PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 33 (1960)

NEKOLIKO PRILOGA TEORIJI SVUDA-GUSTO NEPREKIDNIH FUNKCIJA

Simon Ćetković

UVOD

Problem integracije i problem izvodljivosti funkcija bili su i ostali među glavnim problemima kako Teorije funkcija i Analize tako, može se slobodno reći, i celokupne matematike.

Smatram da je problem integracije, u svom razvoju, mnogo brže i uspešnije rešavan od problema izvodljivosti. Problem integracije neprekidnih funkcija rešen je relativno lako i brzo od *Riemann*-a, *Cauchy*-a, *Cantor*-a i *Darboux*-a koji su pokazali da egzistira određeni integral svake neprekidne funkcije. Ali i problem integracije svuda-gusto neprekidnih funkcija a i svuda-prekidnih funkcija razrađen je i može se reći uspešno rešavan preko *Lebesgue*-a, *Stieltjes*-a, *Perron*-a, *Denjoy*-a, a pored njih i od mnogih drugih. Možda bi se moglo reći da je problem integracije u potpunosti i rešen *Denjoy*-ovom totalizacijom.

Problem izvodljivosti koji je bio vrlo lak kod elementarnih funkcija, pokazao se je komplikovanim kod skupa neprekidnih funkcija. Mnogi su smatrali a i pretpostavljali da svaka neprekidna funkcija mora imati izvod bar u jednoj tački. Smatra se da je puno truda utrošeno na pokušajima da se dokaže ta pogrešna pretpostavka a možda bi i više da *Weierstrass* 1861 godine nije dokazao egzistenciju neprekidnih funkcija koje nemaju izvod ni u jednoj tački. U svetlu svega toga jasno nam je zašto je ovaj *Weierstrass*-ov dokaz izazvao iznenađenje kod mnogih matematičara i zašto čak i veliki *Hermite* nije krio svoje čuđenje zbog toga dokaza. Nas danas više interesuje zašto je trebalo da prođe četrdeset pet godina od *Weierstrass*-ovog otkrića da bi *Koch* tek 1906 godine dao prostu krivu bez tangente. No sa ovim je bilo samo započeto proučavanje diferencijabilnosti neprekidnih funkcija, i prošlo je još prilično vremena dok je *Banach*-u pošlo za rukom da dokaže sledeću teoremu:

„Skup svih neprekidnih realnih funkcija od kojih je svaka diferencijabilna bar u jednoj tački čini skup prve kategorije u funkcionalnom prostoru svih neprekidnih funkcija definisanih u nekom zatvorenom intervalu $[a, b]$. Nasuprot tome skup svih onih funkcija koje nisu diferencijabilne ni u jednoj tački čini skup druge kategorije".

Sa ovom *Banach*-ovom teoremom svakako je dat dobar prilog proučavanju diferencijabilnosti neprekidnih funkcija. Napomenimo da je i *Лузин* pitanju diferencijabilnosti neprekidnih funkcija dao značajne priloge. On pored ostalog u radovima [5], [7] i [8] dokazuje teoremu:

„Ne postoji neprekidna funkcija $F(x)$ koja ima $F'(x) = +\infty$ i $F'(x) = -\infty$ na skupu tačaka čija je mera veća od nule".

Pitanju proučavanja diferencijabilnosti funkcija prišlo se je i sa jednog drugog stanovišta pri čemu je glavni cilj iznalaženje osobina izvodnih funkcija. U tom pravcu radi i *Darboux* i on uspeva da dokaže teoremu:

„Izvodna funkcija koja je kontinuirano definisana ne može preći sa jedne vrednosti na drugu a da pri tome ne prođe i kroz sve vrednosti između njih".

Sa ovog stanovišta nastavlja i francuska i ruska škola Teorije funkcija da i dalje početkom ovog veka ispituje izvodljivost funkcija povezujući je sa teorijom mere i proširujući pitanje izvodljivosti i na svuda-gusto neprekidne funkcije. Obzirom da su neprekidne funkcije specijalna klasa funkcija koje su neprekidne u svuda-gusto raspoređenim tačkama, jasno je da se problem diferencijabilnosti komplikuje ako ga proučavamo u skupu funkcija neprekidnih u svuda-gusto raspoređenim tačkama. Napomenimo da je ovo i najširi skup funkcija za koje ima smisla proučavati pitanje diferencijabilnosti jer funkcije prekidne u svim tačkama nisu ni u jednoj tački diferencijabilne. Teoriji izvodljivosti, za ovako najopštije uzeti skup funkcija, dali su možda najbolje rezultate *Denjoy* u [1] i *Лузин* u [5], [6] i [7]. *Лузин* u pomenutim radovima dokazuje i teoremu:

„Ako je izmerljiva funkcija $f(x)$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, konačna u svima tačkama izuzimajući eventualno jedan skup mere nula, tada postoji takva neprekidna funkcija $F(x)$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, koja ima funkciju $f(x)$ za običan izvod u svima tačkama izuzimajući opet možda jedno mnoštvo tačaka mere nula".

Mi u ovom radu imamo isto tako za cilj proučavanje izvodljivosti funkcija, samo mu prilazimo sa nešto drugačijeg stanovišta. Nama je cilj da otkrijemo izvesne zajedničke osobine skupa svih funkcija koje su neprekidne u svuda-gusto raspoređenim tačkama i istovremeno prekidne u svuda-gusto raspoređenim tačkama. Uzimamo funkcije prekidne u svuda-gusto raspoređenim tačkama jer za neprekidne u svima tačkama smatramo da je pitanje diferencijabilnosti u potpunosti rešeno *Banach*-ovom teoremom. Sem toga mi posmatramo i realne funkcije od konačno-mnogo a i od beskonačno-mnogo nezavisno promenljivih. Mi isto tako imamo za cilj proučavanje izvodljivosti funkcija kompleksne promenljive koje su istovremeno neprekidne u svuda-gusto raspoređenim tačkama i prekidne u svuda-gusto raspoređenim tačkama.

U cilju postizanja postavljenog zadatka mi smo u prvoj glavi ovog rada dokazali egzistenciju i formirali izvestan broj klasa funkcija kod kojih dolazi što više do izražaja s jedne strane nezavisnost a sa druge povezanost između: *neprekidnosti*, *prekidnosti*, *diferencijabilnosti*, *nediferencijabilnosti* funkcija. Pitanje diferencijabilnosti funkcija u prvom paragrafu povezujemo sa jednim skupom svuda-gusto raspoređenih transcendentnih brojeva. U drugom paragrafu konstruišemo jedan skup svuda-gusto raspoređenih iracionalnih brojeva koji imaju neke specijalne osobine. Ove brojeve koristimo u nekim dokazima trećeg i četvrtog paragrafa. Pomenuti skup iracionalnih brojeva ima osobinu da se mogu na jedan specijalan način aproksimirati jednim odgovarajućim nizovima racionalnih brojeva. U trećem paragrafu pitanje diferencijabilnosti i izvodljivosti proučavamo kroz nekoliko klasa realnih funkcija koje zavise od beskonačno-mnogo nezavisno promenljivih. Egzistencija ovakvih klasa funkcija uveliko nam otkriva i osobine u vezi diferencijabilnosti i izvodljivosti realnih funkcija koje zavise od prebrojivo beskonačno-mnogo nezavisno promenljivih. U četvrtom paragrafu dokazujemo egzistenciju nekih klasa kompleksnih funkcija gde pitanja *diferencijabilnosti*, *izvodljivosti*, *neizvodljivosti*, *prekidnosti i neprekidnosti* povezujemo sa *Cauchy—Riemann*-ovim jednačinama pri čemu dobiveni rezultati ukazuju da egzistiraju i funkcije čije su osobine, na prvi pogled, u suprotnosti sa nekim poznatim teoremama. U prvoj glavi koristili smo se racionalnom aproksimacijom algebarskih brojeva čiju je teoriju započeo *Liouville* a pored ostalih razradili je *Thue*, *Siegel*, *Гельфонд*. Prvu konstruisanu funkciju koja bi nas u izvesnoj meri potsećala na klase funkcija koje formiramo u prvoj glavi nalazimo kod *F. Lukacs*-a u radu [4] a zatim ih možemo naći i kod *Denjoy*-a u [2], no ima ih i kod drugih matematičara.

Smatramo da treba istaći da je glavni rezultat ovog rada sadržaj druge glave. Tu imamo nekoliko teorema koje nam ukazuju na izvestan broj bitnih zajedničkih osobina svih funkcija koje su neprekidne u svuda-gusto raspoređenim tačkama. Otkrivene osobine se odnose ne na pojedine ili diskontinuirane niti prebrojive tačke nego na svuda-gusto raspoređene tačke kojih ima u svakom intervalu kontinuum-mnogo. Prva od ovih teorema sa odgovarajućim dokazom publikovana je u radu: *S. Ćetković — Un théorème de la théorie des fonctions*, *Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. 245, 1957.

PRVA GLAVA

EGZISTENCIJA NEKIH KLASA FUNKCIJA

§ 1. Transcendentni brojevi i diferencijabilnost jedne familije funkcija

U ovom paragrafu cilj nam je da formiramo što prostije funkcije, i to funkcije od imenioca racionalnih brojeva koji će imati sledeće neobične osobine: prekidne su u svima racionalnim tačkama a diferencijabilne u unapred datom konačnom skupu transcendentnih brojeva kao i u još svuda-gusto raspoređenim tackama. Zatim nam je cilj da obrazujemo svuda-gusto raspoređene transcendentne brojeve u kojima ove funkcije neće biti diferencijabilne i ako su neprekidne.

1, 1. — *Svakom realnom broju* a *formiraćemo njemu odgovarajući niz* $g_a(n)$ *na sledeći način:*

$g_a(n) = \min |d/n - a|$, *gde se* d *menja u skupu celih brojeva tako da je* $d/n \neq a$; n *je prirodan broj. Ovaj niz nazvaćemo: niz gustoće broja* a.

Svakom $g_a(n)$ *odgovaraju dva cela broja* d_1 *i* $d_1 + 2$ *takva da je*

$$d_1/n < a < (d_1 + 2)/n,$$

pa je

$$g_a(n) = \min |d/n - a| \leqslant 1/n \to 0, \quad za \quad n \to \infty. \tag{1. 1}$$

Znači da je niz $g_a(n)$ *nula niz za svako* a.

Napomenimo da ovaj niz gustoće uveliko karakteriše jedan transcendentan broj u odnosu na skup racionalnih brojeva.

1, 2. — Označimo sa S konačan skup transcendentnih brojeva koji su dati unapred.

1, 3. — Uočimo niz $f(n)$ definisan na sledeći način:

$$f(n) = \min (g_\xi(n), \quad n^{-n}), \tag{1. 2}$$

gde se ξ menja u skupu S.

2. — *Obrazujmo realnu funkciju* $F_s(x)$, *na sledeći način:*

$$F_s(x) = \frac{1}{q} \cdot f(q),$$

kada je x racionalan broj oblika p/q (p je ceo broj, p i q uzajamno prosti brojevi);

$$F_s(x) = 0, \quad \textit{za } x \textit{ iracionalan broj.}$$

3. — *Ovde će biti pokazano da je funkcija $F_s(x)$ diferencijabilna u unapred datom konačnom skupu transcendentnih brojeva S kao i u još svuda-gusto raspoređenim brojevima i ako je prekidna u svima racionalnim tačkama.*

4. — Neka je ξ jedan od brojeva skupa S.

4, 1. — Ako je x iracionalan broj različit od ξ tada je

$$\frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi} = \frac{0}{x - \xi} = 0 \tag{1. 3}$$

jer je i $F_s(x) = 0$ i $F_s(\xi) = 0$.

4, 2. — Kada je x racionalan broj oblika p/q imamo

$$\left|\frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi}\right| = \frac{F_s(x)}{|x - \xi|} = \frac{\frac{1}{q} \cdot f(q)}{|p/q - \xi|} = \frac{1}{q} \cdot \frac{f(q)}{|p/q - \xi|} \leqslant \frac{1}{q}, \tag{1. 4}$$

jer je prema (1. 1) i (1. 2) $F_s(x) = 1/q \cdot f(q) > 0$ i $0 < f(q) \leqslant |p/q - \xi|$. Kako oko svakog realnog broja a postoji jedna okolina $(a - \delta, a + \delta)$, gde je $\delta > 0$, u kojoj se ne nalazi nijedan racionalan broj p/q, takav da mu je imenitelj manji od unapred datog proizvoljno-velikog broja N (videti [11] strana 54), proizilazi da

$$q \to \infty \quad \text{kada} \quad x \to \xi. \tag{1. 5}$$

Prema tome

$$\left|\frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi}\right| \to 0 \quad \text{kada} \quad x \to \xi,$$

jer je

$$\left|\frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi}\right| \leqslant 1/q \to 0, \quad \text{kada} \quad q \to \infty.$$

4, 3. — Iz 4, 1. — i 4, 2. — sleduje da je

$$\lim_{x \to \xi} \frac{F_s(x) - F_s(\xi)}{x - \xi} = 0,$$

a iz toga sleduje dalje da je zaista funkcija $F_s(x)$ diferencijabilna u svima tačkama skupa S.

5. — Da bi pokazali da je zaista funkcija $F_s(x)$ diferencijabilna i u algebarskim iracionalnim tačkama koristićemo se *Liouville*-ovim stavom: Ako je p/q racionalan a ζ algebarski broj reda k tada nejednakost

$$|\zeta - p/q| < 1/q^{k+1}$$

ima samo konačno-mnogo rešenja po nepoznatoj p/q.

Iz ovog stava sleduje da svakom algebarskom broju ζ reda k odgovara jedna okolina $(\zeta-\delta(\zeta),\ \zeta+\delta(\zeta))$, u kojoj važi nejednačina

$$|\zeta-p/q|>1/q^{k+1},$$

za sve racionalne brojeve te okoline. No kako je

$$1/q^q<1/q^{k+1}, \quad \text{za} \quad q>k+1,$$

to je i

$$|\zeta-p/q|>1/q^q, \quad \text{za} \quad |\zeta-p/q|<\delta(\zeta) \quad \text{i} \quad q>k+1.$$

Uočimo li sada onu okolinu broja ζ u kojoj je

$$q>k+1 \quad \text{i} \quad |\zeta-p/q|>1/q^{k+1}$$

i označimo je sa $\delta_1(\zeta)$ imaćemo da je

$$(1.\ 6) \qquad |\zeta-p/q|>1/q^q, \quad \text{za} \quad |\zeta-p/q|<\delta_1(\zeta).$$

Kada je x iracionalan broj imaćemo da je

$$\left|\frac{F_s(x)-F_s(\zeta)}{x-\zeta}\right|=0, \quad \text{jer je} \quad F_s(x)=0 \quad \text{i} \quad F_s(\zeta)=0.$$

Ako je x racionalan broj i ako je

$$|x-\zeta|<\delta_1(\zeta)$$

tada je

$$\left|\frac{F_s(x)-F_s(\zeta)}{x-\zeta}\right|=\frac{F_s(x)}{|x-\zeta|}=\frac{1/q\cdot f(q)}{|p/q-\zeta|}<1/q,$$

jer je

$$f(q)\leqslant 1/q^q<|p/q-\zeta| \quad \text{odnosno} \quad \frac{f(q)}{|p/q-\zeta|}<1.$$

Prema tome je

$$\lim_{x\to\zeta}\frac{F_s(x)-F_s(\zeta)}{x-\zeta}=0,$$

a iz toga proizilazi da je funkcija $F_s(x)$ diferencijabilna i u algebarskim iracionalnim tačkama koje su svuda-gusto raspoređene (videti slične dokaze u [12]).

6. — Kako je $F_s(x)=1/q\cdot f(q)>0$, za x racionalan broj, i kako se u svakoj okolini takvog x nalazi bar jedno x_1 iracionalno za koje je $F_s(x_1)=0$, to je funkcija $F_s(x)$ prekidna u svima racionalnim tačkama.

7. — Iz 4. —, 5. — i 6. — sleduje da je tvrđenje pod 3. — zaista tačno.

8. — Formiraćemo sada neke transcendentne brojeve u kojima funkcija $F_s(x)$ neće biti diferencijabilna i ako je neprekidna.

8, 1. — Označimo sa $h(n)$ najveći broj oblika n^{-m} (m i n prirodni brojevi $n>1$), koji nije veći od $1/n\cdot f(n)$. Neka je

$$h_1(n)=h(1/h(n)) \quad \text{i} \quad h_{k+1}(n)=h(1/h_k(n)),$$

gde je k prirodan broj.

