $|z|=1$ od kojih jedna je prema stavu 1. atraktivna. Ako se uoči racionalna funkcija oblika Fatou-a

$$w=R(z)=\mu z\prod_{p=1}^{n-1}\frac{z-z_p}{1-\overline{z}_p z}\ (|\mu|<1) \tag{IV, 19}$$

tada je fiksna tačka $z=0$ atraktivna tačka, dok ostale fiksne tačke za $|z|\leqslant 1$ mogu da leže samo na rubu kruga $|w|=1$. Niz iteracija ove funkcije, tj. niz $\{R_n(z)\}$, uniformno konvergira ka nuli. Funkcija

$$K(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(z)}{s^n}\ (K'(0)=1),$$

gde je

$$s_n=\prod_{p=1}^{n-1}(-z_p)\ (|s|)<1),$$

zove se funkcija Koenigs-a. Ako je funkcija definisana redom

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}a_n z^n$$

$$(a_{n\to\infty},\ n\to\infty;\ |f_n\ (z)|<M \text{ za } |z|<R),$$

tada funkcija $\varphi(z)=\frac{R}{M}f(z)$ može u krugu $|z|<R$ prema gornjem stavu imati samo jednu fiksnu tačku, dok na rubu kruga $|z|=R$ ne može imati nijednu fiksnu tačku.

Funkcija

$$f(z)=\frac{-a_o}{a_n\ z^{n-1}+\ldots+a_2z+a_1}\qquad (a_i\neq 0,\ i=0,1,2,\ldots)$$

je regularna u krugu $|z|=R$, gde je $z=Re^{\alpha i}$ nula polinoma $a_nz^n+\ldots+a_1$. Fiksne tačke funkcije $\varphi(z)=\frac{R}{M}f(z)$ ($|f(z)|<M$ za $|z|<R$) nalaze se rješenjem jednačine

$$a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0\frac{R}{M}=0.$$

Prema stavu 1. ova jednačina može imati jedan i to samo jedan koren u krugu $|z|<R$. Ako su kod polinoma $n$-og stepena sledeći koeficijenti jednaki nuli: $a_m=0$, m $=2,3\ldots$, $n$-1, tada se jedan i to samo jedan koren jednačine $a_nz^n+a_1z+a_o\frac{R}{M}=0$ nalazi u krugu $|z|<\sqrt[n-1]{\frac{|a_1|}{|a_n|}}$.

**4.4.**— Ako je $|f(z)|<M$ za $|z|<1$, tada funkcija $\varphi(z)=\frac{f(z)}{M}$ ima prema stavu 1. u krugu $|z|=1$ ili na njegovom rubu atraktivnu tačku $z=\alpha$, sve ostale fiksne tačke leže na rubu ovog kruga. Ako je tačka $z=\alpha$ ($|\alpha|<1$) atraktivna tačka funkcije $\varphi(z)=\frac{f(z)}{M}$, tada će njen Taylor-ov razvoj glasiti

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n(z-\alpha)^n\quad (|z-\alpha|<r,\ a_o=M\alpha)$$

($r$ je poluprečnik konvergencije ovog reda). Prema tome funkcija

$$\psi\ (z)=\frac{f(z)-M\alpha}{(z-\alpha)f'(\alpha)}$$

je regularna u krugu $|z-\alpha|<r$. Ako se uoči na rubu kruga $|z-\alpha|=\rho$ ($\rho<r$) tačka $z=\beta_1$, tada ovoj tački i tački $z=\alpha$ odgovara granični luk

$$\frac{M'\,|\Psi(\beta_1)-\Psi(a)|}{\sqrt{M^2-|\Psi(\alpha)|^2)(M^2-|\Psi(\beta_1)|^2)}}\quad (|\Psi(z)|<M').$$

Odavde prema (IV,5) sleduje nejednakost

$$\text{(IV,22)}\qquad \frac{M'^2\,|A-\alpha-(\beta_1-\alpha)f'(\alpha)|^2}{(M'^2\rho^2|f'(\alpha)|^2-|A-M\alpha|^2)(M'^2-1)}<\frac{\rho^2}{r^2-\rho^2}\quad (A=f(\beta_1);\ \rho<r),$$

a iz ove sledeća

$$\frac{M'^2(|A-M\alpha|-\rho|f'(\alpha)|)^2}{(M'^2\rho^2|f'(\alpha)|^2-|A-M\alpha|^2)(M'^2-1)}<\frac{\rho^2}{r^2-\rho^2},$$

ili na kraju ova

$$(M'^2 r^2-\rho^2)|A-M\alpha|^2-2M'^2(r^2-\rho^2)|f'(\alpha)|\rho|A-M\alpha|+$$
$$+M'^2|f'(\alpha)|^2\rho^2(r^2-M'^2\rho^2)<0.$$

Poslednja nejednakost biće zadovoljena ako je

$$\text{(IV, 23)}\qquad \frac{M'\rho|f'(\alpha)|(r-\rho M')}{M'r-\rho}<|A-M\alpha|<\frac{M'\rho|f'(\alpha)|(r-\rho M')}{M'r+\rho}.$$

Neka bude funkcija $w=f(z)$ univalentna u krugu $|z-\alpha|<\rho$ $(\rho<r)$ i neka bude na rubu kruga $|z-\alpha|=\rho$ tačke $\beta_1$ i $\beta_2$ u kojima je

$$f(\beta_1)=f(\beta_2)=A$$

za funkciju $f(z)$ mjesto nejednakosti (IV, 22) ima se sledeća

$$\frac{M'|f'(\alpha)|A-M\alpha|\cdot|\beta_2-\beta_1|}{M'^2\rho^2|f'(\alpha)|^2-|A-M\alpha|^2}<\frac{r|\beta_2-\beta_1|}{r^2-\rho^2}$$

ili u obliku

$$r|A-M\alpha|^2+M'(r^2-\rho^2)|f'(\alpha)|\;|A-M\alpha|-M^2r\rho^2|f'(\alpha)|^2<0.$$

Ova nejednakost zadovoljena je ako je

$$|A-M\alpha|<\frac{M'|f'(\alpha)|\rho^2}{r}.$$

Iz ove nejednakosti i nejednakosti (IV, 23) sleduje ova nejednakost

$$\frac{M'\rho|f'(\alpha)|(r-\rho M')}{M'r-\rho}<\frac{M'|f'(\alpha)|\rho^2}{r}.$$

Ova nejednakost, kad se napiše u obliku

$$\rho^2-2M'r\rho+r^2<0,$$

biće zadovoljena ako je

$$r(M'-\sqrt{M'^2-1})<\rho<r(M'+\sqrt{M'-1}).$$

Iz gore rečenog proizlazi ovaj

**Stav 2.** — *Ako je funkcija $f(z)$ regularna u krugu $|z|<1$ $(|f(z)|<M, |z|<1)$, ako je $z=\alpha$ $(|\alpha|<1)$ atraktivna tačka funkcije $\frac{1}{M}f(z)$, tada je ona univalentna u izvjesnoj oblasti $\Delta_z$ koja sadrži tačku $z=\alpha$. Ako je*

$$\sum a_n(z-\alpha)^n\quad(a_0=M\alpha; |z-\alpha|<r)$$

*Taylor-ov razvoj funkcije $f(z)$, tada je ona univalentna u krugu*

$$\rho = |z - \alpha| = r\left(M' - \sqrt{M'^2 - 1}\right)$$

$$(|f(z) - M\alpha| < |f'(\alpha)|\, M'\, |z - \alpha|\,;\ |z - \alpha| < r) \tag{IV, 24}$$

*gde se jednakost dostiže funkcijom*

$$f(z) = \frac{M'(z-\alpha) f'(\alpha)(r - z + \alpha)}{M'r - z + \alpha} + M\alpha.$$

Poslednja jednakost iz ovog stava sleduje iz nejednakosti (IV, 23) kada se ista napiše kao jednakost pa potom zamijeni svuda $\rho$ sa $z - \alpha$.

Ako je $\alpha = 0$, tj. ako je $f\ (0) = 0$ i ako je $f'\ (0) = 1$, tada je u gornjim obrascima $M' = M$. Otud iz gornjeg stava proizlazi ovaj stav Montel [14] — Landau [12]:

*Ako je funkcija*

$$f(z) = z + a_2 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

*holomorfna u krugu* $|z| < 1$ *i ako je* $|f(z)| < M$ *za* $z < 1$, ***tada** je funkcija* $f(z)$ *univalentna u krugu*

$$\rho = M - \sqrt{M^2 - 1}$$

*gde se jednakost dostiže funkcijom*

$$f(z) = \frac{Mz(1 - Mz)}{M - z}.$$

**4.5.** — Pošto niz (IV. 13) kao i niz (IV, 14) uniformno konvergiraju prema stavu 1. ka nuli, to će u jednakostima (IV, 15) $s_n \to \infty, n \to \infty$, i $s_n' \to \infty$, $n \to \infty$. Ovi nizovi se asimptotski ponašaju kao

$$s_n = O(\lg \widehat{A_n B_n}), n \to \infty;\ s_n' = O(\lg \widehat{P_n Q_n}),\ n \to \infty.$$

Redovi

$$\widehat{AB} + \sum_1^\infty \widehat{A_n B_n} \ \text{ i } \ \widehat{PQ} + \sum_1^\infty \widehat{P_n Q_n}$$

konvergiraju za svaku tačku $z_1$, $z_2 = z$ i $\alpha$ koja leži u krugu $|z| < R$, zato što uniformno konvergira red

$$F(z) = |z - z_1| + \sum_1^\infty \left| f_n\left(\frac{R}{M} f\right)(z) - f_n\left(\frac{R}{M} f(z_1)\right) \right|,$$

koji geometriski pretstavlja parcijalnu sumu strana izlomljene linije koja konvergira ka tačkı $\alpha$. Kad se uzmu u obzir relacije (IV, 15), ovaj se red može napisati u obliku

$$\left\{\begin{aligned} F(z) &= |z - z_1| + \frac{1}{M\sqrt{(R^2 - |z|^2)(R^2 - |z_1|^2)}} \sum_1^\infty e^{-s_n} \sqrt{(M^2 - |f_n(z_1)|^2)(M^2 - |f_n(z_1)|^2} \\ F(z) &= |z - z_1| + \frac{1}{M\,|R^2 - \overline{z_1}\, z|} \sum_1^\infty e^{-s'_n}\, |M^2 - \overline{f_n(z_1)}\, f_n(z)| \end{aligned}\right. \tag{IV, 25}$$

Odavde izlazi da je red

$$\text{(IV, 26)} \qquad \sum_{0}^{\infty} \left| f_n' \left( \frac{R}{M} f(z) \right) \right| (f_o(z) = f(z); \ |z| < R$$

ekvikonvergentan sa redom

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-s_n} \left( M - \left| f_n \left( \frac{R}{M} f(z) \right) \right| \right. \ (|z| < R),$$

jer je prema (IV, 15)

$$\frac{M \left| f_n' \left( \frac{R}{M} f(z) \right) \right|}{M^2 - \left| f_n \left( \frac{R}{M} f(z) \right) \right|^2} = e^{-s_n} \frac{R}{R^2 - |z|^2}.$$

Pošto poslednji red konvergira, jer konvergıra red (IV, 25), to i red (IV, 26) uvjek konvergira.

Iz gore rečenog proizlazi ovaj rezultat

*Ako je funkcija $f(z)$ regularna u krugu $|z| < R$, ako je $|f(z)| \leqslant M$ za $|z| \leqslant R$ i ako je $\alpha$ $(|\alpha| \leqslant R)$ atraktivna tačka funkcije $\varphi(z) = \frac{R}{M} f(z)$, tada red*

$$\sum_{0}^{\infty} f'_n \left( \frac{R}{M} f(z) \right) (f_o(z) = f(z))$$

*apsolutno konvergira u krugu $|z| < R$.*

Ako je $f(z)$ homografija

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + b} \qquad (ad - bc = 1; \ |f| < R \text{ za } |z| < R),$$

koja ima atraktivnu tačku $\alpha$ i ako je niz iteracija ove funkcije

$$f_n = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n},$$

to će red

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(c_n z + d_n)^2} \qquad (c_o = c, \ d_o = d)$$

prema gornjem rezultatu apsolutno konvergirati u krugu $|z| < R$.

Uočimo konačan niz koaksijalnih graničnih lukova

$$\widehat{P_m Q_m} = \left| \frac{z - z_m}{1 - \overline{z}_m - z} \right| \quad (0 < |z_m| < 1; \ m = 1, 2, \ldots, p).$$

Funkciju

$$T_m(z) = \frac{z - z_m}{1 - z_m z}, \ m = 1, 2, \ldots, p,$$

kao što je to gore rečeno, čini invarijantnim samo jedan od ovih graničnih lukova i to $\widehat{P_m O_m}$, dok ostale granične lukove pomeraće u pravcu u kome koaksijalne ose konvergiraju. Ako se ovim funkcijama nastavi uzastopno pomjerane datih graničnih lukova, dobiće se tako jedan beskonačan niz graničnih lukova $\widehat{P_n Q_n}$ koji konvergira ka nuli tj. biće

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n(z)-T_n z_m}{1-\overline{T_n(z_m)}\,T_n(z)} = 0 \quad (m = 1,2,\ldots, p).$$

Na taj način se dobija od $p$ datih funkcija niz iteracija $\{T_n(z)\}$ koji konvergira konstanti $\alpha$, tj. biće

$$\lim_{n\to\infty} T_n(z) = \alpha \qquad (|\alpha| < 1).$$

Kako je prema gore rečenom

$$\widehat{P_n Q_n} = \left| \frac{T_n(z)-T_n(z_m)}{1-\overline{T_n(z_m)}\,T_n(z)} \right| = e^{-s'_n} \left| \frac{z-z_m}{1-\bar{z}_m z} \right|,$$

to će red

$$\sum \widehat{P_n Q_n}$$

konvergirati. Odavde a na osnovu ranije rečenog sleduje apsolutna konvergencija reda

$$\sum_1^{\infty} T_n'(z).$$

Zbog toga će $\theta$-funkcija, tj. funkcija

$$\theta(z) = \sum_1^{\infty} H(T_n)\,T_n'(z) \qquad (|H(T_n)| < M \quad \text{za} \quad |z| < R),$$

gde je $H(z)$ racionalna funkcija, apsolutno konvergira i u krugu $|z| < R$.