Obzirom da je i $1/n^{-m} = n^m$ prirodan broj to je i $1/h_k(n)$ prirodan broj veći od 1, jer je i $n > 1$. Uzimajući u obzir (1. 2) imaćemo:

$$h(n) < 1/n \cdot f(n) \leqslant 1/n \cdot n^{-n} = 1/n^{n+1} < 1/2,$$

pa je i

(1. 7) $$h_k(n) < 1/2 \quad \text{odnosno} \quad 1/h_k(n) > 2.$$

Iz

$$h_{k+1}(n) = h(1/h_k(n))$$

sledi

$$h_{k+1}(n) \leqslant \frac{1}{1/h_k(n)} \cdot (1/h_k(n))^{-1/h_k(n)} = h_k(n) \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{h_k(n)}\right)^{\frac{1}{h_k(n)}}}$$

odnosno

(1. 8) $$h_{k+1}(n) < \frac{1}{2} \cdot h_k(n)$$

jer je $1/h_k(n) > 2$.

Napomenimo da je $h_k(n) > 0$, što je jasno iz same definicije za $h_k(n)$.

Iz (1. 7) i (1. 8) sleduje

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k(n) < 1, \quad \text{za svako } n > 1.$$

Drukčije rečeno postoji niz brojeva

$$\alpha(n) = \lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{i} h_k(n), \quad n > 1$$

i članovi toga niza pripadaju intervalu (0, 1).

8, 2. — Pokazaćemo da su članovi niza $\alpha(n)$ transcendentni brojevi.

8, 21. — Uzmimo jedno konstantno n i njemu odgovarajući broj $\alpha(n)$. Uočimo zatim njemu odgovarajući niz brojeva $a(j)$ (j prirodan broj) definisan na sledeći način:

$$a(j) = \sum_{k=1}^{j} h_k(n).$$

Članovi niza $a(j)$ su racionalni brojevi jer je $h_k(n)$ racionalan broj.

Uočimo član $a(j)$ niza $\alpha(j)$ i pokažimo da je njegov imenilac $1/h_j(n)$. (Kad govorimo o imenitelju nekog racionalnog broja pretpostavljamo da je taj broj napisan u obliku p/q, p i q uzajamno prosti celi brojevi).

Kako je $h(n)$ oblika $1/n^m$ to je $h_1(n)$ oblika $1/n^{m \cdot m_1}$ odnosno $h_k(n)$ oblika

$$1/n^{m \cdot m_1 \cdots m_k},$$

proizilazi da je

$$a(j) = \sum_{k=1}^{j} 1/n^{m \cdot \prod_{i=1}^{k} m_i} = 1/n^{m \cdot \prod_{i=1}^{j} m_i} \cdot \sum_{k=1}^{j} n^{\prod_{i=1} m_i} / n^{\prod_{i=1}^{k} m_i}$$

ili

$$a(j)=\left(\sum_{k=1}^{j-1} n^{\prod_{i=1}^{j} m_i} / n^{\prod_{i=1}^{k} m_i} + 1\right) / n^{m\cdot\prod_{i=1}^{j} m_i}$$

Iz gornjeg proizilazi da su

$$\sum_{k=1}^{j-1} n^{\prod_{i=1}^{j} m_i} / n^{\prod_{i=1}^{k} m_i} + 1 \quad \text{i} \quad n^{\prod_{i=1}^{j} m_i \cdot m}$$

uzajamno prosti brojevi, jer kad ne bi bili morali bi biti deljivi nekim činiocem broja n, a to je nemoguće, jer prvi od ovih brojeva nije sa njim deljiv. (Kad govorimo o činiocima nekog prirodnog broja mislimo na činioce različite od 1).

Prema tome imenitelj racionalnog broja $a(j)$ je $1/h_j(n)$.

8, 22. — Iz

$$\alpha(n)-a(j)=\sum_{k=j+1}^{\infty} h_k(n) < 2\, h_{j+1}(n) = 2\, h\,(1/h_j(n)) \leqslant$$

$$2\, h_j(n)\cdot(1/h_j(n))^{-1/h_j(n)} = 2\, h_j(n)\cdot 1/(1/h_j(n))^{1/h_j(n)}$$

proizilazi

(1. 9) $$\alpha(n)-a(j) < 1/(h_j(n))^{1/h_j(n)}.$$

Iz

$$\alpha(n)=\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{l} h_k(n)$$

sleduje da se u svakoj okolini broja $\alpha(n)$ nalaze skoro svi članovi niza $a(j)$, pa $\alpha(n)$ ne može biti algebarski broj, jer bi (1. 9) bilo u suprotnosti sa (1. 6) Prema tome dolazimo do zaključka da su svi članovi niza $\alpha(n)$ transcendentni brojevi.

8, 3. — Pokažimo da funkcija $F_s(x)$ nema izvoda u članovima niza $\alpha(n)$.

Za $\alpha(n)$ član niza $\alpha(n)$ i za $x \in$ niza $a(j)$ imamo

$$\left|\frac{F_s(x)-F(\alpha(n))}{x-\alpha(n)}\right| = \left|\frac{F_s(a(j))}{a(j)-\alpha(n)}\right| = \frac{F_s(\alpha(j))}{\sum_{k=j+1}^{\infty} h_k(n)} > \frac{F_s(a(j))}{2\, h_{(j+1)}(n)} \geqslant$$

$$\geqslant h(1/h_j(n))/2\, h_{(j+1)}(n) = h_{(j+1)}(n)/2\, h_{(j+1)}(n) = 1/2,$$

odnosno

(1. 10) $$\left|\frac{F_s(x)-F(\alpha(n))}{x-\alpha(n)}\right| > 1/2, \quad \text{promenljiva } x \in a(j),$$

konstanta $\alpha(n) \in$ niza $\alpha(n)$.

Za $x \in$ iracionalnih brojeva imamo

(1. 11) $$\frac{F_s(x)-F_s(\alpha(n))}{x-\alpha(n)} = 0.$$

Prema (1. 11) i (1. 10) zaključujemo da ne postoji

$$\lim_{x \to \alpha(n)} \frac{F_s(x) - F_s(\alpha(n))}{x - \alpha(n)},$$

to jest funkcija $F_s(x)$ nema izvoda u tačkama niza $\alpha(n)$.

9. — Članovi niza

$$\beta(n) = \alpha(n) \pm n_1/n^{n_2},$$

gde su n_1 i n_2 ma koja dva prirodna broja, takođe su transcendentni brojevi. Uočimo li niz racionalnih brojeva

$$b(j) = a(j) \pm n_1/n^{n_2}$$

imamo da je:

$$\frac{F_s(x) - F_s(\beta(n))}{x - \beta(n)} = \frac{F_s(b(j))}{b(j) - \beta(n)} = \frac{F_s(b(j))}{a(j) - \alpha(n)} =$$

$$= \frac{F_s(a(j))}{a(j) - \alpha(n)}, \quad \text{za} \quad x \in b(j) \quad \text{i} \quad 1/h_j(n) > n^{n_2},$$

pa prema tome funkcija $F_s(x)$ neće imati izvoda u tačkama niza $\beta(n)$.

10. — *Iz gornjeg sledi da pomoću nizova $\beta(n)$ možemo obrazovati svuda-gusto raspoređene transcendentne brojeve u kojima funkcija $F_s(x)$ neće biti diferencijabilna i ako je diferencijabilna na skupu transcendentnih brojeva S kao i u algebarskim iracionalnim tačkama.*

§ 2. Formiranje jednog skupa svuda-gusto raspoređenih iracionalnih brojeva

1. — Uzmimo dva proizvoljna realna broja m i a koji zadovoljavaju uslove:

$$m > 1, \quad m \in \text{prirodnih brojeva}, \ a \geqslant 1.$$

U zavisnosti od m i a formiraćemo broj α na sledeći način:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{(E(a)+1)^n}}.$$

Pri ovom formiranju broja α, $E(a)$ znači najveći ceo broj koji nije veći od a. Da smo na ovaj način zaista formirali neki broj dovoljno je pokazati da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{(E(a)+1)^n}} \tag{2. 1}$$

konvergira a red (2. 1) zaista konvergira jer je

$$\frac{1}{m^{(E(a)+1)^{n+1}}} \cdot \frac{m^{(E(a)+1)^n}}{1} = \frac{1}{m^{(E(a)+1)^n \cdot E(a)}} < < 1. \tag{2. 2}$$

Prema tome egzistira broj α koji smo na ovaj način formirali.

Ako se uzmu dva cela proizvoljna broja $r \geqslant 0$ i p njima će odgovarati broj

(2. 3) $$p/m^r.$$

Kad $r \geqslant 0$ i p prolaze skupom celih brojeva, to njima odgovarajući skup (2. 3) postaje svuda-gust, jer pomoću

$$p_1/m^{r_1} < p_2/m^{r_2}$$

možemo obrazovati brojeve

$$p_1/m^{r_1} + k/m \cdot (p_2/m^{r_2} - p_1/m^{r_1}) = (p_1 \cdot m^{r_2+1} + \\ + k(p_2 \cdot m^{r_1} - p_1 \cdot m^{r_2}))/m^{r_1+r_2+1},$$

($k \in$ celih brojeva), koji pripadaju skupu (2. 3) i čiji je razmak m puta manji od razmaka brojeva p_1/m^{r_1} i p_2/m^{r_2}.

Pomoću skupa (2. 3) obrazovaćemo skup brojeva

(2. 4) $$p/m^r + \alpha$$

i označiti ga sa Q. Pojedine elemente skupa Q označićemo sa β, to jest

(2. 5) $$\beta = p/m^r + \alpha,$$

gde su $r > 0$ i p konstantni celi brojevi. Kako je skup (2. 3) svuda-gust to je i skup Q isto tako svuda-gust jer su njegovi elementi postali od elemenata skupa (2. 3) uvećanjem za α.

Kako svakom proizvoljnom paru brojeva (m, a) odgovara jedno $\alpha(m, a)$ to svakom paru (m, a) odgovara i po jedan skup $Q(m, a)$ koji bi na pomenuti način formirali.

Pokažimo da je broj α iracionalan. Napišemo li ga u brojnom sistemu sa osnovom m, on će biti ispisan pomoću cifara 0 i 1 i beskonačan. Redna mesta cifara 1 iza „desetne zapete" daje nam niz

$$\{(E(a)+1)^n\}.$$

Iz ovoga sleduje da će se cifre 0 javljati između cifara 1 u grupama. Tako između n-te cifre 1 i $(n+1)$-ve cifre ima cifara 0:

$$(E(a)+1)^{n+1} - (E(a)+1)^n - 1 = (E(a)+1)^n \cdot E(a) - 1.$$

Niz

$$\{(E(a)+1)^n \cdot E(a) - 1\}$$

je celobrojni i rastući pa prema tome broj α, pretstavljen u brojnom sistemu sa osnovom m beskonačnim razlomkom, nije periodičan pa iz toga proizilazi da je iracionalan broj. Iz iracionalnosti broja α i racionalnosti brojeva skupa (2. 3) proizilazi da su brojevi skupa Q iracionalni.

2. — Broj α je granična vrednost rastućeg niza

(2. 6) $$\{a_k\} = \left\{ \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{m^{(E(a)+1)^n}} \right\}.$$

Članovi niza (2. 6) su racionalni brojevi i ako a_k napišemo u obliku

$$a_k = p_k/q_k,$$

gde su p_k i q_k uzajamno prosti brojevi, potražićemo q_k.

Iz (2. 6) imamo

$$a_k = \sum_{n=1}^{k} 1/m^{(E(a)+1)^n} = \sum_{n=1}^{k-1} 1/m^{(E(a)+1)^n} + 1/m^{(E(a)+1)^k} =$$

$$= \frac{1}{m^{(E(a)+1)^k}} \left(1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{m^{(E(a)+1)^k}}{m^{(E(a)+1)^n}} \right).$$

Obzirom da je

$$m^{(E(a)+1)^k}/m^{(E(a)+1)^n}$$

deljivo sa m to je i

$$\sum_{n=1}^{k-1} m^{(E(a)+1)^k}/m^{(E(a)+1)^n}$$

deljivo sa m a iz toga proizilazi da

$$1 + \sum_{n=1}^{k-1} m^{(E(a)+1)^k}/m^{(E(a)+1)^n}$$

nije deljivo ni sa jednim činiocem broja m različitim od 1. Prema tome imenitelj q_k, racionalnog broja α_k napisanog u skraćenom obliku p_k/q_k (p_k i q_k uzajamno prosti), je

(2. 7) $$q_k = m^{(E(a)+1)^k}.$$

Kao što smo u odnosu na broj α uočili niz α_k, tako ćemo broju β uočiti odgovarajući niz $\{\beta_k\}$ na sledeći način

$$\{\beta_k\} = \{p/m^r + \alpha_k\}$$

odnosno

(2. 8) $$\{\beta_k\} = \left\{ p/m^r + \sum_{n=1}^{k} 1/m^{(E(a)+1)^n} \right\},$$

pa je

$$\beta_k = p/m^r + \sum_{n=1}^{k-1} 1/m^{(E(a)+1)^n} + 1/m^{(E(a)+1)^k}$$

ili

(2. 9) $$\beta_k = \frac{1}{m^{(E(a)+1)^k}} \left(\frac{p \cdot m^{(E(a)+1)^k}}{m^r} + 1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{m^{(E(a)+1)^k}}{m^{(E(a)+1)^n}} \right).$$

Za $(E(a)+1)^k > r$

(2. 10) $$p \cdot m^{(E(a)+1)^k}/m^r$$

je deljivo sa m. Sem toga je

$$m^{(E(a)+1)^k}/m^{(E(a)+1)^n},$$

za $n<k$, isto tako deljivo sa m pa je deljivo sa m i

$$(2.\ 11)\qquad \sum_{n=1}^{k-1} m^{(E(a)+1)^k}/m^{(E(a)+1)^n}.$$

Iz (2. 11) i (2. 10) proizilazi da

$$(2.\ 12)\qquad p\cdot m^{(E(a)+1)^k}/m^r+1+\sum_{n=1}^{k-1} m^{(E(a)+1)^k}/m^{(E(a)+1)^n}$$

nije deljivo ni sa jednim činiocem broja m, različitim od 1, za $(E(a)+1)^k>r$, jer (2. 12) možemo napisati u obliku $K\cdot m_1+1$ to jest

$$(2.\ 13)\qquad p\cdot m^{(E(a)+1)^k}/m^r+1+\sum_{n=1}^{k-1} m^{(E(a)+1)^k}/m^{(E(a)+1)^n}=K\cdot m_1+1,$$

gde je m_1 makoji od činitelja broja m a K njemu odgovarajući prirodni broj.