Prema gore rečenom može se formulisati ovaj

**Stav 3.** — *Neka budu članovi niza $\{f_n(z)\}$ regularne funkcije u oblasti $D_z$, neka bude $|f_n(z)| < M$ za $z \in D_z$. Ako je zadovoljen uslov*

$$\text{(IV, 27)} \quad \frac{|f_n(z)-f_n(z_o)|}{\sqrt{(M^2-|f_n(z)|^2)(M^2-|f_n(z_o)|^2)}} < \frac{|f_{n-1}(z)-f_n(z_o)|}{\sqrt{(M^2-|f_{n-1}(z)|^2)(M^2-|f_{n-1}(z)|^2)}}$$

$$(n = 2,3,\ldots;\ z_o, z \in D_z;\ f_n(z_o) \neq f_{n-1}(z_o)),$$

*ili što je isto uslov*

$$\frac{|f_n(z)-f_n(z_o)|}{|M^2-\overline{f_n(z_o)}f_n(z)|} < \frac{|f_{n-1}(z)-f_{n-1}(z_o)|}{|M^2-\overline{f_{n-1}(z_o)}f_{n-1}(z)|}$$

$$(f_n(z_o) \neq f_{n-1}(z_o);\ z_o, z \in D_z).$$

*tada je*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z).$$

*Ako je $f(z)$ konstanta $w_o$ ($|w_o| < M$) tada je red*

$$\sum H(f_n) f'_n(z),$$

*gde je $H(f_n)$ regularna funkcija za $z \in D_z$, apsolutno konvergira u oblasti $D_z$.*

Neka su članovi niza $\{a_n z^n\}$ u izvjesnoj oblasti $D_z$ po apsolutnoj vrijednosti ograničeni i neka zadovoljavaju uslov (IV, 27). Prema ovom uslovu a na osnovu ranije rečenog sleduje ova relacija

$$z_o \neq 0, \quad \frac{|a_n|\,|z^n - z_o^n|}{\sqrt{(M^2 - |a_n z^n|^2)(M^2 - |a_n z_o^n|^n)}} = e^{-s_n} \quad \frac{|a_1|\,|z - z_o|}{\sqrt{(M^2 - |a_1 z|^2)(M^2 - |a_1 z_o|^2}}$$

Otud je

$$\frac{n\,|a_n| \cdot |z^n|}{M^2 - |a_n z^n|^2} < \frac{|a_1|}{M^2 - |a_1 z|^2},$$

ili

$$|a_n| < \frac{-n(M^2 - |a_1 z_o|)\,|z_o^{n-1}| + \sqrt{n^2 (M^2 - |a_1 z_o|^2\,|z_o^{n-1}|^2 + 4 M^2 |a_1|\,|z_o|^{2n}}}{2\,|a_1|\,|z_o|^{2n}}$$

$$= \frac{-n(M^2 - |a_1 z_o|^2)\,|z_o^{n-1}| + n(M^2 - |a_1 z_o|^2)\,|z_0^{n-1}|\left[1 + \frac{2M^2 |a_1|\,|z_o|^2}{n^2 (M^2 - |a_1 z_o|)^2} - \cdots\right.}{2\,|a_1|\,|z_o|^{2n}}$$

$$< \frac{M^2 |z_o|}{n(M^2 - |a_1 z_o|^2)\,|z_o|^n}.$$

Odavde je

$$|z_o|^n < \frac{M^2 |z_o|}{n(M^2 - |a_1 z_o|^2)\,|a_n|},$$

ili na kraju

$$|z_o| < \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Dakle prema stavu 3. funkcija $F(z) = \sum f_n(z)$ je analitička u krugu $|z| < R$.

Ako se uoči niz

$$\{a_n e^{-\lambda_n s}\}$$

$$(\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty, \ n \to \infty; \ s = x + yi; \ |a_n e^{-\lambda_n s}| < M, s \in D_s)$$

tada će uslov (IV, 27) biti zadovoljen u onoj oblasti $s \in D_s$ u kojoj je u isto vrijeme zadovoljen uslov

$$|e^{-\lambda_n s}| < \frac{M^2 |e^{-\lambda_1 s}|}{\lambda_n (M^2 - |a_1 e^{-\lambda_1 s}|^2)\,|a_n|}.$$

Ovaj se uslov dobiva po istom postupku kao i u prethodnom primjeru. Odavde proizlazi da je prema stavu 3. funkcija

$$F(s) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

regularna u onoj oblasti $D_s$ u kojoj je

$$R_e s > \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lg |a_n|}{\lambda_n}.$$

Apscisa apsolutne konvergencije reda $F(s)$ nije uvijek prava

(IV, 29) $$x = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lg |a_n|}{\lambda_n}.$$

Ovo nastupa zbog toga što smo u jednakosti

$$\frac{|a_n|\,|e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_n s_0}|}{[(M^2 - |a_n e^{-\lambda_n s}|^2)(M^2 - |a_n e^{-\lambda_n s_0}|^2)]^{1/2}} = e^{-s_n} \frac{|a_1|\,|e^{-\lambda_1 s} - e^{-\lambda_1 s_0}|}{[(M^2 - |a_1 e^{-\lambda_1 s}|^2)(M^2 - |a_1 e^{-\lambda_1 s_0}|^2)]}$$

gde, na osnovu rečenog u II glavi, nil $\{s_n\}$ se mora asimptotski ponašati bar kao

$$s_n \backsim \lg(n \lg n \cdots \lg_p^{\alpha} n), \quad n \to \infty \quad (\alpha > 1).$$

Kad se ovo uzme u obzir, ako se dolazi do zaključka, da razlika između apscise konvergencije i apscise apsolutne konvergencije reda $F(s)$ ne prelazi broj

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lg(n \lg n \cdots \lg_p^{\alpha} n)}{\lambda_n}.$$

Odavde očevidno izlazi, da se apscisa apsolutne konvergencije određuje formulom (IV, 29) kada je [17 b]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lg(n \lg n \cdots \lg_p^{\alpha} n)}{\lambda_n} = 0.$$

**4.5.** — Neka bude $f(z)$ regularna funkcija u krugu $|z| < R$ i neka je $|f(z)| < M$ za $|z| < R$. Uočimo u krugu $|z| < R$ takve dvije tačke $\beta_1$ i $\beta_2$ u kojima je $f(\beta_1) = f(\beta_2) = A$ i krug poluprečnika $\rho$ sa centrom u tački $\alpha_1$, koji će prolaziti kroz ove dvije tačke, a u kome će funkcija $f(z)$ biti univalentna. Egzistenciju ovakvog kruga nije teško ustanoviti, pošto može biti samo konačan broj tačaka, koje leže u krugu $|z| < R$, u kojima funkcija $f(z)$ može dobiti vrednost $A$. Poluprečnik $\rho$ prema stavu 2. dat je relacijom

$$\rho = r(M' - \sqrt{M'^2 - 1}),$$

gde je $r$ poluprečnik konvergencije reda

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (z - \alpha_1)^n,$$

a $M'$ je pozitivna konstanta koja zadovoljava relaciju

$$|f(z)-f(\alpha_1)|< M'|f'(\alpha_1)||z-\alpha_1|$$
$$(a_o=f(\alpha_1), |z-\alpha_1|< r).$$

Kako je $M'>1$, to iz ove nejednakosti slijedi ova

$$|f'(\alpha_1)|<\left|\frac{f(z)-f(\alpha_1)}{z-\alpha_1}\right|,$$

a iz ove sledeća

$$|f'(\alpha_1)|=\left|\lim_{z\to\alpha_1}\frac{f(z)-f(\alpha_1)}{z-\alpha_1}\right|.$$

Odavde proizlazi ovaj uslov konformnosti na rubu

(IV, 28) $$|f'(Re^{\lambda i})|=\left|\lim_{z\to Re^{\lambda i}}\frac{f(z)-Me^{\lambda i}}{z-Re^{\lambda i}}\right|.$$