Na osnovu (2. 13) i (2. 9) zaključujemo da je imenitelj broja

$$\beta_k=p_k/q_k$$

(p_k i q_k uzajamno prosti brojevi), za $(E(a)+1)^k>r$,

$$(2.\ 14)\qquad q_k=m^{(E(a)+1)^k}.$$

3. — Od interesa će biti u daljem izlaganju i vrednosti $|\alpha-\alpha_k|$, $|\beta-\beta_k|$ pa ćemo dati jedno njihovo ograničenje. Obzirom da je $\alpha>\alpha_k$ proizilazi

$$|\alpha-\alpha_k|=\alpha-\alpha_k=\sum_{n=k+1}^{\infty} 1/m^{(E(a)+1)^n}.$$

Polazeći od konstatacije

$$\frac{1}{m^{(E(a)+1)^{n+1}}}\cdot\frac{m^{(E(a)+1)^n}}{1}=\frac{1}{m^{(E(a)+1)^n\cdot E(a)}}\leqslant\frac{1}{2^{(2^n)}}\leqslant\frac{1}{4},$$

imamo

$$(2.\ 15)\qquad \alpha-\alpha_k<\frac{1}{m^{(E(a)+1)^{k+1}}}\cdot\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{m^{(E(a)+1)^{k+1}}}<\frac{2}{m^{(E(a)+1)^{k+1}}}.$$

Analogno gornjem nalazimo

$$(2.\ 16)\qquad |\beta-\beta_k|=\beta-\beta_k=\alpha-\alpha_k<2/m^{(E(a)+1)^{k+1}}.$$

§ 3. Egzistencija nekih realnih funkcija koje zavise od prebrojivo beskonačno-mnogo nezavisno promenljivih

U ovom paragrafu dokazaćemo da egzistiraju klasa funkcija G_{wp}, G_{wq} *i* G_{wt}, *i formirati što prostije funkcije koje pripadaju tim klasama.*

1, 1. — *Sa* G_{wp} *označili smo klasu svih realnih funkcija koje zavise od prebrojivo beskonačno-mnogo nezavisno promenljivih i od kojih svaka ima istovremeno sledeće osobine:*

1°. *Svuda je prekidna;*

2°. *U svuda-gusto raspoređenim tačkama ima sve parcijalne izvode i ako je u svima tim tačkama prekidna;*

3°. *U svuda-gusto raspoređenim tačkama ima parcijalne izvode po i samo po unapred proizvoljno uočenoj grupi nezavisno promenljivih i ako je u svima tim tačkama prekidna.*

1, 2. — *Sa* G_{wq} *označili smo klasu svih realnih funkcija koje zavise od prebrojivo beskonačno-mnogo nezavisno promenljivih i od kojih svaka ima istovremeno sledeće osobine:*

1°. *U svuda-gusto raspoređenim tačkama je prekidna;*

2°. *U svuda-gusto raspoređenim tačkama je neprekidna ali u njima nema nijedan parcijalni izvod;*

3°. *U svuda-gusto raspoređenim tačkama je neprekidna i u njima ima sve parcijalne izvode;*

4°. *U svuda-gusto raspoređenim tačkama je neprekidna i u njima ima parcijalne izvode po i samo po unapred proizvoljno uočenoj grupi nezavisno promenljivih;*

5°. *Nije diferencijabilna ni u jednoj tački.*

1, 3. — *Sa* G_{wt} *označili smo klasu svih realnih funkcija koje zavise od prebrojivo beskonačno-mnogo nezavisno promenljivih i od kojih svaka ima istovremeno sledeće osobine:*

1°. *U svuda-gusto raspoređenim tačkama je prekidna;*

2°. *U svuda-gusto raspoređenim tačkama je neprekidna ali nema izvod ni po jednoj od promenljivih;*

3°. *U svuda-gusto raspoređenim tačkama ima parcijalne izvode po i samo po unapred proizvoljno uočenoj grupi nezavisno promenljivih;*

4°. *U svuda-gusto raspoređenim tačkama je diferencijabilna.*

2. — *Da bi dokazali egzistenciju klasa* G_{wp}, G_{wq}, G_{wt}, *daćemo jedan princip formiranja takvih funkcija. Neka imamo beskonačan niz nezavisno promenljivih:* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \equiv \{x_n\}$. *Neka su a, b i R tri realna broja. Formirajmo realne funkcije* $F_{ab}(\{x_n\})$ *na sledeći način:*

$F_{ab}(\{x_n\}) = 0$, *kada su svi članovi niza* $\{x_n\}$ *iracionalni brojevi;*

$F_{ab}(\{x_n\}) = 1/q^a$, *kada jedna i samo jedna od nezavisno promenljivih ima racionalnu vrednost, i neka je q imenitelj te racionalne vrednosti;*

$F_{ab}(\{x_n\}) = 1/(min(q_i, q_j))^b$, *kada dve i samo dve nezavisno promenljive uzimaju racionalnu vrednost, i neka su* q_i *i* q_j *imenitelji tih racionalnih vrednosti;*

$F_{ab}(\{x_n\}) = R$, *ako više od dveju nezavisno promenljivih uzimaju racionalnu vrednost.*

Na ovaj način formirali smo jedan skup funkcija. Svakom paru vrednosti (a, b) odgovara po jedna funkcija. Mi ovde imamo funkcije od prebrojivo beskonačno-mnogo nezavisno promenljivih ili mogli bi ih nazvati funkcije niza ili funkcije u proširenom Hilbert-ovom prostoru (kažem u proširenom jer uzimamo i nizove sa divergentnim modulima). Pojedina od ovih funkcija je u stvari preslikavanje skupa svih realnih nizova, konvergentnih i divergentnih, ograničenih i neograničenih, na skup realnih brojeva.

Iz skupa funkcija $(F_{ab}(\{x_n\}),\ a \in$ *realnih brojeva,* $b \in$ *realnih brojeva) formirajmo tri sledeće familije funkcija:*

(3. 1) $\quad (F_{ab}(\{x_n\}),\ a \in (2, \infty),\ b \in (-\infty, 0],\ R \in (-\infty, \infty));$

(3. 2) $\quad (F_{ab}(\{x_n\}),\ a \in (2, \infty),\ b \in (0, 1],\ R=0);$

(3. 3) $\quad (F_{ab}(\{x_n\}),\ a \in (2, \infty),\ b \in (2, \infty),\ R=0).$

3. — *Iz skupa beskonačnih realnih nizova izdvojićemo i kratko označiti neke skupove koji će nam trebati u daljem izlaganju. U tom cilju označimo sa:*

P *skup svih nizova čiji su svi članovi realni brojevi (skup svih realnih nizova);*

P_1 *skup svih realnih nizova koji imaju po jedan i samo po jedan racionalan član;*

P_2 *skup svih realnih nizova koji imaju po dva i samo po dva racionalna člana;*

P_3 *skup svih realnih nizova koji imaju po tri ili po više od po tri racionalna člana;*

P_a *skup svih realnih nizova čiji su svi članovi algebarski iracionalni brojevi reda manjeg od a;*

P_b *skup svih realnih nizova čiji su svi članovi algebarski iracionalni brojevi reda manjeg od b;*

P_q *skup svih realnih nizova čiji su svi članovi brojevi koji pripadaju skupu iracionalnih brojeva Q koji je definisan pod* (1. —, § 2.);

P_i *skup svih realnih nizova čiji su svi članovi iracionalni brojevi.*

4. — *Koristeći činjenicu da se u svakoj* δ*-okolini realnog broja c nalazi i racionalnih i algebarskih iracionalnih brojeva reda manjeg od* $a\,(a>2)$ *i transcendentnih brojeva lako je pokazati da su svi navedeni skupovi pod* (3. —) *svuda-gusti. Ako je dat jedan niz* $\{c_n\}$ *možemo da mu uočimo odgovarajući niz* $\{c_n+\delta_n\}$ *gde je* $\delta_i \leqslant (1/2^i)\cdot\delta$. *Niz* $\{c_n+\delta_n\}$ *nalazi se u* δ*-okolini niza* $\{c_n\}$ *jer je*

$$\sqrt{\{c_n+\delta_n\}^2-\{c_n\}^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(c_i+\delta_i-c_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i^2}<\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i\leqslant\delta.$$

U δ*-okolini niza* $\{c_n\}$ *nalazi se i svaki niz* $\{x_n\}$ *koji zadovoljava uslov*

$$x_i \in (c_i,\ c_i+\delta_i).$$

5. — Da bismo dokazali egzistenciju klase G_{wp} pokazaćemo da je

(3. 4) $\quad (F_{ab}(\{x_n\}),\ a \in (2, \infty),\ b \in (-\infty, 0],\ R \in (-\infty, \infty)) \in G_{wp}.$

5, 1. — Funkcija $(F_{ab}(\{x_n\}),\ a \in (2, \infty),\ b \in (-\infty, 0])$ u nizovima $\{x_n\}$ koji imaju po dva i samo po dva racionalna člana, to jest za $x_n \in P_2$, uzima vrednost

$$F_{ab}(\{x_n\}) = 1/(\min(q_i,\ q_j))^b \geqslant 1, \quad (a>2,\ b\leqslant 0),$$

gde su q_i i q_j imenitelji ta dva racionalna člana. U nizovima $x_n \in P_i$ funkcija uzima vrednost

$$F_{ab}(\{x_n\}) = 0, \quad (a \in (2, \infty),\ b \in (-\infty, 0],\ R \in (-\infty, \infty)).$$

Kako su i skup P_2 i skup P_i svuda-gusti to funkcija (3,1) je prekidna u svima tačkama skupa P, pa iz toga proizilazi da ima osobinu (1,1.—,1°) klase G_{wp}.

5, 2. — Uočimo jedan fiksirani niz $\{c_n\} \in P_a$, i promenljivi niz $\{x_n\}$ između kojih postoji sledeća veza

$x_i \neq c_i, x_j = c_j$, gde j prolazi skupom prirodnih brojeva različitih od i (i fiksirani broj). Iz te međusobne veze nizova $\{c_n\}$ i $\{x_n\}$ proizilazi

$$\frac{F_{ab}(\{x_n\}) - F_{ab}(\{c_n\})}{x_i - c_i} = 0, \tag{3. 5}$$

za $x_i \in$ skupu iracionalnih brojeva, jer je

$$F_{ab}(\{x_n\}) = 0 \text{ i } F_{ab}(\{c_n\}) = 0,$$

za $\{x_n\} \in P_i$, $\{c_n\} \in P_a$.

Za $x_i \in$ skupu racionalnih brojeva imaćemo

$$\left|\frac{F_{ab}(\{x_n\}) - F_{ab}(\{c_n\})}{x_i - c_i}\right| = \frac{1}{q_i^a} \Big/ |p_i/q_i - c_i| < \tag{3. 6}$$

$$< \frac{1}{q_i^a} \Big/ \frac{1}{M_i \cdot q_i^s} = M_i \cdot \frac{1}{q_i^{a-s}} \longrightarrow 0, \text{ za } x_i \longrightarrow c_i.$$

U gornjem izrazu q_i označava imenitelj racionalnog broja x_i, s osnačava algebarski red algebarskog broja c_i, M_i označava jedan konstantan broj koji odgovara algebarskom broju c_i tako da bi bila, prema *Liouville*-ovom stavu, zadovoljena nejednačina

$$|p_i/q_i - c_i| > \frac{1}{M_i \cdot q_i^s},$$

za sve racionalne brojeve p_i/q_i.

Iz dobivenog pod (3. 5) i (3. 6) proizilazi

$$\lim_{x_i \to c_i} \frac{F_{ab}(\{x_n\}) - F_{ab}(\{x_n\} \in P_a)}{x_i - c_i} = 0, \text{ za } x_j = c_j, \tag{3. 7}$$

to jest: Parcijalni izvod funkcije (3. 1) u tački $\{c_n\} \in P_a$ po makojoj od promenljivih jednak je nuli, pa iz toga i onog iz (4, 1.—) sleduje da funkcija (3. 1) ima osobinu (1, 1.—,2°) klase G_{wp}.

5, 3. — Niz nezavisno promenljivih $\{x_n\}$ razdelićemo na proizvoljan način u dve grupe: D_1 i D_2. Uzmimo jedan konstantan niz c_n i neka su u tom nizu vrednosti nezavisno promenljivih grupe D_1 algebarski brojevi reda manjeg od a, a vrednosti nezavisno promenljivih grupe D_2 brojevi koji pripadaju skupu Q definisanom u (§ 2, 1.—).

5, 31. — Za slučaj kada je nezavisno promenljiva x_i iz grupe D_1 a kao posledica toga c_i algebarski broj reda manjeg od a, imamo da je kao i pod (5, 2.—)

$$\lim_{x_i \to c_i} \frac{F_{ab}(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots) - F_{ab}(\{c_n\})}{x_i - c_i} = 0, \tag{3. 8}$$

za $a \in (2, \infty)$, $b \in (-\infty, 0]$.

5, 32. — U slučaju kada je nezavisno promenljiva x_j iz grupe D_2 a kao posledica toga c_j pripada skupu Q, dobivamo

$$\frac{F_{ab}(c_1, \ldots, c_{j-1}, x_j, c_{j+1}, \ldots) - F_{ab}(\{c_n\})}{x_j - c_j} = 0, \tag{3. 9}$$

ako je $x_j \in$ iracionalnih brojeva, jer je

$$F_{ab}(\{x_n\} \in P_i) = 0.$$

No kako je $c_i \in Q$, odnosno

$$c_i \in p/m^r + \sum_{n=1}^{\infty} 1/m^{(E(a)+1)^n},$$

to za

$$x_i \in p/m^r + \sum_{n=1}^{k} 1/m^{(E(a)+1)^n}$$

i prema (2. 14), za $(E(a)+1)^k > r$, imamo

$$\left|\frac{F_{ab}(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots) - F_{ab}(\{c_n\})}{x_i - c_i}\right| = \tag{3. 10}$$

$$= \frac{1}{\left(m^{(E(a)+1)^k}\right)^a} \Big/ \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^{(E(a)+1)^n}} > \frac{1}{\left(m^{(E(a)+1)^k}\right)^a} \Big/ \frac{2}{m^{(E(a)+1)^{k+1}}} =$$

$$= \frac{m^{(E(a)+1)^{k+1}}}{m^{(E(a)+1)^k \cdot a}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{m^{(E(a)+1)^k \cdot (E(a)+1)}}{m^{(E(a)+1)^k \cdot a}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m^{(E(a)+1)^k \cdot (E(a)+1-a)} > 1/2.$$

Prema (3. 9) i (3. 10) ne postoji

$$\lim_{x_j \to c_j} \frac{F_{ab}(c_1, \ldots, c_{j-1}, x_j, c_{j+1}, \ldots) - F_{ab}(\{c_n\})}{x_j - c_j}, \tag{3. 11}$$

za $a \in (2, \infty)$, $b \in (-\infty, 0]$.

Prema dobivenom pod (3. 9) i (3. 11) proizilazi da funkcija (3. 1) ima osobinu (1, 1. —, 3°) klase G_{wp}.

Iz tačaka (5, 1. —), (5, 2. —) i (5, 3. —) proizilazi da je zaista

$$(F_{ab}(\{x_n\}),\ a \in (2, \infty),\ b \in (-\infty, 0],\ R \in (-\infty, \infty)) \in G_{wp}, \tag{3. 12}$$

a iz toga da zaista egzistira klasa funkcija G_{wp}.

6. — Da bismo dokazali egzistenciju klase G_{wq} pokazaćemo da je

$$(F_{ab}(\{x_n\}),\ a \in (2, \infty),\ b \in (0, 1],\ R = 0) \in G_{wq}. \tag{3. 13}$$

U izlaganju pod (6, 1. —), (6, 21. —), (6, 22. —), (6, 3. —), (6, 4. —), (6, 51. —), (6, 521. —), (6, 522. —), i (6, 523. —) podrazumevaćemo da je, ako ne bude drukčije rečeno, $a \in (2, \infty)$, $b \in (0, 1]$, $R=0$, i u mesto funkcije (3, 2) pisaćemo samo $F_{cb}(\{x_n\})$.

6, 1. — Kako je

$$F_{ab}(\{x_n\} \in P_1) = 1/q^a > 0 \quad \text{i} \quad F_{ab}(\{x_n\} \in P_i) = 0$$

i kako su skupovi P_1 i P_i svuda-gusti to je funkcija (3. 2) svuda-gusto prekidna i prema tome ima osobinu (1, 2. —, 1°) klase G_{wq}.

6, 21. — Pokažimo da je funkcija $F_{ab}(\{x_n\})$ neprekidna u svima nizovima $x_n \in P_i$. Da bi to bilo istinito dovoljno je da postoji jedna okolina $\delta > 0$ niza $\{x_n\} \in P_i$ tako da bude zadovoljena nejednačina

$$|F_{ab}(\{x_n\} \in P_1 \cup P_2) - F_{ab}(\{x_n\} \in P_i)| < \varepsilon > 0,$$

odnosno

$$|F_{ab}(\{x_n\} \in P_1 \cup P_2)| < \varepsilon > 0.$$

Takva δ-okolina niza $\{x_n\} \in P_i$ postoji i to je ona za čije je sve tačke ispunjen uslov

$$1/(\min(q_i, q_j))^b < \varepsilon, \quad 1/q^a < \varepsilon, \tag{3. 14}$$

gde su q_i i q_j imenitelji racionalnih članova niza $x_n \in P_2$ a q imenitelj racionalnog člana niza $x_n \in P_1$. Uslov (3. 14) biće ispunjen ako je istovremeno

$$q_i > (1/\varepsilon)^{1/b}, \quad q_j > (1/\varepsilon)^{1/b}, \quad q > (1/\varepsilon)^{1/a}, \tag{3. 15}$$

a uslov (3. 15) biće ispunjen ako je

$$\min(q_i, q_j, q) > \max((1/\varepsilon)^{1/b}, (1/\varepsilon)^{1/a}) = M_1. \tag{3. 16}$$

Da bismo ispunili uslov (3. 16) dovoljno je uzeti onu δ-okolinu niza $\{x_n\} \in P_i$ u kojoj se ne nalazi nijedan niz sa racionalnim članom čiji je imenitelj manji od M_1, a takva okolina, prema (4. —), postoji. Iz toga proizilazi da je funkcija

$$(F_{ab}(\{x_n\}), \ a \in (2, \infty), \ b \in (0, 1], \ R=0) \tag{3. 17}$$

neprekidna u svima tačkama $\{x_n\} \in P_i$.