4.5.1. — Neka bude funkcija $w=f(z)$ holomorfna u krugu $|z|< R$ i neka bude $|f(z)|< M$ za $|z|< R$. Kad $z$ u krugu $|z|< R$ opiše krivu $(C)$, tada će funkcija $f(z)$ opisati u krugu $|w|< M$ njoj odgovarajuću krivu $(C_1)$. Ovim krivim odgovaraće u ravni Lobačevskog krive $(C')$ i $(C'_1)$. Odnos između elemenata lukova krivih $(C)$ i $(C_1)$ i njima odgovarajućih elemenata $\mathrm{d}r$ i $\mathrm{d}r_1$ u ravni Lobačevskog dat je prema (IV, 1) i (IV, 3) ovim obrascima

$$\frac{\mathrm{d}r}{|\mathrm{d}z|}=\frac{R}{R^2-|z|^2},\ \frac{\mathrm{d}r_1}{|\mathrm{d}w|}=\frac{M}{M^2-|f(z)|^2}\quad(|z|< R).$$

Odavde očevidno sleduje

(IV, 29) $$|f'(z)|=\frac{R}{M}\cdot\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{M^2-|f(z)|^2}{R^2-|z|^2},$$

gde je

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}r}=e^{-d}\,(d>0).$$

Iz gore rečenog sleduje:

*Ako je funkcija $f(z)$ regularna u krugu $|z|< R$ i ako je $|f(z)|< M(|z|< R)$, tada je*

$$|f'(z)|<\frac{R}{M}\cdot\frac{M^2-|f(z)|^2}{R^2-|z|^2}.$$

*U atraktivnoj tački $\alpha\,(|\alpha|< R)$ funkcije $\varphi(z)=\frac{R}{M}f(z)$ ima se*

$$|f'(\alpha)|<\frac{M}{R}.$$

Ako se atraktivna tačka $\alpha$ nalazi na rubu kruga $|z|=R$, tj. ako je $\alpha = Re^{\lambda i}$, tada će niz

$$f_n' = (f_n)'_{f_{n-1}} \cdot \cdot \cdot (f_1)'_f \cdot f_z' \cdot \left(\frac{R}{M}\right)^n,$$

gde nam $\left\{\frac{Rf_n}{M}\right\}$ pretstavlja niz iteracija funkcije $\varphi(z) = \frac{R}{M} f(z)$, biti nula-niz. Ovaj niz biće nula-niz kad god je

$$\left| \overline{\lim_{n\to\infty}} (f_{n-p})'_{f_{n-p+1}} \right| < \frac{R}{M}$$

$$(p \geqslant 0;\ f_{n-p} \to \frac{M}{R}\alpha,\ n \to \infty).$$

Dakle, kad se atraktivna tačka $\alpha$ nalazi na rubu kruga $|z|=R$, tada je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f'(z_n)| < \frac{M}{R} (|z_n| < R;\ z_n \to Re^{\lambda i},\ n \to \infty).$$

**4.6.** — Ako je tačka $z = Re^{\lambda i}$ fiksna tačka funkcije $\varphi(z) = \frac{R}{M} f(z)$, gde je $|f(z)| < M$ za $|z| < R$ i ako niz tačaka $\{z_n\}$ konvergira ka tački $Re^{\lambda i}$, tj, ako je $\lim_{n\to\infty} z_n = Re^{\lambda i}$, tada se prema (IV, 29) ima

$$\text{(IV, 30)} \qquad \lim_{n\to\infty} |f'(z_n)| \leqslant \frac{R}{M} \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{M^2 - |f(z_n)|^2}{R^2 - |z_n|^2} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{M - |f(z_n)|}{R - |z_n|} = k \quad (|z_n| < 1)$$

Isto tako iz relacije (IV, 4) u tački $f(Re^{\lambda i}) = Me^{\lambda i}$ proizlazi ovaj rezultat

$$\text{(IV, 31)} \qquad \frac{|Me^{\lambda i} - f(z_n)|^2}{M^2 - |f(z_n)|^2} < \frac{R}{M} \cdot \frac{|Re^{\lambda i} - z_n|^2}{R^2 - |z_n|^2} \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{M - |f(z_n)|}{R - |z_n|}.$$

Iz relacija (IV, 30) i (IV, 31) a u vezi (IV, 28) proizlazi ovaj stav Julia [9] i Bieberbach-a [2].

*Ako je funkcija $f(z)$ regularna u krugu $|z| < R$, ako je $|f(z)| < M$ za $|z| < R$ i ako je $f(Re^{\lambda i}) = Me^{\lambda i}$, $|f'(Re^{\lambda i})| = k$, tada je*

$$\text{(IV, 32)} \qquad \frac{|Me^{\lambda i} - f(z)|^2}{M^2 - |f(z)|^2} < \frac{R}{M} k \frac{|Re^{\lambda i} - z|^2}{R^2 - |z|^2},$$

*gede je broj $k$ konačan i ima jednu od sledećih vrijednosti*

$$k = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{M - |f(z_n)|}{R - |z_n|},\ |f'(Re^{\lambda i})| = k$$

$$(|z_n| < R;\ z_n \to Re^{\lambda i},\ n \to \infty).$$

Iz gore navedenih uslova sleduje: ako je funkcija $f(z)$ regularna u krugu $|z|< R$, ako je $|f(z)|< M$ za $|z|< R$ i ako je $f(Re^{\lambda i}) = Me^{\lambda i}$, tada, ako egzistira jedna od granica

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{Me^{\lambda i}-f(z_n)}{Re^{\lambda i}-z_n}$$

$$(|z_n|< R;\ z_n\to Re^{\lambda i},\ n\to\infty),$$

egzistira i druga. Da bi se imalo pretstavljanje konformno na granici $z = Re^{\lambda i}$, potrebno je i dovoljno da su ove granice jednake, konačne i različite od nule. Detaljnija obaveštenja mogu se naći u knjizi pod [7].

Ako je funkcija $f(z)$ regularna u krugu $|z|< R$, ako je $|f(z)|< M$ za $|z|< R$ i $f(Re^{\lambda i}) = Re^{\lambda i}$, gde je tačka $z = Re^{\lambda i}$ atraktivna tačka funkcije $\varphi(z) = \frac{R}{M} f(z)$, tada relacija (IV, 32) ima oblik

$$\frac{|Me^{\lambda i}-f(z)|^2}{M^2-|f(z)|^2} < \frac{|Re^{\lambda i}-z|^2}{R^2-|z|^2},$$

jer je, prema rečenom u prethodnoj tački, $|f'(Re^{\lambda i})|< \frac{M}{R}$.

Uočimo funkciju $f(z)$ koja je definisana redom

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \tag{IV, 33}$$

koji je konvergentan u krugu $|z| = 1$. Autor je pokazao [10 d]: ako se uzme za $F(t)$ funkcija

$$F(t) = \sum_1^\infty \left(\frac{z}{e^{\alpha i}}\right)^n t^{n-1}$$

i ako je $\Delta^{n-1}(a_1 e^{\alpha i})\to 0,\ n\to\infty;\ a_n\to 0,\ n\to\infty$, tada je

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = a_o + \sum_1^\infty \Delta^{n-1}(a_1 e^{\alpha i}) \frac{F^{(n-1)}(1)}{(n-1)!} =$$

$$= a_o + \sum_1^\infty \Delta^{n-1}(a_1 e^{\alpha i}) \left(\frac{z}{e^{\alpha i}-z}\right)^n$$

$$(|z|< 1;\ \Delta^{n-1}(a_1 e^{\alpha i}) = a_n e^{n\alpha i} - \binom{n-1}{1} a_{n-1} e^{-(n-1)\alpha i} + \cdots \pm a_1 e^{\alpha i}).$$

Odavde za $z = e^{\alpha i}(1-\frac{1}{\rho})$, kada je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Delta^{n-1}(a_1 e^{\alpha i})} = 0$, ima se

(IV, 34)
$$\sum_0^\infty a_n e^{n\alpha i}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n = a_o + \sum_1^\infty \Delta^{n-1}(a_1 e^{\alpha i})(\rho-1)^n =$$
$$= \sum_0^\infty \Delta^n s_o(\rho-1)^n = f(e^{\alpha i}),\ \rho\to\infty\quad \left(s_n=\sum_0^n a_m e^{m\alpha i}\right).$$

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta^{n-1}(a_1e^{\alpha i})}=0$, tada funkcija $f(z)$ pretstavljena ovim redom ima na rubu konvergencije jedini singularitet (esencijalni) tačku $z=e^{\alpha i}$. Prema tome će u ovoj tački biti $f(e^{\alpha i})=Me^{\alpha i}$, gde je $|f(z)|<M$ za $|z|<1$.