6, 22. — Uzmimo jedan fiksirani niz $\{c_n\} \in P_q$. Tada je za $x_i \in$ iracionalnih brojeva

$$\frac{F_{ab}(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1} \ldots) - F_{ab}(\{c_n\})}{x_i - c_i} = 0, \tag{3. 18}$$

jer je i $F_{ab}(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots) = 0$ i $F_{ab}(\{c_n\}) = 0$.

Obzirom da je $c_i \in Q$, odnosno

$$c_i = p/m^r + \sum_{n=1}^{\infty} 1/m^{(E(a)+1)^n}$$

to je za

$$x_i \in p/m^r + \sum_{n=1}^{k} 1/m^{(E(a)+1)^n},$$

prema (2. 16)

$$|x_i - c_i| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/m^{(E(a)+1)^n} - \sum_{n=1}^{k} 1/m^{(E(a)+1)^n} = \sum_{n=k+1}^{\infty} 1/m^{(E(a)+1)^n} <$$

$$< 2/m^{(E(a)+1)^{k+1}}.$$

Iz ovog a na osnovu (2. 13), za $(E(a)+1)^k > r$, proizilazi

$$\left| \frac{F_{ab}(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots) - F_{ab}(\{c_n\} \in P_a)}{x_i - c_i} \right| > \tag{3. 19}$$

$$> \frac{1/m^{(E(a)+1)^k \cdot a}}{2/m^{(E(a)+1)^{k+1}}} = \frac{1}{2} \cdot m^{(E(a)+1)^{k+1} - (E(a)+1)^k \cdot a} > 1/2.$$

Iz (3. 18) i (3. 19) proizilazi da funkcija $F_{ab}(\{x_n\})$ nema nijednog parcijalnog izvoda u tačkama $\{x_n\} \in P_q$ i ako je u tima tačkama neprekidna, odnosno funkcija (3. 2) ima osobinu (1, 2. —, 2°) klase G_{wq}.

6, 3. — Ako je $\{c_n\} \in P_a$ onda se na isti način kao pod (5, 2. —) pokazuje da u toj tački postoje parcijalni izvodi po svima nezavisno promenljivim niza $\{x_n\}$. Sem toga prema izloženom u (6, 21. —) funkcija $F_{ab}(\{x_n\})$ je neprekidna u tačkama $\{c_n\} \in P_a$ pa na osnovu toga i (4. —) funkcija (3. 2) ima osobinu klase G_{wq} iz (1, 2. —, 3°).

6, 4. — Na isti način kao pod (5, 3. —), (5, 31. —), i (5, 32. —) a uz to koristeći (6, 21. —) i (4. —) pokazujemo da funkcija (3. 2) ima osobinu klase G_{wq} iz (1, 2. —, 4°).

6, 51. — Ako je fiksirani niz $\{c_n\} \in P_1 \cup P_2$ tada je funkcija $F_{ab}(\{x_n\})$ prekidna u toj tački, pa prema tome nije diferencijabilna.

6, 521. — Ako je fiksirani niz $\{c_n\} \in P_i \cup P_3$ tada je

$$\frac{F_{ab}(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots) - F_{ab}(\{c_n\})}{x_i - c_i} = 0,$$

za $x_i \in$ iracionalnih brojeva, pa prema tome ako egzistira neki od parcijalnih izvoda funkcije $F_{ab}(\{x_n\})$ u tački $\{c_n\} \in P_i \cup P_3$, on mora biti jednak nuli, odnosno ako svi egzistiraju onda svaki od njih mora biti jednak nuli.

6, 522. — Ako u fiksiranoj tački $\{c_n\} \in P_i \cup P_3$ ne egzistira bar jedan od parcijalnih izvoda, tada funkcija $F_{ab}(\{x_n\})$ nije diferencijabilna u toj tački.

6, 523. — Pretpostavimo sada da bar u jednom fiksiranom nizu $\{c_n\} \in P_i \cup P_3$ egzistiraju svi parcijalni izvodi. Da bi funkcija $F_{ab}(\{x_n\})$ bila diferencijabilna u toj tački moralo bi biti

$$\lim_{\{x_n\} \to \{c_n\}} \frac{F_{ab}(\{x_n\}) - F_{ab}(\{c_n\})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - c_i)^2}} = 0. \tag{3. 20}$$

Pokažimo da jednačina (3. 20) ne može da egzistira. U tom cilju uzmimo da promenljivi niz $\{x\}$ variramo tako da zadovoljava sledeće (e) uslove:

$$(e)\qquad \begin{cases} \{x_n\} \in P_2, \quad x_j = p_j/q_j, \quad x_h = p_h/q_h, \quad |x_j - c_j| < 1/q_j, \\ |x_h - c_h| < 1/q_h, \quad (x_k - c_k)^2 < 1/(2^k \cdot (\max(q_j, \ q_h))^2), \\ k \neq (j, h), \quad k \in \text{prirodnih brojeva}, \end{cases}$$

a to možemo ako za q_j i q_h uzmemo prim-brojeve; i kada bude $\{x_n\} \to \{c_n\}$ tada će i $q_j \to \infty$ i $q_h \to \infty$. Ako niz $\{x_n\}$ zadovoljava ovim uslovima tada je

$$(3.21)\qquad \frac{F_{ab}(\{x_n\}) - F_{ab}(\{c_n\})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - c_i)^2}} =$$

$$= \frac{1/(\min(q_j, \ q_h))^b}{\sqrt{(x_j - c_j)^2 + (x_h - c_h)^2 + \sum\limits_{k(\neq j, h)=1}^{\infty}(x_k - c_k)^2}} >$$

$$> \frac{1/(\min(q_j, \ q_h))^b}{\sqrt{1/q_j^2 + 1/q_h^2 + 1/(\max(q_j, q_h))^2}} > \frac{1/q^b}{\sqrt{\dfrac{3}{q^2}}} > \frac{1}{q^b} \Big/ \frac{2}{q} = \frac{1}{2} \cdot q^{1-b} \geqq 1/2 .$$

Kako je (3. 21) u suprotnosti sa (3. 20) proizilazi da jednačina (3. 20) ne može egzistirati, odnosno funkcija (3. 2) nije diferencijabilna ni u jednoj tački pa prema tome ima osobinu (1, 2.—, 5°) klase G_{wq}.

Iz dokazanog pod (6, 1.—), (6, 2.—), (6, 3.—), (6, 4.—) i (6, 5.—) proizilazi da je zaista

$$(3.\ 22)\qquad (F_{ab}(\{x_n\}), \quad a \in (2, \infty), \quad b \in (0, 1], \quad R = 0) \in G_{wq},$$

odnosno: klasa funkcija G_{wq} nije prazna.

7, 0. — Pod (7, . . . —) dokazati ćemo da funkcija (3. 3) pripada klasi G_{wt}. U izlaganju smatrati ćemo da je $a \in (2, \infty)$, $b \in (2, \infty)$, $R = 0$ ukoliko ne bude drukčije istaknuto.

7, 1. — Na isti način kao što se u (6, 1.—) dokazuje za funkciju (3. 2), pokazuje se i za funkciju (3. 3) da je prekidna u svima tačkama $\{x_n\} \in P_1 \cup P_2$ te prema tome ima osobinu (1, 3.—, 1°) klase G_{wt}.

7, 2. — Kao što u (6, 21.—) i (6, 22.—) pokazujemo da je funkcija (3. 2) u svuda-gusto raspoređenim nizovima neprekidna-neizvodljiva, na isti način pokazujemo tu osobinu i za funkciju (3. 3), to jest da ima osobinu (1, 3.—, 2°) klase G_{wt}.

7, 3 — Na isti način kao pod (5, 3.—) (5, 31.—), (5, 32.—), a uz to koristeći i (4.—), pokazuje se da funkcija (3. 3) ima osobinu iz (1, 3.—, 3°) klase G_{wt}.

7, 4. — Pokažimo sada da je funkcija (3. 3) diferencijabilna u svima nizovima $\{c_n\} \in P_a \cap P_b$. U tom cilju uzmimo jednu proizvoljnu fiksiranu tačku $\{c_n\} \in P_a \cap P_b$ i ispitajmo šta se dešava sa količnikom

$$\frac{F_{ab}(\{x_n\}) - F_{ab}(\{c_n\})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - c_i)^2}} \tag{3. 23}$$

kada $\{x_n\} \to \{c_n\}$.

7, 41. — Ako je $\{x_n\} \in P_i \cup P_3$ tada je

$$\frac{F_{ab}(\{x_n\} \in P_i \cup P_3) - F_{ab}(\{c_n\})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - c_i)^2}} = 0, \tag{3. 24}$$

jer je i $F_{ab}(\{x_n\} \in P_i \cup P_3) = 0$ i $F_{ab}(\{c_n\}) = 0$.

7, 42. — Kad je $\{x_n\} \in P_2$ imamo

$$\frac{F_{ab}(\{x_n\} \in P_2) - F_{ab}(\{c_n\})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - c_i)^2}} = \frac{1/(\min(q_j, q_h))^b}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - c_i)^2}} < \tag{3. 25}$$

$$< \frac{1/q^b}{1/(M \cdot q^s)} = M \cdot \frac{1}{q^{b-s}} \to 0, \text{ za } \{x_n\} \to \{c_n\}.$$

($q = \min(q_j, q_h)$, s je algebarski red onog između x_j i x_h koji ima manji imenitelj, M je njemu odgovarajuća konstanta tako da bude zadovoljena već pomenuta *Liouville*-ova nejednačina).

7, 43. — Kad je $\{x_i\} \in P_1$ sleduje

$$\frac{F_{ab}(\{x_n\} \in P_1) - F_{ab}(\{c_n\})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - c_i)^2}} = \frac{1/q^a}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - c_i)^2}} < \tag{3. 26}$$

$$< \frac{1}{q^a} \Big/ \frac{1}{M \cdot q^s} = M \cdot 1/q^{a-s} \to 0, \text{ za } \{x_n\} \to \{c_n\}.$$

Na osnovu pokazanog zaključujemo da funkcija $F_{ab}(\{x_n\})$ ima sve parcijalne izvode jednake nuli u tačkama $\{c_n\} \in P_a \cap P_b$ kao i da je u tima tačkama diferencijabilna, to jest ima osobinu (1,3. — ,5°) klase G_{wt}.

Na osnovu dobijenog pod (7, 1. —), (7, 2. —), (7, 3. —) i (7, 4. —) zaključujemo da je zaista

$$(F_{ab}(\{x_n\}),\quad a \in (2, \infty),\quad b \in (2, \infty),\quad R = 0) \in G_{wt}.$$

a iz toga proizilazi da egzistira klasa funkcija G_{wt}.

§ 4. Egzistencija nekih klasa kompleksnih funkcija

U ovom paragrafu dokazaćemo egzistenciju klasa: H_p, H_q *i* H_t *i formirati što prostije funkcije koje pripadaju tim klasama.*

1, 1. — *Sa* H_p *označili smo klasu svih kompleksnih funkcija koje zavise od jedne kompleksne nezavisno promenljive i od kojih svaka ima istovremeno sledeće osobine:*

1°. *U svima tačkama je prekidna;*

2°. *Egzistira skup svuda-gusto raspoređenih tačaka u kojima su zadovoljene Cauchy-Riemann-ove jednačine ali ni u jednoj od tih tačaka nema izvoda.*

1, 2. — *Sa* H_q *označili smo klasu svih kompleksnih funkcija koje zavise od jedne kompleksne nezavisno promenljive i od kojih svaka ima istovremeno sledeće osobine:*

1°. *Egzistira skup svuda-gusto raspoređenih tačaka u kojima je funkcija prekidna;*

2°. *Egzistira skup svuda-gusto raspoređenih tačaka u kojima je funkcija neprekidna, u svakoj od tih tačaka zadovoljene su Cauchy-Riemann-ove jednačine ali opet ni u jednoj od tih tačaka ne postoji izvod;*

3°. *Nema izvod ni u jednoj tački.*

1, 3. — *Sa* H_t *označili smo klasu svih kompleksnih funkcija koje zavise od jedne kompleksne nezavisno promenljive i od kojih svaka ima istovremeno sledeće osobine:*

1°. *Egzistira skup svuda-gusto raspoređenih tačaka u kojima je funkcija prekidna;*

2°. *Egzistira skup svuda-gusto raspoređenih tačaka u kojima su zadovoljene Cauchy-Riemann-ove jednačine ali ni u jednoj od tih tačaka ne postoji izvod;*

3°. *Egzistira skup svuda-gusto raspoređenih tačaka u kojima postoji izvod.*

2, 1. — *Da bi dokazali da klase* H_p, H_q *i* H_t *nisu prazne, formiraćemo izvesne funkcije za koje ćemo pokazati da pripadaju pojedinim od tih klasa.*

Formirajmo kompleksnu funkciju koja zavisi od jedne kompleksne nezavisno promenljive $F_a(z) = F_a(x+iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, *na sledeći način:*

$P(x, y) = 0$, *kada su i x i y iracionalni brojevi;*

$P(x, y) = 1/(min(q_1, q_2))^a$, *kada su i x i y racionalni brojevi različiti od nule (*q_1 *i* q_2 *su imenitelji tih racionalnih brojeva pri čemu su brojitelj i imenitelj uzajamno prosti brojevi; a proizvoljan fiksirani realan broj);*

$P(x, y) = 0$, *kada je samo x ili samo y racionalan broj;*

$P(x, y) = 0$, *kada je bar ili x ili y jednako nuli;*

$Q(x, y) = 1$, *za svako* (x, y).

2, 2. — *Iz skupa funkcija koje smo formirali izdvojićemo sledeće tri familije:*

$(k. 1)$	$(F_a(z)$ *za* $a \leqslant 0);$
$(k. 2)$	$(F_a(z)$ *za* $a \in (0, 1]);$
$(k. 3)$	$(F_a(z)$ *za* $a > 2).$

3. — *Označimo za ovaj paragraf sa R skup svih racionalnih brojeva različitih od nule; sa I skup svih iracionalnih brojeva i još nula; sa A skup iracionalnih algebarskih brojeva čiji je algebarski red manji od a; sa Q skup brojeva koji je tako označen i definisan u (§ 2.). Svaki od skupova tačaka definisan na ovaj način je svuda-gusto raspoređen. Skup tačaka $z=x+iy$, koji zadovoljava jedan i samo jedan od sledećih uslova:*

$$(x\in R,\ y\in R),\ (x\in R,\ y\in I),\ (x\in R,\ y\in A),\ (x\in R,\ y\in Q),$$
$$(x\in I,\ y\in R),\ (x\in I,\ y\in I),\ (x\in I,\ y\in A),\ (x\in I,\ y\in Q),$$
$$(x\in A,\ y\in R),\ (x\in A,\ y\in I),\ (x\in A,\ y\in A),\ (x\in A,\ y\in Q),$$
$$(x\in Q,\ y\in R),\ (x\in Q,\ y\in I),\ (x\in Q,\ y\in A),\ (x\in Q,\ y\in Q),$$

takođe je svuda-gusto raspoređen.

4, 1. — Prema (2, 1. —) imamo da je za $a\leqslant 0$:

$$F_a(z_1)=i, \text{ za } (x_1\in I,\ y_1\in I);$$
$$F_a(z_2)=1/(\min(q_1, q_2))^a+i, \text{ za } (x_2\in R,\ y_2\in R),$$

a odatle proizilazi

$$F_a(z_2)-F_a(z_1)=1/(\min(q_1, q_2))^a\geqslant 1.$$

Obzirom da su tačke $(x\in I,\ y\in I)$ kao i tačke $(x\in R,\ y\in R)$, svuda-gusto raspoređene, konstatujemo da je funkcija $(F_a(z),\ a\leqslant 0)$ prekidna u svima tačkama.

4, 2. — Uočimo fiksiranu tačku z_3 za koju je $(x_3\in I,\ y_3\in I)$. Na osnovu prethodnog imamo da je u tački z_3:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}=\lim_{x\to x_3}\frac{P(x,y_3)-P(x_3,y_3)}{x-x_3}=0,$$

jer je i $P(x,y_3)=0$ i $P(x_3,y_3)=0$;

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\lim_{y\to y_3}\frac{P(x_3,y)-P(x_3,y_3)}{y-y_3}=0,$$

jer je i $P(x_3,y)=0$ i $P(x_3,y_3)=0$;

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}=0,\quad \text{jer je } Q(x,y)=1.$$

Sem toga ne egzistira

$$\lim_{z\to z_3}\frac{F(z)-F(z_3)}{z-z^3},$$

jer je za svako $(x\in R,\ y\in R)$,

$$F(z)-F(z_3)=1/(\min(q_1, q_2))^a\geqslant 1,$$

a tačke $(x\in R, y\in R)$ su svuda-guste. No da u tački z_3 ne egzistira izvod proizilazi i iz činjenice da je funkcija prekidna u svima tačkama.

Iz gornjeg proizilazi da funkcija $(F_a(z), a \leqslant 0)$ u tački $z_3, (x_3 \in I, y_3 \in I)$, zadovoljava *Cauchy-Riemann*-ove jednačine ali u toj tački nema izvoda, pa prema rečenom pod (4, 1. —) i (4, 2. —) proizilazi da je

$$(F_a(z),\ a \leqslant 0) \subset H_p,$$

odnosno klasa H_p nije prazna.

5. — Da bi dokazali egzistenciju klase H_q pokazaćemo da je

$$(F_a(z),\ a \in (0, 1]) \subset H_q.$$

U izlaganju pod (5, 1. —), (5, 2. —) i (5, 3. —) pretpostavićemo da je $a \in (0, 1]$.

5, 1. — Uočimo fiksiranu tačku z_4 za koju je $(x_4 \in R,\ y_4 \in R)$. U svakoj okolini tačke z_4 nalazi se bar jedna tačka z_5, $(x_5 \in I,\ y_5 \in I)$, pa je

$$F_a(z_4) - F_a(z_5) = 1/(\min(q_1, q_2))^a > 0,$$

a iz toga proizilazi da je funkcija $F_a(z)$ prekidna u svima tačkama z za koje je $(x \in R,\ y \in R)$ a te su tačke svuda-gusto raspoređene pa je funkcija $F_a(z)$ prekidna u svuda-gusto raspoređenim tačkama.

5, 2. — Uzmimo fiksiranu tačku z_6 za koju je $(x_6 \in I,\ y_6 \in I)$. Na isti način kao u (4, 2. —) za tačku z_3, pokazali bi da su i u tački z_6 zadovoljene *Cauchy-Riemann*-ove jednačine. Tačke z za koje je $(x \in I,\ y \in I)$ takođe su svuda-gusto raspoređene.

5, 3. — Pokažimo sada da funkcija $(F_a(z),\ a \in (0, 1])$ nema izvod ni u jednoj tački. U tačkama $z_7 (x_7 \in R,\ y_7 \in R)$ nema izvod jer je u tim tačkama prekidna.

Uočimo li jednu fiksiranu tačku z_8, tada je:

$$\lim_{x \to x_8,\ (y \equiv y_8)} \frac{P(z) - P(z_8)}{z - z_8} = \frac{\partial P(x_8, y_8)}{\partial x} = 0, \text{ za } (x_8 \in I,\ y_8 \in I);$$

$$\lim_{x \to x_8,\ (y \equiv y_8)} \frac{P(z) - P(z_8)}{z - z_8} = \frac{\partial P(x_8, y_8)}{\partial x} = 0, \text{ za } (x_8 \in R,\ y_8 \in I);$$

$$\lim_{y \to y_8,\ (x \equiv x_8)} \frac{P(z) - P(z_8)}{z - z_8} = \frac{\partial P(x_8, y_8)}{\partial y} = 0, \text{ za } (x_8 \in I,\ y_8 \in R).$$

Sem toga je

$$\lim_{z \to z_8} \frac{F_a(z) - F_a(z_8)}{z - z_8} = \lim_{z \to z_8} \frac{P(z) - P(z_8)}{z - z_8}, \text{ jer je } Q(z) = 1.$$

Iz ovog proizilazi da ako je funkcija $(F_a(z),\ a \in (0, 1])$ neprekidna u jednoj tački z_8, izvod u toj tački ne može biti različit od nule.

Pokažimo sada da izvod u tački z_8 ne može biti ni nula. Mi u svakoj okolini tačke z_8 možemo uočiti tačku z_n koja zadovoljava uslove:

$$z_n = x_n + i y_n; \quad x_n = p_{n_1}/q_n; \quad y_n = p_{n_2}/q_n;$$

p_{n_1} i q_n uzajamno prosti brojevi; p_{n_2} i q_n uzajamno prosti brojevi;

$$|x_8 - p_{n_1}/q_n| \leqslant 1/q_n; \quad |y_8 - p_{n_2}/q_n| \leqslant 1/q_n.$$

Tada između tačaka z_8 i z_n postoji sledeća veza:

$$\left|\frac{F_a(z_n) - F_a(z_8)}{z_n - z_8}\right| = \frac{1/q_n^a}{\sqrt{(y_n - y_8)^2 + (x_n - x_8)^2}} > \frac{1}{q_n^a} \Big/ \frac{2}{q_n} = 1/(2 \cdot q_n^{a-1}) \geqslant 1/2.$$

Iz gornjeg proizilazi da ne egzistira

$$\lim_{z \to z_8} \frac{F_a(z) - F_a(z_8)}{z - z_8},$$

to jest funkcija $(F_a(z),\ a \in (0,\ 1])$ nema izvod ni u jednoj tački.

Iz svega dokazanog pod (5, 1. —), (5, 2. —) i (5, 3. —) izvodimo zaključak da je

$$(F_a(z),\ a \in (0,\ 1]) \subset H_q,$$

to jest egzistira klasa H_q.

6. — U daljem izlaganju pod (6, 1. —), (6, 2. —) i (6, 3. —) pretpostavićemo da je $a > 2$ i pokazaćemo da je

$$(F_a(z),\ a > 2) \subset H_t.$$

6, 1. — Uzmemo li makoju fiksiranu tačku z_9 za koju je $(x_9 \in R,\ y_9 \in R)$, funkcija $F_a(z)$ biće prekidna u toj tački. To bi dokazali na isti način kao što smo za tačku z_4 u (5, 1. —). Obzirom da su tačke z_9 svuda-gusto raspoređene proizilazi da funkcija $F_a(z)$ ima osobinu (1° iz 1, 3. —).

6, 2. — Uzmimo makoju fiksiranu tačku z_{10} za koju je $(x_{10} \in Q,\ y_{10} \in Q)$. Na isti način kao pod (4, 2. —) za tačku z_3, pokazujemo da su zadovoljene *Cauchy-Riemann*-ove jednačine i u tački z_{10}.

Pokažimo sada da funkcija $(F_a(z),\ a > 2)$ nema izvod u tački z_{10}. Prema rečenom u (5, 3. —) imamo

$$(4.\ 1) \qquad \lim_{z \to z_{10}\,(y \equiv y_{10})} \frac{F(z) - F(z_{10})}{z - z_{10}} = \lim_{x \to x_{10}(y \equiv y_{10})} \frac{P(z) - P(z_{10})}{z - z_{10}} = 0.$$

Iz ovog proizilazi: Kad bi egzistirao izvod u tački z_{10}, morao bi biti jednak nuli. Ali kako je prema (2. 8)

$$x_{10} = p_1/m^{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} 1/m^{(E(a)+1)^n},$$

$$y_{10} = p_2/m^{r_2} + \sum_{n=1}^{\infty} 1/m^{(E(a)+1)^n},$$

to svakoj okolini broja z_{10} odgovara jedno k tako da se u toj okolini nalazi broj z za koji je

$$x = p_1/m^{r_1} + \sum_{n=1}^{k} 1/m^{(E(a)+1)^n},$$

$$y = p_2/m^{r_2} + \sum_{n=1}^{k} 1/m^{(E(a)+1)^n},$$

i pri čemu je $(E(a)+1)^k > \max(r_1, r_2)$.

Između z_{10} i z postojaće tada veza

$$\left|\frac{F_a(z)-F_a(z_{10})}{z-z_{10}}\right| = \left|\frac{P(z)-P(z_{10})}{z-z_{10}}\right| = \left|\frac{P(x,y)-P(x_{10}, y_{10})}{z-z_{10}}\right| = \tag{4. 2}$$

$$= \frac{P(x,y)}{\sqrt{(x-x_{10})^2+(y-y_{10})^2}} =$$

$$= \frac{1}{m^{(E(a)+1)^k \cdot a}} \Big/ \sqrt{(\sum_{n=k+1}^{\infty} 1/(E(a)+1)^n)^2 + (\sum_{n=k+1}^{\infty} 1/(E(a)+1)^n)^2} >$$

$$> \frac{1}{m^{(E(a)+1)^k \cdot a}} \Big/ 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} 1/(E(a)+1)^n >$$

$$> \frac{1}{m^{(E(a)+1)^k \cdot a}} \Big/ \left(4 \cdot \frac{1}{m^{(E(a)+1)^{k+1}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot m^{(E(a)+1)^k (E(a)+1-a)} > 1/4 .$$

Iz (4. 1) i (4. 2) proizilazi da ne egzistira izvod u tački z_{10}, a odatle da funkcija $(F_a(z),\ a>2)$ ima osobinu 2° iz (1, 3. —), jer su tačke z_{10} koje zadovoljavaju uslov $(x \in Q,\ y \in Q)$ svuda-gusto raspoređene.

6, 3. — Uzmimo fiksiranu tačku z_{11} koja zadovoljava uslov $(x_{11} \in A,\ y_{11} \in A)$, i pokažimo da egzistira izvod funkcije $(F_a(z),\ a>2)$ u tački z_{11}.

Primetimo prvo da je:

$$\left|\frac{P(z)-P(z_{11})}{z-z_{11}}\right| = 0, \quad \text{za } (x \in I,\ y \in I), \tag{4. 3}$$

$$\left|\frac{P(z)-P(z_{11})}{z-z_{11}}\right| = 0, \quad \text{za } (x \in I,\ y \in R), \tag{4. 4}$$

$$\left|\frac{P(z)-P(z_{11})}{z-z_{11}}\right| = 0, \quad \text{za } (x \in R,\ y \in I). \tag{4. 5}$$

Ako je $(x \in R,\ y \in R)$ imamo

$$\left|\frac{P(z)-P(z_{11})}{z-z_{11}}\right| = \left|\frac{P(x,y)-P(x_{11}, y_{11})}{\sqrt{(x-x_{11})^2+(y-y_{11})^2}}\right| = \tag{4. 6}$$

$$= \frac{1}{(\min(q_1, q_2))^2} \Big/ \sqrt{(x-x_{11})^2+(y-y_{11})^2} <$$

$$< \frac{1}{q^a} \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{1}{M_1 \cdot q_1^{s_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{M_2 \cdot q_2^{s_2}}\right)^2} < \frac{1}{q^a} \Bigg/ \frac{1}{M \cdot q^s} =$$

$$= M \cdot \frac{1}{q^{a-s}} \to 0, \text{ za } z \to z_{11}, \text{ pri čemu je}$$

$$q = \min(q_1, q_2), \quad M = \max(M_1, M_2), \quad s = \max(s_1, s_2).$$

Ovde smo sa q_1 označili imenitelj racionalnog broja x, sa q_2 imenitelj racionalnog broja y, sa s_1 algebarski red broja x_{11}, sa s_2 algebarski red broja y_{11}, sa M_1 fiksirani broj koji odgovara broju x_{11} tako da je zadovoljen uslov $|x_{11} - m/n| > 1/(M_1 \cdot n^{s_1})$, za svako celobrojno m i n $(n \neq 0)$, sa M_2 označili smo fiksirani broj koji odgovara broju y_{11} tako da bude zadovoljen uslov $|y_{11} - m/n| > 1/(M_2 \cdot n^{s_1})$, za svako celobrojno m i n $(n \neq 0)$.

Pri zaključivanju u (4. 6) koristili smo se sledećim nejednakostima

$$\sqrt{(x-x_{11})^2 + (y-y_{11})^2} > \sqrt{(1/(M_1 \cdot q_1^{s_1}))^2 + (1/(M_2 \cdot q_2^{s_2}))^2} >$$
$$> \max(1/(M_1 \cdot q_1^{s_1}), \ 1/(M_2 \cdot q_2^{s_2})) \geqslant 1/(Mq^s).$$

Iz (4. 3), (4. 4), (4. 5), (4. 6) proizilazi da je

$$\lim_{z \to z_{11}} \frac{P(z) - P(z_{11})}{z - z_{11}} = 0$$

odnosno

$$\lim_{z \to z_{11}} \frac{F_a(z) - F_a(z_{11})}{z - z_{11}} = 0,$$

a to znači da egzistira izvod funkcije $(F_a(z),\ a > 2)$ u tački z_{11} i jednak je nuli.

Iz (6, 1. —), (6, 2. —) i (6, 3. —) proizilazi da je $(F_a(z),\ a > 2) \in H_t$, a to znači da egzistira klasa H_t.

7. — *Ako je $f(z)$ analitička funkcija tada je takođe:*

$$(F_a(z),\ a \leqslant 0) + f(z) \in H_p,$$
$$(F_a(z),\ a \in (0, 1]) + f(z) \in H_q,$$
$$(F_a(z),\ a > 2) + f(z) \in H_t,$$

to jest svakoj analitičkoj funkciji jedne kompleksne promenljive možemo uočiti odgovarajuću funkciju, odnosno familiju funkcija, iz makoje od klasa H_p, H_q, H_t sa kojom se obostrano jednoznačno povezuje a iz toga proizilazi da kardinalni broj skupa funkcija makoje od klasa H_p, H_q, H_t nije manji od kardinalnog broja skupa svih analitičkih funkcija jedne kompleksne nezavisno promenljive.

Napomena u vezi prve glave

U prvoj glavi koristili smo se na više mesta aproksimacijom algebarskih brojeva pomoću racionalnih. Mi smo se tom prilikom poslužili *Liouville*-ovim stavom o aproksimaciji algebarskih brojeva pomoću racionalnih i ako su mnogo precizniji stavovi do kojih su došli *Thue* u radu [10], *Siegel* u radu [9] i *Гельфонд* u radu [1], jedan iza drugog u izvesnim vremenskim razmacima. *Thue* je 1909 dokazao stav:

„Ako su: ζ proizvoljan fiksirani algebarski broj reda k, $k \geqslant 2$, a $\varepsilon > 0$ proizvoljan fiksirani realan broj tada nejednakost

$$|\zeta - p/q| < 1/q^{k/2+1+\varepsilon}$$

ima samo konačno-mnogo rešenja po celobrojnim nepoznatim p i $q > 0$“. *Siegel* 1921 dokazuje i stav:

„Ako su: ζ proizvoljan fiksirani algebarski broj reda k, $k \geqslant 2$, $\varepsilon > 0$ proizvoljan fiksirani realan broj, a s celobrojna promenljiva koja zadovoljava uslov $1 \leqslant s \leqslant k-1$, tada nejednačina

$$|\zeta - p/q| < 1/q^{\min(k/(s+1)+s)+\varepsilon}$$

ima samo konačno-mnogo rešenja po celobrojnim nepoznatim p i q, $q > 0$“. *Гельфонд* je 1943 došao i do preciznije aproksimacije. No i da smo se koristili *Thue*-ovim ili *Siegel*-ovim stavom mesto *Liouville*-ovim ne bi se ništa izmenilo u formulaciji rezultata dobivenih u prvoj glavi. Da smo se koristili *Thue*-ovim stavom tada bi, na primer, mogli da tvrdimo da funkcija (3. 1) ima sve parcijalne izvode jednake nuli ne samo u tačkama $\{c_n\} \in P_a$ nego i u tačkama $\{c_n\} \in P_{2(a-1)}$ — (Strana 15, 22—24 red odozgo). No takva konstatacija ne otkriva nam ništa novije.

DRUGA GLAVA

NEKOLIKO TEOREMA O IZVODLJIVOSTI FUNKCIJA KOJE SU NEPREKIDNE U SVUDA-GUSTO RASPOREĐENIM TAČKAMA

§ 5. Izvodljivost svuda-gusto prekidnih realnih funkcija koje zavise od jedne realne promenljive

U ovom paragrafu dokazaćemo dve teoreme koje se odnose na diferencijabilnost realnih funkcija jedne nezavisno promenljive, koje su istovremeno svuda-gusto prekidne i svuda-gusto neprekidne.

Teorema (I): Ako je realna funkcija $f(x)$, $x \in (a, b)$, svuda-gusto prekidna i istovremeno svuda-gusto neprekidna tada postoje svuda-gusto raspoređene tačke u kojima je funkcija $f(x)$ neprekidna ali u njima nije izvodljiva.