Iz gore rečenog sleduje ovaj rezultat:

*Ako je $|f(z)|<M$ za $|z|<1$, gde je $f(z)$ funkcija definisana redom (IV, 33) koji je konvergentan za $|z|<1$, ako je red*

$$\sum_0^\infty a_n e^{n\alpha i}$$

*zbirljiv po postupku (IV, 34), gde je $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta^{n-1}(a_1e^{\alpha i})}=0$, tada je tačka $z=e^{\alpha i}$ fiksna tačka funkcije $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{M}$, tj. $f(e^{\alpha i})=Me^{\alpha i}$.*

**4.7.** — Uočimo funkciju $f(z)$ koja je regularna u poluravnini $Re\,z>0$ i $Re\,f(z)>0$ za $Re\,z>0$. Prema nizu iteracija ove funkcije, tj. prema nizu $f_n(z)=f(f_{n-1})$ može se formirati ovaj niz graničnih lukova

(IV, 35)
$$\left\{\frac{|f_n(z_2)-f_n(z_1)|}{\sqrt{Re\,f_n(z_1)\,Re\,f(z_2)}}\right\}$$

gde je $Re\,z_i>0\,(i=1,2)$. Ako je broj članova ovog niza u oblasti $D_z$ $(z_i\in D_z,\ i=1,2)$ koja leži u poluravnini $Re\,z>0$, u izvjesnim tačkama konačan, tada je ova funkcija multivalentna u ovoj oblasti. Ako je broj članova ovog niza u oblasti $D_z$ beskonačno veliki, tada je ova funkcija univalentna u ovoj oblasti. Svi su članovi ovog niza tada različiti međusobom, sem u slučaju kada je data funkcija homografija sa indiferentnom tačkom u ovoj poluravnini.

Prema ranije rečenom niz (IV, 35) monotono opada kad god data funkcija $f(z)$ nije homografija. Zbog toga on konvergira, a kad on konvergira onda konvergira i niz iteracija ove funkcije. Ovde kao i u prethodnom slučaju izlazi: 1) da funkcija $f(z)$ ima samo jednu atraktivnu tačku $\alpha$ koja leži u poluravnini $Re\,z>0$, 2) da postoji izvjesna oblast $D_z$ koja sadrži u svojoj unutrašnjosti ili na rubu tačku $\alpha$ u kojoj je ova funkcija univalentna. Dakle, od invarijantnih tačaka: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ funkcije $f(z)$, koje se nalaze rešenjem jednačine $f(z)=z$, samo se jedna i to atraktivna nalazi u poluravnini $Re\,z>0$. Prema tome nizom iteracija $\{f_n(z)\}$ $(Re\,z>0)$ konvergira uniformno ka tački $\alpha$ $(Re\,\alpha>0)$. Ostale fiksne tačke leže na pravoj $Re\,z=0$ ili u beskonačnosti.

Prema gore rečenom a na osnovu 1. i 2. može se formulisati ovaj

**Stav 4.** — *Ako je funkcija $f(z)$ regularna u poluravnini $Re\,z > 0$, ako ona nije homografija sa indiferentnom tačkom u ovoj poluravnini i ako je $Re\,f > 0$ za $Re\,z > 0$, tada niz iteracija ove funkcije, tj. niz*

$$f_n(z) = f(f_{n-1}(z)) \quad (Re\,z > 0),$$

*uniformno konvergira određenoj konstanti $\alpha$ koja leži u poluravnini $Re\,z > 0$, ili na rubu $Re\,z = 0$ ili u beskonačnosti.*

*Fiksne tačke ove funkcije za $Re\,z \geqslant 0$ leže na pravoj $Re\,z = 0$ ili u beskonačnosti izuzev atraktivne tačke $\alpha$ ($Re\,\alpha > 0$ ili $\alpha = \infty$).*

*Ova funkcija je univalentna u onoj oblasti $D_z$ koja sadrži atraktivnu tačku $\alpha$. Ako je*

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \quad (a_o = \alpha; \quad |z-\alpha| < r)$$

*Taylor-ov razvoj ove funkcije u okolini tačke $\alpha$, tada je ona univalentna u krugu*

$$\rho = |z-\alpha| = r\left(M - \sqrt{M^2-1}\right) \tag{IV, 36}$$

$$(|f(z)-\alpha| < M\,|z-\alpha|\,|f'(\alpha)|, \ |z-\alpha| < r).$$

*Ako je $\alpha = \infty$, onda se univalencija ove funkcije proteže počev od $|z| > R$, gde e $R$ vrlo veliki broj, u sektoru $|y| = kx\,(k > 0)$ do beskonačnosti.*

U ovom stavu sadržan je pored stava Valiron-a [17 c] i stav Wolff-a [19] i Denjoy-a [5 b] koji prema formulaciji Valiron-a [17 c] glasi:

*Ako je funkcija $f(z)$ regularna u poluravnini $Re\,z > 0$, ako je $Re\,f(z) > 0$* za *$Re\,z > 0$ i ako ona nije homografija sa indiferentnom tačkom u ovoj poluravnini, tada niz iteracija ove funkcije uniformno konvergira bilo prema beskonačnosti bilo prema jednoj konstanti $\alpha$ ($Re\,\alpha > 0$).*

Prema nizu graničnih lukova koji odgovaraju poluravnini $Re\,z > 0$ ili $Im\,z > 0$ može se stav 3. na ovaj način formulisati:

*Neka budu članovi niza funkcija $\{f_n(z)\}$ regularne funkcije u oblasti $D_z$. Ako su ispunjeni uslovi:*

$$\frac{|f_n(z)-f_n(z_o)|}{\sqrt{Re\,f_n(z)\,Re\,f_n(z_o)}} < \frac{|f_{n-1}(z)-f_{n-1}(z_o)|}{\sqrt{Re\,f_{n-1}(z)\cdot Re\,f_{n-1}(z_o)}},$$

$$(Re\,f_n(z) > 0 \ \text{za} \ z \in D_z;\ f_n(z_o) \neq f_{n-1}(z_o))$$

*ili što je isto uslovi*

$$\left|\frac{f_n(z)-f_n(z_o)}{f_n(z)+\overline{f_n(z_o)}}\right| < \left|\frac{f_{n-1}(z)-f_{n-1}(z_o)}{f_{n-1}(z)+\overline{f_{n-1}(z_o)}}\right|;$$

$$\frac{|f_n(z)-f_n(z_o)|}{\sqrt{Im\,f_n(z)\,Im\,f_n(z_o)}} < \frac{|f_{n-1}(z)-f_{n-1}(z_o)|}{\sqrt{Im\,f_{n-1}(z)\,Im\,f_n(z_o)}}$$

$$(Im\,f_n(z) > 0 \ \text{za} \ z \in D_z;\ f_n(z_o) \neq f_{n-1}(z_o)),$$

*ili što je isto uslovi*

$$\left|\frac{f_n(z)-f_n(z_o)}{f_n(z)-\overline{f_n(z_o)}}\right| < \left|\frac{f_{n-1}(z)-f_{n-1}(z_o)}{f_{n-1}(z)-\overline{f_{n-1}(z_o)}}\right|,$$

*tada je*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z).$$

*Ali ako je $f(z)$ konstanta $\alpha$ ($Re\,\alpha > 0$ ili $Im\,\alpha > 0$), tada je red*

$$\Sigma\, H(f_n) f'_n(z) \quad (|H_n(f_n)| < M \text{ za } z \in D_z)$$

*apsolutno konvergira u oblasti $D_z$.*

**4.8.** — Iz obrazaca (IV, 8) i (IV, 9) sleduje

$$|f'(z)| = e^{-d}\frac{Re f(z)}{Re\, z} \quad (Re f(z) > 0 \text{ za } Re\, z > 0),$$

$$|f'(z)| = e^{-d}\frac{Im f(z)}{Im\, z} \quad (Im f(z) > 0 \text{ za } Im\, z > 0),$$

gde je $e^{-d} = \dfrac{dr_1}{dr} < 1$ $\left(dr_1 = \dfrac{|df(z)|}{Re f(z)}\right.$ ili $\left. dr_1 = \dfrac{|df(z)|}{Im f(z)}\right)$ je elemenat luka u ravni Lobačevskog. Odavde sleduju ove nejednakosti:

$$\text{(IV, 37)} \quad \begin{cases} |f'(z)| < \dfrac{Re f(z)}{Re\, z} & (Re f(z) > 0 \text{ za } Re\, z > 0); \\[2ex] |f'(z)| < \dfrac{Im f(z)}{Im\, z} & (Im f(z) > 0 \text{ za } Im\, z > 0). \end{cases}$$

Iz ovih nejednakosti sleduje $|f'(\alpha)| < 1$ ($Re\,\alpha > 0$ ili $Im\,\alpha > 0$) gde je $\alpha$ atraktivna tačka date funkcije $f(z)$.

**4.9.** — Neka je funkcija $w = f(z)$ holomorfna u poluravnini $Re\, z > 0$ i neka je $Re f(z) > 0$ za $Re\, z > 0$ i neka je $f(\infty) = \infty$. Tada iz (IV, 36) sleduje

$$\text{(IV, 37)} \qquad \lim_{x\to\infty} |f'(z)| < \lim_{x\to\infty} \frac{Re f(z)}{Re\, z} \quad (z = x + yi,\ |y| < kx,\ k > 0).$$

Ovu funkciju možemo smatrati kao linearnu transformaciju funkcije $\varphi(z)$, gde je $|\varphi(z)| < 1$ za $|z| < 1$, $\varphi(e^{\alpha i}) = e^{\alpha i}$. Transformacija oblika

$$z = \frac{e^{\alpha i} + \lambda}{e^{\alpha i} - \lambda}$$

preslikava krug $|\lambda| = 1$ u poluravninu $Re\, z > 0$. Prema tome tačka $z = \infty$ biće invarijantna tačka funkcije

(IV, 38) $$f(z)=f\left(\frac{\lambda+e^{\alpha i}}{\lambda-e^{\alpha i}}\right)=\frac{e^{\alpha i}+\varphi(\lambda)}{e^{\alpha i}-\varphi(\lambda)}\quad (\varphi(e^{\alpha i})=e^{\alpha i},\ z=x+yi).$$

Odavde, kada je $\varphi(e^{\alpha i})=e^{\alpha i}$, proizlazi ovaj rezultat

$$\lim_{\lambda\to e^{\alpha i}}\frac{1-|\varphi(\lambda)|}{1-|\lambda|}=\lim_{\lambda\to e^{\alpha i}}\frac{1-|\varphi(\lambda)|^2}{1-|\lambda|^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{Re\,f(z)}{Re\,z}\left|\frac{z}{f(z)}\right|^2\quad (|y|<kx,\ k>0).$$

Ako ovi nizovi konvergiraju uniformno ka broju $p$, tada je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Re\,f(z)}{Re\,z}=p\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z}\right|^2\quad (p>0).$$

Zbog toga izraz (IV, 37) dobiva u ovom slučaju ovaj oblik

(IV, 39) $$\lim_{x\to\infty}|f'(z)|<p\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z}\right|^2,\ p>0.$$

Uslov konformnosti funkcije $\varphi(\lambda)$, koja je data relacijom (IV, 38) u tački $\lambda=e^{\alpha i}$ izražava se prema (IV, 39) slijedećom relacijom

(IV, 40) $$\lim_{x\to\infty}f'(z)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(z)}{z}=C,;\ (|y|<kx,\ k>0).$$

Odavde izlazi, kada je uniformno ispunjen uslov

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(z)}{z}=C\quad (C>1,\ |y|<kx,\ k>0)$$

tačka $z=\infty$ je atraktivna tačka funkcije $f(z)$, jer je tada $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)>1$, ($|y|<kx,\ k>0$). Detaljnije o ovom slučaju kao i slučaju $C=1$ može se naći kod Valiron-a [17c].

U ovom slučaju relacija (IV, 40) može se napisati u obliku

$$\lim_{x\to\infty}f'(z)\leqslant p\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^2,\ p>0.$$

Iz ovog uslova kao i uslova (IV, 40) sleduje ovaj rezultat

$$\frac{1}{p}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{Re\,z}{Re\,f(z)}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^2\right]\leqslant C.$$

Odavde proizlazi ovaj kriterijum Caratheodory-a [3]:

Da bi uglovni izvod $C$ bio veći ili jednak od $C_o$, potrebno je da postoji takav niz brojeva $z_n$ da je

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}f(z_n)=\infty$$

$$\frac{Re\,z_n}{Re\,f(z_n)}\left|\frac{f(z_n)}{z_n}\right|^2\geqslant C_o.$$

*RÉSUMÉ*

## CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DE LA THÉORIE DES SÉRIES À TERMES POSITIFS ET À LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES À L'AIDE DE LA GÉOMETRIE DE LOBATCHEWSKY

*Lazar Karadžić*

Envisageons dans le plan une suite de points

$$\{M_n(S_n, a_n)\} \ (S_n = \sum_1^n b_m; a_n, b_n > 0).$$

D'après cette suite on peut former la série

$$\Sigma\, a_n b$$

dont les termes représentent une suite de surfaces de rectangles $\{a_n b_n\}$. Dans la II[e] partie du présent travail on a démontré comment on peut, d'après la suite de points dans le plan de Lobatchewsky, c. à d. d'après la suite (II,1), former la série correspondante (II,2). Les termes de cette série sont ces quadrilatères-là qui sont limités par les arcs limites coaxiaux et leurs axes ou bien ce sont, dans le cas spécial, des secteurs. Pour les séries obtenues de cette façon-ci on a trouvé, à l'aide de l'observation géométrique, les condisions de leur convergence, comme par exemple:

*Si la condition* (II,3) *est satisfaite, la série* (II,2) *convergera.*

De la série (II,2), par voie de substitution (II,17), on obtient la série (II,16). Pour cette série-ci la condition susmentionnée de convergence peut être formulée de la façon suivante:

*Si la condition (II, 21) est remplie, la série (II, 16) convergera alors pour $\mu > 1$ et divergera pour $\mu \leqslant 1$.*

Nous pouvons considérer les termes de cette série, lorsque ceux-ci sont positifs, comme arcs limites, disposés entre deux parallèles. D'après la condensation de ces arcs limites on obtient, outre les critères connus, tels que ceux de Cauchy, de D'Alembert, de Raabe et des autres auteurs, aussi les critères suivants:

*La série* (II,16) *converge si*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{\lg(n \lg n \ldots \lg_i n)} \left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) > 1,$$

*et diverge si*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{\lg(n \lg n \ldots \lg_i n} \left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \leqslant 1.$$

*La série (II, 16) converge si*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lg(a_n n \lg n \cdots \lg_{i-2} n)}{\lg_i n}\right) < 0$$

*et diverge si*

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lg(a_n n \lg n\cdots\lg_{l-2} n)}{\lg_l n}\right)>0.$$

*Si la condition (II, 35) et la condition* $S_n=\sum_1^n b_m\to\infty$, $n\to\infty$, *sont remplies la série (II, 32) converge pour* $\mu>1$, *et diverge pour* $\mu\leqslant 1$.