Dokaz. — 1. — Neka je $f(x)$, $x \in (a, b)$, realna funkcija koja je svuda-gusto prekidna i istovremeno svuda-gusto neprekidna na intervalu (a, b). Uzmimo ma koja dva broja $c_1 \in (a, b)$ i $c_2 \in (a, b)$ i neka je $c_1 < c_2$. U vezi brojeva c_1 i c_2 konstruisaćemo jedan niz brojeva $\{\beta_n\}$. Obzirom da je funkcija $f(x)$ svuda-gusto neprekidna postoji broj $\alpha_1 \in (c_1, c_2)$ takav da je funkcija $f(x)$ neprekidna u α_1. Uzmemo li proizvoljan broj $\varepsilon_1 > 0$ tada će brojevima α_1 i ε_1 odgovarati bar jedan broj $\delta_1 > 0$ takav da budu ispunjeni uslovi:

$$(\alpha_1 - \delta_1,\ \alpha_1 + \delta_1) \subset (c_1,\ c_2),$$

$$|f(x) - f(\alpha_1)| < \varepsilon_1 \ \text{ za } \ x \in (\alpha_1 - \delta_1,\ \alpha_1 + \delta_1).$$

Pošto je funkcija $f(x)$ svuda-gusto prekidna postoji broj $\beta_1 \in (\alpha_1 - \delta_1,\ \alpha_1 + \delta_1)$ takav da je funkcija $f(x)$ prekidna u β_1. Broju β_1 odgovara bar jedan broj $l_1 \in (0{,}2\,\varepsilon_1)$ takav da u svakoj okolini broja β_1 postoji bar jedan broj γ_1 takav da je $f(\gamma_1) - f(\beta_1) > l_1$. Sem toga je

$$f(x) - f(\beta_1) < 2\,\delta_1 \ \text{ za } \ x \in (\alpha_1 - \delta_1,\ \alpha_1 + \delta_1).$$

Analogno gornjem postoji broj

$$\alpha_2 \in (\beta_1 - l_1,\ \beta_1 + l_1) \cap (\alpha_1 - \delta_1,\ \alpha_1 + \delta_1),$$

takav da je funkcija $f(x)$ neprekidna u α_2. Uzmemo li broj $\varepsilon_2 > 0$, koji zadovoljava uslov $\varepsilon_2 \in (0,\ l_1/4)$ tada će brojevima α_2 i ε_2 odgovarati bar jedan broj $\delta_2 > 0$ koji ima osobinu $(\alpha_2 - \delta_2,\ \alpha_2 + \delta_2) \subset (\beta_1 - l_1,\ \beta_1 + l_1) \cap (\alpha_1 - \delta_1,\ \alpha_1 + \delta_1)$, $f(x) - f(\alpha_2) < \varepsilon_2$ za $x \in (\alpha_2 - \delta_2,\ \alpha_2 + \delta_2)$.

Obzirom da je funkcija $f(x)$ svuda-gusto prekidna postoji broj $\beta_2 \in (\alpha_2 - \delta_2,\ \alpha_2 + \delta_2)$ takav da je funkcija $f(x)$ prekidna u β_2. Broju β_2 odgovara bar jedan broj $l_2 \in (0,2\varepsilon_2)$ takav da u svakoj okolini broja β_2 postoji bar jedan broj γ_2 takav da je

$$f(\gamma_2)-f(\beta_2)>l_2.$$

Sem toga je

$$|f(x)-f(\beta_2)|<2\,\varepsilon_2 \quad \text{za } x \in (\alpha_2-\delta_2,\ \alpha_2+\delta_2).$$

Produžavajući na gornji način sa formiranjem brojeva, pretpostavimo da već imamo brojeve α_m, ε_m, δ_m, β_m, i l_m gde je $m \in$ prirodnih brojeva. Uočimo zatim jedan broj

$$\alpha_{m+1} \in (\alpha_m-\delta_m,\ \alpha_m+\delta_m) \cap (\beta_m-l_m,\ \beta_m+l_m)$$

takav da funkcija $f(x)$ bude neprekidna u tački α_{m+1}. Uzmimo neki broj $\varepsilon_{m+1}>0$ koji zadovoljava uslov

(5. 1) $$\varepsilon_{m+1} \in (0,\ l_m/4).$$

Brojevima α_{m+1} i ε_{m+1} odgovara bar jedan broj $\delta_{m+1}>0$ tako da zadovoljavaju uslove

(5. 2) $$(\alpha_{m+1}-\delta_{m+1},\ \alpha_{m+1}+\delta_{m+1}) \subset (\beta_m-l_m,\ \beta_m+l_m) \cap (\alpha_m-\delta_m,\ \alpha_m+\delta_m),$$

(5. 3) $$|f(x)-f(\alpha_{m+1})|<\varepsilon_{m+1} \quad \text{za} \quad x \in (\alpha_{m+1}-\delta_{m+1},\ \alpha_{m+1}+\delta_{m+1}).$$

Obzirom da je funkcija $f(x)$ svuda-gusto prekidna postoji broj

(5. 4) $$\beta_{m+1} \in (\alpha_{m+1}-\delta_{m+1},\ \alpha_{m+1}+\delta_{m+1}),$$

takav da je funkcija $f(x)$ prekidna i u β_{m+1}.

(5. 5)
(5. 6)

Broju β_{m+1} odgovara bar jedan broj

$$l_{m+1} \in (0,\ 2\,\varepsilon_{m+1})$$

takav da u svakoj okolini broja β_{m+1} postoji bar jedan broj γ_{m+1} takav da je

$$|f(\gamma_{m+1})-f(\beta_{m+1})|>l_{m+1}.$$

Sem toga zadovoljen je i uslov

$$f(x)-f(\beta_{m+1})<2\,\varepsilon_{m+1}, \quad \text{za} \quad x \in (\alpha_{m+1}-\delta_{m+1},\ \alpha_{m+1}+\delta_{m+1}).$$

Produžavajući na ovaj način formirali bi beskonačan niz brojeva $\{\beta_n\}$.

2. — Pokažimo da je niz $\{\beta_n\}$ konvergentan. Prema (5. 2) je:

(5. 7) $$(\alpha_{n+1}-\delta_{n+1},\ \alpha_{n+1}+\delta_{n+1}) \subset (\alpha_n-\delta_n,\ \alpha_n+\delta_n).$$

(5. 8) Iz (5. 4) i (5, 7) sleduje da se van intervala $(\alpha_{n+1}-\delta_{n+1},\ \alpha_{n+1}+\delta_{n+1})$ može nalaziti najviše n članova niza $\{\beta_n\}$, odnosno da se skoro svi članovi niza $\{\beta_n\}$ nalaze u intervalu

$$(\alpha_{n+1}-\delta_{n+1},\ \alpha_{n+1}+\delta_{n+1}).$$

Iz (5. 5) sleduje

(5. 9) $$l_n \leqslant 2\varepsilon_n,$$

a prema (5. 1)

(5. 10) $$\varepsilon_{n+1} \leqslant l_n/4.$$

Iz (5. 9) i (5. 10) proizilazi:

(5. 11) $$2\varepsilon_n \geqslant 4\varepsilon_{n+1}, \quad \text{odnosno} \quad \varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon_n/2.$$

Prema (5. 2) je

$$(\alpha_{n+1} - \delta_{n+1},\ \alpha_{n+1} + \delta_{n+1}) \subset (\beta_n - l_n,\ \beta_n + l_n),$$

a odatle sledi da je

(5. 12) $$\delta_{n+1} < l_n.$$

Iz (5. 9) i (5. 12) proizilazi da je

(5. 13) $$\delta_{n+1} < l_n < 2\varepsilon_n.$$

Iz (5. 11) proizilazi da je niz

(5. 14) $$\{\varepsilon_n\}$$

monotono opadajući i nula niz, pa su, tim pre, prema (5. 13), i nizovi $\{l_n\}$ i $\{\delta_n\}$ nula nizovi. Kako je niz $\{\delta_n\}$ nula niz proizilazi da dužina intervala

(5. 15) $\left\{\begin{array}{l} (\alpha_{n+1} - \delta_{n+1},\ \alpha_{n+1} + \delta_{n+1}) \text{ teži nuli kada } n \to \infty. \text{ Iz ovog i tvrdnje} \\ \text{(5. 8) proizilazi da je niz } \{\beta_n\} \text{ konvergentan. Označimo njegovu} \\ \text{graničnu vrednost sa } \beta. \end{array}\right.$

3. Pokažimo sada da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački β. Uzmimo proizvoljno mali broj $\varepsilon > 0$. Kako je prema (5. 14) niz $\{\varepsilon_n\}$ monotono opadajući i nula niz, proizilazi da on ima član $\varepsilon_k < \varepsilon/2$ pa će na osnovu (5. 3) biti

$$|f(x) - f(\alpha_k)| < \varepsilon_k < \varepsilon/2, \quad \text{za} \quad x \in (\alpha_k - \delta_k,\ \alpha_k + \delta_k),$$

a pošto je

$$\beta \in (\alpha_k - \delta_k,\ \alpha_k + \delta_k),$$

imamo da je

$$|f(x) - f(\beta)| < 2\varepsilon_k < \varepsilon, \text{ za } x \in (\alpha_k - \delta_k,\ \alpha_k + \delta_k).$$

Iz ovog proizilazi da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $\beta \in (c_1, c_2)$.

4. — Pokažimo da funkcija $f(x)$ ne može imati konačan izvod u tački β. Kad bi postojao konačan izvod u tački β on bi bio neki broj kojeg ćemo označiti sa M. Pretpostavimo sada da funkcija $f(x)$ ima izvod u tački β to jest da je

(5. 16) $$\lim_{x \to \beta} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} = M.$$

Iz pretpostavke (5. 16) sledilo bi da proizvoljno malom broju $\theta \in (0, 1/2)$ odgovara jedan broj $\varphi > 0$ tako da bude ispunjen uslov:

$$\left|\frac{f(x_1)-f(\beta)}{x_1-\beta} - \frac{f(x_2)-f(\beta)}{x_2-\beta}\right| < \theta, \text{ za } \begin{matrix} x_1 \in (\beta-\varphi, \beta+\varphi) \\ x_2 \in (\beta-\varphi, \beta+\varphi) \end{matrix}. \tag{5. 17}$$

Pokažimo da uslov (5. 17) ne može biti ispunjen. Uočimo β_k član niza $\{\beta_n\}$ koji zadovoljava uslov

$$\beta_k \in (\beta-\varphi, \beta+\varphi), \ \beta_k \neq \beta,$$

a to možemo prema (5. 15). Prema (5. 6), (5. 2) i (5. 4) broju β_k odgovaraju tri broja l_k, γ_k i λ koji zadovoljavaju uslove

$$l_k > |\beta_k - \beta|, \ \gamma_k \in (\beta-\varphi, \beta+\varphi), \ \gamma_k \neq \beta,$$

$$\frac{\beta_k-\beta}{\gamma_k-\beta} = 1+\lambda, \ |\lambda| < \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{\beta_k-\beta}{f(\gamma_k)-f(\beta)}\right|.$$

Da postoje brojevi γ_k i λ jasnije nam je ako primetimo da su ispravne (5. 18) i (5. 19) relacije:

$$1 \neq \frac{\beta_k-\beta}{\gamma_k-\beta} \to 1, \text{ kad } \gamma_k \to \beta_k, \tag{5. 18}$$

$$\left|\frac{\beta_k-\beta}{f(\gamma_k)-f(\beta)}\right| > \left|\frac{\beta_k-\beta}{2\varepsilon_1}\right| = \text{const, za } \gamma_k \in (\alpha_1-\delta_1, \alpha_1+\delta_1). \tag{5. 19}$$

Prema tome za γ_k možemo uzeti makoje γ_k koje zadovoljava nejednačinu

$$\left|\frac{\beta_k-\beta}{\gamma_k-\beta} - 1\right| < \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{\beta_k-\beta}{2\varepsilon_1}\right|.$$

Pomoću tako uzetog γ_k imamo

$$\lambda = \frac{\beta_k-\beta}{\gamma_k-\beta} - 1.$$

Ako je $f(\gamma_k) = f(\beta)$ treba mesto

$$|\lambda| < \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{\beta_k-\beta}{f(\gamma_k)-f(\beta)}\right|$$

uzeti

$$|\lambda| \in (0, \infty).$$

Iz gornjeg proizilazi

$$\left|\frac{f(\beta_k)-f(\beta)}{\beta_k-\beta} - \frac{f(\gamma_k)-f(\beta)}{\gamma_k-\gamma}\right| = \left|\frac{f(\beta_k)-f(\beta)-(1+\lambda)(f(\gamma_k)-f(\beta))}{\beta_k-\beta}\right| =$$

$$= \left|\frac{f(\beta_k)-f(\gamma_k)-\lambda(f(\gamma_k)-f(\beta))}{\beta_k-\beta}\right| \geqslant \left|\frac{f(\beta_k)-f(\gamma_k)}{\beta_k-\beta}\right| - \left|\lambda \cdot \frac{f(\gamma_k)-f(\beta)}{\beta_k-\beta}\right| >$$

$$> 1 - 1/2 > \theta.$$

Znači

$$(5.20)\qquad \left|\frac{f(\beta_k)-f(\beta)}{\beta_k-\beta}-\frac{f(\gamma_k)-f(\beta)}{\gamma_k-\beta}\right|>\theta,\ \text{za}\ \begin{matrix}\beta_k\in(\beta-\varphi,\ \beta+\varphi)\\ \gamma_k\in(\beta-\varphi,\ \beta+\varphi)\end{matrix}.$$

Kako je (5. 20) u suprotnosti sa (5. 17), znači da pretpostavka (5. 16) nije tačna a odatle proizilazi: Funkcija $f(x)$ ne može imati konačan izvod u tački β.

Na osnovu izloženog zaključujemo da je na početku navedena teorema zaista tačna.

Teorema (II): Ako je realna funkcija $f(x)$, $x\in(c_1,\ c_2)$, *svuda-gusto neprekidna i istovremeno svuda-gusto prekidna tada je u svakom intervalu* $(c_3,\ c_4)$, $((c_3,\ c_4)\subseteq(c_1,\ c_2))$, *potencija skupa svih tačaka u kojima je neprekidna-neizvodljiva jednaka moći kontinuuma.*

Dokaz 1. — Neka je $f(x)$, $x\in(c_1,\ c_2)$, realna funkcija koja je svuda-gusto neprekidna i istovremeno svuda-gusto prekidna na intervalu $(c_1,\ c_2)$. U vezi proizvoljno uzetog fiksiranog podintervala $(c_3,\ c_4)$, $((c_3,\ c_4)\subseteq(c_1,\ c_2))$, formiraćemo izvesne nizove brojeva i intervala na sledeći način:

Obzirom da je funkcija $f(x)$ svuda-gusto neprekidna postoje dva broja $a_1\in(c_3,\ (c_3+c_4)/2)$ i $a_2\in((c_3+c_4)/2,\ c_4)$, takva da je funkcija $f(x)$ neprekidna i u broju a_1 i u broju a_2. Uzmemo li dva proizvoljna broja $\varepsilon_1>0$ i $\varepsilon_2>0$, tada će brojevima a_1, a_2, ε_1, ε_2 odgovarati dva broja d_1 i d_2 takva da budu ispunjeni uslovi:

$$(a_1-d_1,\ a_1+d_1)\subset(c_3,\ (c_3+c_4)/2),$$
$$|f(x)-f(a_1)|<\varepsilon_1,\ \text{za}\ x\in(a_1-d_1,\ a_1+d_1),$$
$$(a_2-d_2,\ a_2+d_2)\subset((c_3+c_4)/2,\ c_4),$$
$$|f(x)-f(a_2)|<\varepsilon_2,\ \text{za}\ x\in(a_2-d_2,\ a_2+d_2).$$

Kako je funkcija $f(x)$ svuda-gusto prekidna postoje dva broja $b_1\in(a_1-d_1,\ a_1+d_1)$ i $b_2\in(a_2-d_2,\ a_2+d_2)$ takva da je funkcija $f(x)$ prekidna i u broju b_1 i u broju b_2. Brojevima b_1 i b_2 odgovaraju dva broja $h_1\in(0,\ 2\varepsilon_1)$ i $h_2\in(0,\ 2\varepsilon_2)$ takva da u svakoj okolini broja b_1 postoji bar jedan broj c_1, a u svakoj okolini broja b_2 bar jedan broj c_2 takva da budu ispunjeni uslovi:

$$|f(c_1)-f(b_1)|>h_1,\quad |f(c_2)-f(b_2)|>h_2.$$

Uzmimo sada fiksirani broj k_1 koji je elemenat skupa $\{1,\ 2\}$. Slično gornjem zaključujemo sada da postoje dva realna broja a_{k_11} i a_{k_12} koji zadovoljavaju uslove:

$$a_{k_11}\in(b_{k_1}-h_{k_1},\ b_{k_1})\cap(a_{k_1}-d_{k_1},\ a_{k_1}+d_{k_1}),$$
$$a_{k_12}\in(b_{k_1},\ b_{k_1}+h_{k_1})\cap(a_{k_1}-d_{k_1},\ a_{k_1}+d_{k_1}),$$

i uslov da je funkcija $f(x)$ neprekidna i u broju a_{k_11} i u broju a_{k_12}. Uzmemo li dva broja $\varepsilon_{k_11}>0$ i $\varepsilon_{k_12}>0$, koji zadovoljavaju uslove $\varepsilon_{k_11}\in(0,\ h_{k_1}/4)$,

$\varepsilon_{k_1 2} \in (0, h_{k_1}/4)$, tada će brojevima $a_{k_1 1}$, $a_{k_1 2}$, $\varepsilon_{k_1 1}$ i $\varepsilon_{k_1 2}$ odgovarati bar dva broja $d_{k_1 1}$ i $d_{k_1 2}$, koji imaju osobinu:

$$(a_{k_1 1} - d_{k_1 1},\ a_{k_1 1} + d_{k_1 1}) \subset (b_{k_1} - h_{k_1},\ b_{k_1}) \cap (a_{k_1} - d_{k_1},\ a_{k_1} + d_{k_1}),$$
$$(a_{k_1 2} - d_{k_1 2},\ a_{k_1 2} + d_{k_1 2}) \subset (b_{k_1},\ b_{k_1} + h_{k_1}) \cap (a_{k_1} - d_{k_1},\ a_{k_1} + d_{k_1}),$$
$$|f(x) - f(a_{k_1 1})| < \varepsilon_{k_1 1}, \text{ za } x \in (a_{k_1 1} - d_{k_1 1},\ a_{k_1 1} + d_{k_1 1}),$$
$$|f(x) - f(a_{k_1 2})| < \varepsilon_{k_1 2}, \text{ za } x \in (a_{k_1 2} - d_{k_1 2},\ a_{k_1 2} + d_{k_1 2}).$$

Obzirom da je funkcija $f(x)$ svuda-gusto prekidna postoje dva broja

$$b_{k_1 1} \in (a_{k_1 1} - d_{k_1 1},\ a_{k_1 1} + d_{k_1 1}),$$
$$b_{k_1 2} \in (a_{k_1 2} - d_{k_1 2},\ a_{k_1 2} + d_{k_1 2}),$$

sa osobinom da je funkcija $f(x)$ prekidna i u broju $b_{k_1 1}$ i u $b_{k_1 2}$. Brojevima $b_{k_1 1}$ i $b_{k_1 2}$ odgovaraju dva broja $h_{k_1 1} \in (0, 2 \cdot \varepsilon_{k_1 1})$ i $h_{k_1 2} \in (0, 2 \cdot \varepsilon_{k_1 2})$, takva da u svakoj okolini broja $b_{k_1 1}$ postoji bar jedan broj $c_{k_1 1}$ a u svakoj okolini broja $b_{k_1 2}$ bar jedan broj $c_{k_1 2}$ takva da zadovoljavaju uslove:

$$|f(c_{k_1 1}) - f(b_{k_1 1})| > h_{k_1 1}, \quad |f(c_{k_1 2}) - f(b_{k_1 2})| > h_{k_1 2}.$$

Pretpostavimo da smo nastavili prema gornjem načinu sa formiranjem odgovarajućih brojeva i da smo već dobili brojeve:

$$a_{k_1 k_2 \ldots k_m},\ \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m},\ d_{k_1 k_2 \ldots k_m},\ b_{k_1 k_2 \ldots k_m} \text{ i } h_{k_1 k_2 \ldots k_m},$$

gde su $k_1, k_2, \ldots, k_m$ i m fiksirani realni brojevi koji zadovoljavaju uslove:

$$k_1, k_2, \ldots, k_m \in \{1, 2\},\ m \in \text{prirodnih brojeva.}$$

Nastavljamo naš proces i konstatujemo da postoje dva realna broja $a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}$ i $a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}$ koji zadovoljavaju uslove:

$$a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} \in (b_{k_1 k_2 \ldots k_m} - h_{k_1 k_2 \ldots k_m},\ b_{k_1 k_2 \ldots k_m}) \cap$$
$$\cap (a_{k_1 k_2 \ldots k_m} - d_{k_1 k_2 \ldots k_m},\ a_{k_1 k_2 \ldots k_m} + d_{k_1 k_2 \ldots k_m}),$$
$$a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2} \in (b_{k_1 k_2 \ldots k_m},\ b_{k_1 k_2 \ldots k_m} + h_{k_1 k_2 \ldots k_m}) \cap$$
$$\cap (a_{k_1 k_2 \ldots k_m} - d_{k_1 k_2 \ldots k_m},\ a_{k_1 k_2 \ldots k_m} + d_{k_1 k_2 \ldots k_m}),$$

i uslov da je funkcija $f(x)$ neprekidna i u tački $a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}$ i u tački $a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}$. Uzmemo li dva broja $\varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}$ i $\varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}$, koji zadovoljavaju uslove

$$\varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} \in (0, h_{k_1 k_2 \ldots k_m}/4),\ \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m 2} \in (0, h_{k_1 k_2 \ldots k_m}/4),$$

tada će brojevima

$$a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1},\ a_{k_1 k_2 \ldots k_1 2},\ \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} \text{ i } \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}$$

odgovarati bar dva broja $d_{k_1k_2\ldots k_m1}$ i $d_{k_1k_2\ldots k_m2}$, koji imaju osobinu:

$$(a_{k_1k_2\ldots k_m1}-d_{k_1k_2\ldots k_m1},\ a_{k_1k_2\ldots k_m1}+d_{k_1k_2\ldots k_m1})\subset$$
$$\subset(b_{k_1k_2\ldots k_m}-h_{k_1k_2\ldots k_m},\ b_{k_1k_2\ldots k_m})\cap(a_{k_1k_2\ldots k_m}-$$
$$-d_{k_1k_2\ldots k_m},\ a_{k_1k_2\ldots k_m}+d_{k_1k_2\ldots k_m});$$
$$(a_{k_1k_2\ldots k_m2}-d_{k_1k_2\ldots k_m2},\ a_{k_1k_2\ldots k_m2}+d_{k_1k_2\ldots k_m2})\subset$$
$$\subset(b_{k_1k_2\ldots k_m},\ b_{k_1k_2\ldots k_m}+h_{k_1k_2\ldots k_m})\cap(a_{k_1k_2\ldots k_m}-$$
$$-d_{k_1k_2\ldots k_m},\ a_{k_1k_2\ldots k_m}+d_{k_1k_2\ldots k_m});$$
$$|f(x)-f(a_{k_1k_2\ldots k_m1})|<\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m1},$$
$$\text{za } x\in(a_{k_1k_2\ldots k_m1}-d_{k_1k_2\ldots k_m1},\ a_{k_1k_2\ldots k_m1}+d_{k_1k_2\ldots k_m1});$$
$$|f(x)-f(a_{k_1k_2\ldots k_m2})|<\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m2},$$
$$\text{za } x\in(a_{k_1k_2\ldots k_m2}-d_{k_1k_2\ldots k_m2},\ a_{k_1k_2\ldots k_m2}+d_{k_1k_2\ldots k_m2}).$$

Uzimajući zatim u obzir da je funkcija $f(x)$ svuda-gusto prekidna, postoje bar dva broja

$$b_{k_1k_2\ldots k_m1}\in(a_{k_1k_2\ldots k_m1}-d_{k_1k_2\ldots k_m1},\ a_{k_1k_2\ldots k_m1}+d_{k_1k_2\ldots k_m1}),$$
$$b_{k_1k_2\ldots k_m2}\in(a_{k_1k_2\ldots k_m2}-d_{k_1k_2\ldots k_m2},\ a_{k_1k_2\ldots k_m2}+d_{k_1k_2\ldots k_m2}),$$

sa osobinom da je funkcija $f(x)$ prekidna i u tački $b_{k_1k_2\ldots k_m1}$ i u tački $b_{k_1k_2\ldots k_m2}$. Brojevima $b_{k_1k_2\ldots k_m1}$ i $b_{k_1k_2\ldots k_m2}$ odgovaraju dva broja

$$h_{k_1k_2\ldots k_m1}\in(0,\ 2\cdot\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m1}) \text{ i } h_{k_1k_2\ldots k_m2}\in(0,\ 2\cdot\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m2}),$$

takva da u svakoj okolini broja $b_{k_1k_2\ldots k_m1}$ postoji bar jedan broj $c_{k_1k_2\ldots k_m1}$ a u svakoj okolini broja $b_{k_1k_2\ldots k_m2}$ bar jedan broj $c_{k_1k_2\ldots k_m2}$ takva da zadovoljavaju uslove:

$$|f(c_{k_1k_2\ldots k_m1})-f(b_{k_1k_2\ldots k_m1})|>h_{k_1k_2\ldots k_m1},$$
$$|f(c_{k_1k_2\ldots k_m2})-f(b_{k_1k_2\ldots k_m2})|>h_{k_1k_2\ldots k_m2}.$$

Pođimo sada od pretpostavke da je ovaj proces već izvršen prebrojivo beskonačno-mnogo puta na taj način što je m prošlo skupom prirodnih brojeva.

Uočimo sada makoji fiksirani beskonačni niz

$$(5.21) \qquad \{k_n\}$$

čiji su članovi kao što smo već i rekli elementi skupa $\{1, 2\}$. Nizova (5. 21) imamo $2^{\aleph_0}$, to jest njihova potencija je jednaka moći kontinuuma. Fiksiranom nizu (5. 21) odgovara jedan niz intervala

$$(5.22)\quad \{s_n\} \equiv \left\{ (a_{k_1 k_2 \dots k_n} - d_{k_1 k_2 \dots k_n},\ a_{k_1 k_2 \dots k_n} + d_{k_1 k_2 \dots k_n}) \right\},$$

čiji su članovi intervali

$$(5.23)\quad s_n \equiv (a_{k_1 k_2 \dots k_n} - d_{k_1 k_2 \dots k_n},\ a_{k_1 k_2 \dots k_n} + d_{k_1 k_2 \dots k_n});$$

odnosno niz

$$(5.24)\quad \{u_n\} \equiv \left\{ (b_{k_1 k_2 \dots k_n} - h_{k_1 k_2 \dots k_n},\ b_{k_1 k_2 \dots k_n} + h_{k_1 k_2 \dots k_n}) \right\}$$

čiji su članovi intervali

$$(5.25)\quad u_n \equiv (b_{k_1 k_2 \dots k_n} - h_{k_1 k_2 \dots k_n},\ b_{k_1 k_2 \dots k_n} + h_{k_1 k_2 \dots k_n}).$$

Ovi intervali imaju osobinu:

$$s_1 \supset s_2 \supset s_3 \supset \dots s_n \supset s_{n+1} \supset \dots,$$

$$u_1 \supset u_2 \supset u_3 \supset \dots \supset u_n \supset n_{n+1} \supset \dots;$$

$$(5.26)\quad u_n \supset s_{n+1}.$$

Fiksiranom nizu (5.21) odgovaraju i nizovi

$$(5.27)\quad \{a_{k_1 k_2 \dots k_n}\},\quad \{b_{k_1 k_2 \dots k_n}\};$$

$$(5.28)\quad \{\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}\},\quad \{d_{k_1 k_2 \dots k_n}\},\quad \{h_{k_1 k_2 \dots k_n}\}.$$

Kad $n \to \infty$, tada nizovi pod (5. 28) teže ka nuli, jer

$$0 < \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \leqslant (1/2^{n-1}) \cdot \varepsilon_1 \to 0,$$

$$0 < h_{k_1 k_2 \dots k_n} < 2 \cdot \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \to 0,$$

$$0 < d_{k_1 k_2 \dots k_n} < (1/2) \cdot h_{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} \to 0,$$

a iz toga proizilazi da je

$$\lim_{n \to \infty} (m(s_n)) = \lim_{n \to \infty} (m(a_{k_1 k_2 \dots k_n} - d_{k_1 k_2 \dots k_n},\ a_{k_1 k_2 \dots k_n} + d_{k_1 k_2 \dots k_n})) = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} (m(u_n)) = \lim_{n \to \infty} (m(b_{k_1 k_2 \dots k_n} - h_{k_1 k_2 \dots k_n},\ b_{k_1 k_2 \dots k_n} + h_{k_1 k_2 \dots k_n})) = 0,$$

pri čemu smo sa $m(s_n)$ i sa $m(u_n)$ označili meru intervala (5. 23) i intervala (5. 25).

Iz gornjeg proizilazi da fiksiranom nizu (5. 21) odgovara jedan i samo jedan realan broj, kojeg ćemo označiti sa $r(\{k_n\})$, a koji pripada svima članovima niza (5. 22) a i svima članovima niza (5. 24), on je istovremeno granična vrednost nizova iz (5.27) kad n teži beskonačnosti.

Iz izlaganja pri dokazivanju teoreme (I) proizilazi da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $r(\{k_n\})$ i da u toj tački nema konačan izvod.

Za dva razna fiksirana niza $\{k_n\}_1$ i $\{k_n\}_2$ odgovaraju uvek dva razna realna broja, to jest $r(\{k_n\}_1) \neq r(\{k_n\}_2)$. Ovo proizilazi otuda što je:

$$(a_{k_1 k_2} \ldots {}_{k_{m1}} - d_{k_1 k_2} \ldots {}_{k_{m1}},\ a_{k_1 k_2} \ldots {}_{k_{m1}} + d_{k_1 k_2} \ldots {}_{k_{m1}}) \cap (a_{k_1 k_2} \ldots {}_{k_{m2}} -$$

$$- d_{k_1 k_2} \ldots {}_{k_{m2}},\ a_{k_1 k_2} \ldots {}_{k_{m2}} + d_{k_1 k_2} \ldots {}_{k_{m2}}) = V, \text{ (V označava prazan skup).}$$

Kako raznih fiksiranih nizova $\{k_n\}$ može biti kontinuum-mnogo, proizilazi da i realnih brojeva $r(\{k_n\})$ imamo kontinuum-mnogo i to u proizvoljno uočenom razmaku (c_3, c_4), pri čemu je $(c_3, c_4) \subseteq (c_1, c_2)$.

Iz izloženog proizilazi da je zaista tačna teorema (II).

Na osnovu teorema (I) i (II) izveli bi sledeću teoremu koja ih objedinjuje:

Teorema (III): Ako je realna funkcija $f(x)$, $x \in (a, b)$, svuda-gusto prekidna i istovremeno svuda-gusto neprekidna, tada u svakom podintervalu intervala (a, b) postoji skup tačaka D u kojima je funkcija $f(x)$ neprekidna ali nije diferencijabilna. Kardinalni broj skupa D jednak je moći kontinuuma ali njegova mera može biti jednaka nuli.

Teoremu (I) mogli bi smatrati i kao posledicu teoreme (II).

Napomena. Teorema (I) sa odgovarajućim dokazom koji je na početku ovog paragrafa izložen, publikovana je, u vrlo malo izmenjenom obliku u radu [15].

Napomena (II). U vezi rezultata dobivenih u ovom paragrafu nameće se kao pitanje sledeći problem:

Problem (I): Ako je realna funkcija $f(x)$, $x \in (a, b)$, svuda-gusto prekidna i istovremeno svuda-gusto neprekidna, da li postoji svuda-gusto raspoređeni skup brojeva D u kojima je funkcija $f(x)$ neprekidna ali u njima nema ni konačan ni beskonačan izvod? Ako je odgovor na ovo pitanje potvrdan nameće se problem (II): Naći potenciju skupa D?

§ 6. O jednosmernoj izvodljivosti svuda-gusto prekidnih funkcija jedne realne promenljive

U (§ 5.) date su i dokazane nekoliko teorema o diferencijabilnosti svuda-gusto prekidnih funkcija jedne realne promenljive. U vezi sa tamo dobivenim rezultatima nameće se kao problem ispitati skup tačaka u kojima je funkcija neprekidna ali u njima nema ne samo izvod nego nema ni nijedan jednostrani izvod. Ispitivanja u tom pravcu dovela su nas do izvesnih rezultata koje možemo iskazati sledećom teoremom:

Teorema: Ako je $f(x)$, $x \in (c_1, c_2)$, realna funkcija koja je svuda-gusto prekidna i istovremeno svuda-gusto neprekidna, tada u svakom intervalu (c_3, c_4), $((c_3, c_4) \subseteq (c_1, c_2))$, postoji kontinuum-mnogo tačaka u kojima je funkcija $f(x)$ neprekidna ali ni u jednoj od njih nema ni levog ni desnog izvoda.