Pour les séries dont les termes forment une suite monotone, on a déduit, selon la méthode géométrigue sus-mentionnée, les critères suivants:

*Si une suite de nombres* $\{S_{q_n}\}$, *où* $S_{q_n}$ *est une suite partielle de la suite* $\{S_n\}\equiv\sum_1^n b_m$ $(b_n=O(1),\ n\to\infty;\ \varliminf_{n\to\infty} b_n>0)$ *satisfait aux conditions*

$$S_{q_n}<S_{q_{n+1}}\to\infty,\ n\to\infty;\quad \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{S_{q_n}}<M,$$

*et si la suite* $\{a_n\}$ *décroît d'une façon monotone, les séries*

$$\sum a_n\ (a_n>0)\ \text{ et }\ \sum (S_{q_{n+1}}-S_{q_n})\,a_{q_n}$$

*sont alors équiconvergentes.*

De cette proposition résultent les propositions suivantes:

*Si la suite de nombres entiers* $\{q_n\}$ *satisfait aux conditions*

$$q_n<q_{n+1}\to\infty,\ n\to\infty,\ \text{ et }\ \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{q_n}<M,$$

*et si la suite* $\{a_n\}$ *décroît d'une façon monotone, les séries*

$$\sum a_n\quad (a_n>0)\ \text{ et }\ \sum (q_{n+1}-q_n)\,a_{q_n}$$

*sont alors équiconvergents.*

*Soit la fonction* $f(x)$ *positive et monotone dans l'intervalle* $(0,\infty)$ *et que la suite* $\{a_n\}$ *satisfasse à la condition*

$$a_o>0;\quad a_n=O(1),\ n\to\infty;\quad \varliminf_{n\to\infty} a_n>0.$$

*Les séries*

$$\sum a_n f(S_n)\quad \left(S_n=\sum_1^n a_m\right)\ \text{ et}$$

$$\sum (S_{q_{n+1}}-S_{q_n})\,f(S_n)$$

*sont équiconvergentes si*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{S_{q_n}}<M$$

*où* $\{S_{q_n}\}$ *est une suite partielle de la suite* $\{S_n\}$.

D'après la méthode exposée ci-dessus (voir Fig. 1) il convient d'interpréter la sommabilité des séries aux termes positifs selon un procédé déterminé. Ainsi, d'après Hardy, on peut formuler la proposition suivante:

*Pour la régularité d'après la méthode* $\varphi$ *il est nécessaire et suffisant que les conditions (II, 12) et (II, 13) soient remplies dans l'intervalle* $(x_0, \infty)$. *Dans le cas spécial ces conditions sont satisfaites si*

$$0 < \varphi_{n+1}(x) \leqslant \varphi_n(x) \quad (x > x_0);$$

et d'après Tauber cette autre proposition:

*Toute série* $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ *sommable selon le procédé*

$$\sum a_n r^n \to S, \quad r \to 1,$$

*est convergente lorsque sont satisfaites la condition de convergence (II, 15) où la condition*

$$\sum_1^n m a_m \backsim \lg n^{\alpha} \quad (\alpha > 1).$$

En appliquant le calcul intégral de la manière ci-dessus exposée, on arrive, outre les propositions connues, aussi à la proposition suivante:

*Si la suite* $\{a_n\}$ *satisfait aux conditions (II, 50) et que la fonction* $f(x)$ *est positive et monotone dans l'intervalle* $(0, \infty)$, *la série*

$$\sum a_n f(S)$$

*et l'intégrale*

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

*sont alors équiconvergentes.*

Dans la III$^e$ partie du présent travail on a présenté les conditions de convergence uniforme des séries fonctionnelles. Ici, de même que dans le cas précédent, on part de la suite de points (III,1) et l'on obtient ainsi la série (III,2). Pour de telles séries le critère suivant est valable:

*Si la condition* (III,4), *où* $M$ *représente un nombre qui ne dépend pas de* $x$, *est satisfaite, la série* (III,3) *converge uniformément dans l'intervalle.*

D'après cette proposition, il est facile de démontrer la proposition suivante:

*S'il existe une telle suite de nombres positifs* $\{\lambda_n\}$, *où les conditions* (III,5) *seraient satisfaites et que* $M$ *représente un nombre qui ne dépend pas de* $x$, *la série* (III,6) *converge alors uniformément dans l'intervalle* $[a,b]$.

Dans la IV$^e$ partie du présent travail on arrive, en vertu du principe de la métrique hyperbolique et à l'aide de certaines formules par lesquelles, comme on vient d'exposer dans la I$^e$ partie, l'on exprime la correspondance biunivoque entre les points du plan de Lobatchewsky et les points situés dans le cercle $|z| = R$ ou les points dans le demi-plan $Im z > 0$ ou dans le demi-plan $Re z > 0$, on arrive à une suite de résultats. Ainsi, par exemple, pour la fonction holomorphe dans le cercle $|z| < R$ on peut former des arcs limites (IV, 3) et pour la fonction $f(z)$, holomorphe dans le demi-plan $Re z > 0$ et ayant $Re f(z) > 0$ pour $Re z > 0$ ou bien dans le demi-plan $Im z > 0$ et ayant $Im f(z) > 0$ pour $Im z > 0$, on peut former les arcs limites (IV, 8) et (IV, 9) respectivement. Si l'on envisage l'arc limite dans le plan $z$, le rapport entre cet arc et l'arc limite correspondant à celui-ci dans le plan de la fonction $f(z)$ peut être formulé de la façon suivante:

Si la fonction $f(z)$ est bolomorphe dans le cercle $|z|<R$ et que $|f(z)|\leqslant M$ pour $|z|\leqslant R$, on a alors (IV, 5) où bien (IV, 6) où l'égalité dans le cercle $|z|<R$ est atteinte par la fonction dans les deux cas seulement si $f(z)=\frac{M}{r}e^{\alpha i}z$. Mais si la fonction $f(z)$ est régulière dans le demi-plan $Imz>0$ où dans le demi-plan $Rez>0$ et que $Imf(z)>0$ pour $Imz>0$ où bien si $Ref(z)>0$ pour $Rez>0$, on a alors (IV, 10) et (IV, 11) respectivement, où l'égalité dans le demi-plan est atteinte par la fonction $f(z)=Mz$.

En observant la suite d'arcs limites coaxiaux (IV, 13) et (IV, 14) on arrive à la proposition suivante:

*Si la fonction $w=f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<R$, si elle n'est pas de forme (IV, 18) et si $|f(z)|<M$ pour $|z|<R$ alors la suite d'itérations*

*de la fonction $\varphi(z)=\frac{R}{M}f(z)$, c. à d. la suite*

$$\{f_n(z)\} \quad (|z|<R)$$

où

$$f_1=\frac{R}{M}f\left(\frac{R}{M}f(z)\right), f_2=\frac{R}{M}f\left(\frac{R}{M}f_1\right), \dots,$$

*converge uniformément vers la constante déterminée $\alpha$, située dans le cercle $|z|=R$ où à son contour.*

Le nombre de termes dans la suite (IV, 13) ou (IV,14) peut être aussi fini dans ce domaine $Dz$ du cercle $|z|\leqslant R$ dans lequel la fonction $f(z)$ n'est pas univalente. Le domaine d'univalence dans le cercle $|z|\leqslant R$ est déterminé selon la proposition suivante:

*Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z|<1$ ($|f(z)|<M$ pour $|z|<1$), si $z=\alpha\,|\alpha|<1$ est le point attractif de la fonction $\varphi(z)=\frac{f(z)}{M}$, celle-ci est alors univalente dans un certain domaine $D_z$ qui renferme le point $z=\alpha$. Si*

$$\sum_{0}^{\infty} a_n\,(z-\alpha)^n \qquad (a_o=M\alpha;\ |z-\alpha|<r)$$

*est le développement de Taylor de la fonction $f(z)$, elle est alors univalente dans le cercle*

$$\rho=r\,(M'-\sqrt{M'^2-1}),$$

*où $M'$ est donné par le rapport (IV, 24) et où l'égalité est atteinte par la fonction*

$$f(z)=\frac{M'\,(z-\alpha)f'\,(\alpha)\,(r-z+\alpha)}{M'r-z+\alpha}+M\alpha.$$

De cette proposition résulte, dans le cas spécial, la proposition de Montel (14) — Landau (12).

Si au lieu de la suite d'itérations de quelque fonction on place la suite de fonctions $\{f_n(z)\}$, pour elle est alors valable la proposition suivante:

*Soient les fonctions holomorphes dans le domaine $D_z$ les termes de la suite $\{f_n(z)\}$, soit $|f_n(z)| < M$ pour $z \varepsilon D_z$. Si la condition (IV, 27) où (IV, 27a) est satisfaite, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$. Si $f(z)$ est une constante, la série*

$$F(z) = \sum H(f_n) f'_n(z)$$

*où $H(f_n)$ est une fonction holomorphe pour $z \varepsilon D_z$, converge alors dans le domaine $D_z$.*

Le point fixe d'une fonction située au contour peut être quelquefois déterminée selon le procédé suivant:

*Si $|f(z)| < M$ pour $|z| < 1$, où $f(z)$ est la fonction définie par la série (IV, 33) qui est convergente dans le cercle $|z| < 1$, si la série $\Sigma a_n e^{\alpha i}$ est sommable selon le procédé (IV, 34) où*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Delta^{n-1} a_1 e^{\alpha i})|} = 0,$$

*$z = e^{\alpha i}$ est alors le point fixe de la fonction* $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{M}$ c. à d. $f(e^{\alpha i}) = M e^{\alpha i}$.

Certains résultats susmentionnées pour le demi-plan $Re\, z > 0$ peuvent être formulés de la façon suivante:

*Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le demi-plan $Re\, z > 0$, si elle n'est pas une homographie à point indifférent dans ce demi-plan et si $Re f(z) > 0$ pour $Re\, z > 0$, la suite d'itérations de cette fonction, c. à d. la suite*

$$f_n(z) = f(f_{n-1}(z) \quad (Re\, z > 0)$$

*converge alors univormément vers une constante déterminée $\alpha$, située dans le demi-plan $Re\, z > 0$ où bien au contour $Re\, z = 0$ où à l'infini. Les points fixes de cette fonction pour $Re\, z > 0$ sont situés sur la droite $Re\, z = 0$ où à l'infini à l'exception du point attractif $\alpha$ ($Re\, \alpha > 0$ où $\alpha = \infty$). Cette fonction est univalente dans un certain elomain $D_z$ qui renferme $z = \alpha$. Si*

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \quad (a_o = \alpha; |z-\alpha| < r)$$

*le développement de Taylor de cette fonction dans l'entourage du point attractif $\alpha$, celle-ci est alors univalente dans le cercle (IV, 36), où l'égalité est atteinte au contour par la fonction (IV, 37). Si $\alpha = \infty$, l'univalence de cette fonction s'étend à partir de $|z| > R$, où $R$ est un nombre très grand, dans le secteur $|y| = kx \, (k > 0)$, jusqu'à l'infini.*

Cette proposition renferme aussi la proposition connue de Wolff (19) et de Denjoy (5b).

## LITERATURA


]1] Abel, N., Oevres, II, p. 107

[2] Bieberbach, L.,
*Lehrbuch der Funktionentheorie*, Berlin (1931)

[3] Carathéodory, C.,
*Uber die Winkelderievierten von beschränten analytischen Funktionen.* Sitzungs, preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl.

[4] Cauchy, L.,
*Analyse algébrique.* Paris, 1821, p. 54

[5] Denjoy, A.,
a) *Sur quelque propriétés des séries à termes positifs:* Bull. Soc. Math. France, 40, p. 223—228 (1912).
b) *Sur l'itération des fonctions analytiques.* Comptes Rendus 182 (1926).

[6] Dini, U.,
*Sulle serie a termini positive*, Univ. Toscana, 9 (1867)

[7] Categno, C. et *Ostrowski, A.*,
*Représentation conform à la frontière, Paris 1949.*

[8] Hardy, G.,
*Расходящиеея ряды* (prevod) 1951.

[9] Julia, G.,
*Extension d'un lemme de Schwarz*, Acta math. 42 (1920)

[10] Karadžić, L.,
a) *Nouxeaux critères de convergences des séries à termes positifs et la géometrie de Lobatchevsky* s'y rattachant. Bulletin de l'Academie royale de Belgique, 5$^{me}$ Sériem T.XLII (1956)
b) *Généralisation de certains théorème de la théorie des séries à termes positifs.* Acad. royale de Belgique (1956)
c) *Quelques théorème sut les séries de fonction*, Bulletin de la Société math. et phys. de la R. P. de Serbie (1956)
d) *Quelques consequences d'un théoréme des series fonctionelles*, Bulletin de la Société math. et phys. de la R. P. de Serbie (1956)

[11] Karamata, J.,
*Teorija i praksa Stieitjes-ova integrala*, p. 148-149, Beograd (1949).

[12] Landau, E.,
*Der Picard-Schlottkysche Satz und die Blochsche konstante*, Sitzungsberi-chte der Acad. der Wiss., Phys. Math. Kl. (1926)

[13] Littlewood, E.,
*Note on the convergence of series with the positive terme*, Mess. of Math. (2), 39

[14] M o n t e l, P.,
*Leçons sur les fonctions univalentes.* Paris, (1933)

[15] N e w a l i n n R.,
*Eindeutige Analytische Funktionen, p,* 53, Berlin (1953)

[16] S c h l ö m i l c h, O.,
*Zeitschrift fur Math. und Phus,* 18, p. 425 (1873)

[17] V a l i r o n, C.,
a) *Bull. science math.* 55 (1931) Paris
b) *Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet,* Bull. Soc. math. de France t. 52, 1924.
c) *Fonctons analytiques.* Paris, 1954.

[18] V a r i ć a k, V.,
*Prvi osnivači neeuklidske geometrije,* Rad Jugoslovenske Akad. znanosti i Umjetnosti. Zagreb (1907)

[19] Wolff, J.,
a) *Sur l'itération de fonctions bornées.* Comptes Rendus 182 (1926), p. 200
b) *Sur l'itération des fonctions holomorphos dans une région, et dont les valeurs appartiennent à cette région,* 182 (1926), p. 48.

Tehnički urednik i korektor

ŽIVORAD VUJIĆ

Slagač

GRADIMIR SAVIĆ

Tiraž: 600 primeraka

Obim: $3^1/_4$ št. tabaka

Štampanje završeno decembra 1960 godine u Beogradskom grafičkom zavodu — Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17