Dokaz. — Pođimo od realne funkcije $f(x)$, $x \in (c_1, c_2)$, koja je svuda-gusto prekidna i istovremeno svuda-gusto neprekidna. U proizvoljnom fiksiranom intervalu (c_3, c_4), $((c_3, c_4) \subseteq (c_1, c_2))$, uzećemo izvesne brojeve i intervale na sledeći način:

Uzmimo prvo dva broja a_1 i a_2 u kojima je funkcija $f(x)$ neprekidna i koji pored toga zadovoljavaju uslove:

$$a_1 < a_2, \quad a_1 \in (c_3, (c_3+c_4)/2), \quad a_2 \in (c_3, (c_3+c_4)/2).$$

Uzmimo sada dva proizvoljna fiksirana broja $\varepsilon_1 > 0$ i $\varepsilon_2 > 0$ a zatim u vezi brojeva a_1, a_2, ε_1 i ε_2 uzmimo dva fiksirana realna broja $d_1 > 0$ i $d_2 > 0$ tako da budu ispunjeni uslovi:

1° $(a_1-d_1,\ a_1+d_1) \cap (a_2-d_2,\ a_2+d_2) = V$, ($V$ označava prazan skup),

2° $(a_1-d_1,\ a_1+d_1) \subset (c_3,\ (c_3+c_4)/2)$,

3° $(a_2-d_2,\ a_2+d_2) \subset (c_3,\ (c_3+c_4)/2)$,

4° $|f(x)-f(a_1)| < \varepsilon_1$, za $x \in (a_1-d_1,\ a_1+d_1)$,

5° $|f(x)-f(a_2)| < \varepsilon_2$, za $x \in (a_2-d_2,\ a_2+d_2)$.

Uočimo sada dva broja $b_1 \in (a_1-d_1,\ a_1+d_1)$ i $b_2 \in (a_2-d_2,\ a_2+d_2)$ u kojima je prekidna funkcija $f(x)$. U zavisnosti od brojeva b_1 i b_2 uočimo dva fiksirana broja $h_1 \in (0,\ 2\varepsilon_1)$ i $h_2 \in (0,\ 2\varepsilon_2)$ sa osobinom da u svakoj okolini broja b_1 postoji bar jedan broj c_1, a u svakoj okolini broja b_2 bar jedan broj c_2, tako da budu zadovoljeni uslovi

$$|f(c_1)-f(b_1)| > h_1, \quad |f(c_2)-f(b_2)| > h_2.$$

Uzmimo sada m fiksiranih brojeva

$$k_1 \in \{1,\ 2\},\ k_2 \in \{1,\ 2\},\ k_3 \in \{1,\ 2\},\ \ldots,\ k_{m-1} \in \{1,\ 2\},\ k_m \in \{1,\ 2\}$$

i njima odgovarajuće brojeve

$$(6.1)\qquad \begin{aligned} &a_{k_1k_2\ldots k_m},\ \varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m},\ d_{k_1k_2\ldots k_m},\\ &b_{k_1k_2\ldots k_m}\ \text{i}\ h_{k_1k_2\ldots k_m}. \end{aligned}$$

U zavisnosti od brojeva (6. 1) obrazovaćemo brojeve

$$(6.2)\qquad \begin{aligned} &a_{k_1k_2\ldots k_m1},\ \varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m1},\ d_{k_1k_2\ldots k_m1},\\ &b_{k_1k_2\ldots k_m1}\ \text{i}\ h_{k_1k_2\ldots k_m1};\\ &a_{k_1k_2\ldots k_m2},\ \varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m2},\ d_{k_1k_2\ldots k_m2},\\ &b_{k_1k_2\ldots k_m2}\ \text{i}\ h_{k_1k_2\ldots k_m2}; \end{aligned}$$

na sledeći način:

1) Neka je $m+1$ neparan broj. Polazimo od brojeva (6. 1) i uočavamo dva broja $a_{k_1k_2\ldots k_m1}$ i $a_{k_1k_2\ldots k_m2}$ u kojima je funkcija $f(x)$ neprekidna i koji pored toga zadovoljavaju uslove:

$$a_{k_1k_2\ldots k_m1} < a_{k_1k_2\ldots k_m2};$$

$$\begin{aligned} a_{k_1k_2\ldots k_m1} \in (b_{k_1k_2\ldots k_m} - h_{k_1k_2\ldots k_m},\ b_{k_1k_2\ldots k_m}) \cap \\ \cap (a_{k_1k_2\ldots k_m} - d_{k_1k_2\ldots k_m},\ a_{k_1k_2\ldots k_m} + d_{k_1k_2\ldots k_m}); \end{aligned}$$

$$a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} \in (b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m} - h_{k_1k_2\,\ldots\,k_m},\ b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m}) \cap$$
$$\cap\,(a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m} - d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m}).$$

Uzmimo sada dva fiksirana broja $\varepsilon_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} \in (0,\ h_{k_1k_2\,\ldots\,k_m}/4)$ i $\varepsilon_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} \in (0,\ h_{k_1k_2\,\ldots\,k_m}/4)$ a zatim u vezi brojeva

$$a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2},\ \varepsilon_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} \text{ i } \varepsilon_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2}$$

uzmimo dva fiksirana realna broja $d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} > 0$ i $d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} > 0$, tako da budu ispunjeni uslovi:

1° $(a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} - d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1}) \cap$
$\cap\,(a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} - d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2}) = V$;

2° $(a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} - d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1}) \subset$
$\subset (b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m} - h_{k_1k_2\,\ldots\,k_m},\ b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m}) \cap (a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m} -$
$- d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m})$;

3° $(a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} - d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2}) \subset$
$\subset (b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m} - h_{k_1k_2\,\ldots\,k_m};\ b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m}) \cap (a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m} -$
$- d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m})$;

4° $|f(x) - f(a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1})| < \varepsilon_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1}$,
za $x \in (a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} - d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1})$;

5° $|f(x) - f(a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2})| < \varepsilon_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2}$,
za $\in (a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} - d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2})$.

Obzirom da je funkcija $f(x)$ svuda-gusto prekidna, možemo uzeti dva broja

$$b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} \in (a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} - d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1})$$
$$\text{i}\ \ b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} \in (a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} - d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2},\ a_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} + d_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2})$$

sa osobinom da je funkcija $f(x)$ prekidna i u tački $b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1}$ i u tački $b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2}$. Brojevima $b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1}$ i $b_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2}$ odgovaraju dva broja

$$h_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1} \in (0, 2\,\varepsilon_{k_1k_2\,\ldots\,k_m1}) \text{ i } h_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2} \in (0, 2\,\varepsilon_{k_1k_2\,\ldots\,k_m2}),$$

sa osobinom da se u svakoj okolini broja $b_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}$ nalazi bar jedan broj $c_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}$ a u svakoj okolini broja $b_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}$ bar jedan broj $c_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}$ koji zadovoljava uslove:

$$|f(c_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}) - f(b_{k_1 k_2 \ldots k_m 1})| > h_{k_1 k_2 \ldots k_m 1},$$

$$|f(c_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}) - f(b_{k_1 k_2 \ldots k_m 2})| > h_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}.$$

2) *Neka je $m+1$ paran broj.* Opet polazimo od brojeva (6. 1) i uočavamo dva broja $a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}$ i $a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}$ u kojima je funkcija $f(x)$ neprekidna i koji pored toga zadovoljavaju uslove:

1° $\quad a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} < a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}$;

2° $\quad a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} \in (b_{k_1 k_2 \ldots k_m}, b_{k_1 k_2 \ldots k_m} + h_{k_1 k_2 \ldots k_m}) \cap$
$\cap (a_{k_1 k_2 \ldots k_m} - d_{k_1 k_2 \ldots k_m}, a_{k_1 k_2 \ldots k_m} + d_{k_1 k_2 \ldots k_m})$;

3° $\quad a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2} \in (b_{k_1 k_2 \ldots k_m}, b_{k_1 k_2 \ldots k_m} + h_{k_1 k_2 \ldots k_m}) \cap$
$\cap (a_{k_1 k_2 \ldots k_m} - d_{k_1 k_2 \ldots k_m}, a_{k_1 k_2 \ldots k_m} + d_{k_1 k_2 \ldots k_m})$.

Uočimo sada prvo dva fiksirana broja

$$\varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} \in (0, h_{k_1 k_2 \ldots k_m}/4) \text{ i } \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m 2} \in (0, h_{k_1 k_2 \ldots k_m}/4)$$

a zatim u vezi brojeva

$$a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}, a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}, \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} \text{ i } \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}$$

uzmimo dva fiksirana broja $d_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} > 0$ i $d_{k_1 k_2 \ldots k_m 2} > 0$, tako da budu ispunjeni uslovi:

1° $\quad (a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} - d_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}, a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} + d_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}) \cap$
$\cap (a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2} - d_{k_1 k_2 \ldots k_m 2} + a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2} + d_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}) = V$;

2° $\quad (a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} - d_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}, a_{k_1 k_2 \ldots k_m 1} + d_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}) \subset$
$\subset (b_{k_1 k_2 \ldots k_m}, b_{k_1 k_2 \ldots k_m} + h_{k_1 k_2 \ldots k_m}) \cap (a_{k_1 k_2 \ldots k_m} -$
$- d_{k_1 k_2 \ldots k_m}, a_{k_1 k_2 \ldots k_m} + d_{k_1 k_2 \ldots k_m})$;

3° $\quad (a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2} - d_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}, a_{k_1 k_2 \ldots k_m 2} + d_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}) \subset$
$\subset (b_{k_1 k_2 \ldots k_m}, b_{k_1 k_2 \ldots k_m} + h_{k_1 k_2 \ldots k_m}) \cap (a_{k_1 k_2 \ldots k_m} -$
$- d_{k_1 k_2 \ldots k_m}, a_{k_1 k_2 \ldots k_m} + d_{k_1 k_2 \ldots k_m})$;

4° $|f(x)-f(a_{k_1k_2\ldots k_m1})|<\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m1},$

za $x\in(a_{k_1k_2\ldots k_m1}-d_{k_1k_2\ldots k_m1},\ a_{k_1k_2\ldots k_m1}+d_{k_1k_2\ldots k_m1});$

5° $|f(x)-f(a_{k_1k_2\ldots k_m2})|<\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m2},$

za $x\in(a_{k_1k_2\ldots k_m2}-d_{k_1k_2\ldots k_m2},\ a_{k_1k_2\ldots k_m2}+d_{k_1k_2\ldots k_m2}).$

Obzirom da je funkcija $f(x)$ svuda-gusto prekidna, možemo uzeti dva broja

$$b_{k_1k_2\ldots k_m1}\in(a_{k_1k_2\ldots k_m1}-d_{k_1k_2\ldots k_m1}, a_{k_1k_2\ldots k_m1}+d_{k_1k_2\ldots k_m1})$$

i $b_{k_1k_2\ldots k_m2}\in(a_{k_1k_2\ldots k_m2}-d_{k_1k_2\ldots k_m2}, a_{k_1k_2\ldots k_m2}+d_{k_1k_2\ldots k_m2})$ sa osobinom da je funkcija $f(x)$ prekidna i u tački $b_{k_1k_2\ldots k_m1}$ i u tački $b_{k_1k_2\ldots k_m2}$. Brojevima $b_{k_1k_2\ldots k_m1}$ i $b_{k_1k_2\ldots k_m2}$ odgovaraju dva broja

$$h_{k_1k_2\ldots k_m1}\in(0, 2\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m1}) \text{ i } h_{k_1k_2\ldots k_m2}\in(0, 2\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_m2})$$

sa osobinom da se u svakoj okolini broja $b_{k_1k_2\ldots k_m1}$ nalazi bar jedan broj $c_{k_1k_2\ldots k_m1}$ a u svakoj okolini broja $b_{k_1k_2\ldots k_m2}$ bar jedan broj $c_{k_1k_2\ldots k_m2}$ koji zadovoljava uslove:

1° $|f(c_{k_1k_2\ldots k_m1})-f(b_{k_1k_2\ldots k_m1})|>h_{k_1k_2\ldots k_m1};$

2° $|f(c_{k_1k_2\ldots k_m2})-f(b_{k_1k_2\ldots k_m2})|>h_{k_1k_2\ldots k_m2}.$

Uzmimo sada fiksirani broj $k_1\in\{1,2\}$ i njemu odgovarajuće brojeve

$$a_{k_1},\quad \varepsilon_{k_1},\quad d_{k_1},\quad b_{k_1} \text{ i } h_{k_1}, \tag{6. 3}$$

koje smo na početku formirali. U zavisnosti od brojeva (6. 3) obrazovaćemo brojeve

$$\begin{matrix} a_{k_11}, & \varepsilon_{k_11}, & d_{k_11}, & b_{k_11}, & h_{k_11}; \\ a_{k_12}, & \varepsilon_{k_12}, & d_{k_12}, & b_{k_12}, & h_{k_12}, \end{matrix} \tag{6. 4}$$

prema principu prelaza od brojeva (6. 1) na brojeve (6. 2), koji smo malo pre izneli.

Uzmimo sada dva fiksirana broja $k_1\in\{1, 2\}$ i $k_2\in\{1, 2\}$ i njima odgovarajuće brojeve

$$a_{k_1k_2},\quad \varepsilon_{k_1k_2},\quad d_{k_1k_2},\quad b_{k_1k_2}, \text{ i } h_{k_1k_2}. \tag{6. 5}$$

U zavisnosti od brojeva (6. 5) obrazovaćemo brojeve

$$\begin{matrix} a_{k_1k_21}. & \varepsilon_{k_1k_21}, & d_{k_1k_21}, & b_{k_1k_21}, & \text{i } h_{k_1k_21}; \\ a_{k_1k_22}, & \varepsilon_{k_1k_22}, & d_{k_1k_22}, & b_{k_1k_22}, & \text{i } h_{k_1k_22}; \end{matrix} \tag{6. 6}$$

opet prema principu prelaza od brojeva (6. 1) na brojeve (6. 2).

Izvršimo ovo započeto formiranje brojeva prebrojivo-beskonačno-mnogo puta držeći se pri tome stalno principa prelaza od (6. 1) na brojeve (6. 2).

Uočimo sada makoji fiksirani beskonačni niz

$$\{k_n\} \tag{6. 7}$$

čiji svaki član k_n zadovoljava uslov $k_n \in \{1, 2\}$. Fiksiranom nizu (6. 7) odgovaraju nizovi brojeva

$$\{\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}\}, \quad \{d_{k_1 k_2 \dots k_n}\}, \quad \{h_{k_1 k_2 \dots k_n}\};$$

i nizovi intervala

$$\{(a_{k_1 k_2 \dots k_n} - d_{k_1 k_2 \dots k_n},\ a_{k_1 k_2 \dots k_n} + d_{k_1 k_2 \dots k_n})\}, \tag{6. 8}$$

$$\{(b_{k_1 k_2 \dots k_n} - h_{k_1 k_2 \dots k_n},\ a_{k_1 k_2 \dots k_n} + d_{k_1 k_2 \dots k_n})\}. \tag{6. 9}$$

Iz $0 < h_{k_1 k_2 \dots k_m} < 2\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m}$ i $0 < \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}} < (1/4)\, h_{k_1 k_2 \dots k_m}$ proizilazi da je

$$\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m} < 2\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}}$$

a odatle sledi

$$\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m} \leqslant (1/2^{m-1})\, \varepsilon_1.$$

Prema tome je

$$\lim_{m \to \infty} \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m} = 0. \tag{6. 10}$$

Iz $0 < h_{k_1 k_2 \dots k_m} < 2\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_m}$ i (6. 10) proizilazi da je i

$$\lim_{m \to \infty} (h_{k_1 k_2 \dots k_m}) = 0. \tag{6. 11}$$

Iz

$$(a_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}} - d_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}},\ a_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}} + d_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}}) \subset$$
$$\subset (b_{k_1 k_2 \dots k_m} - h_{k_1 k_2 \dots k_m},\ a_{k_1 k_2 \dots k_m} + h_{k_1 k_2 \dots k_m}),$$

i iz (6. 11) sleduje da je i

$$\lim_{m \to \infty} (d_{k_1 k_2 \dots k_m}) = 0. \tag{6. 12}$$

Iz (6. 11) i (6. 12) proizilazi da je

$$\begin{aligned} &\lim_{m \to \infty} (\text{dužina } (a_{k_1 k_2 \dots k_m} - d_{k_1 k_2 \dots k_m},\ a_{k_1 k_2 \dots k_m} + d_{k_1 k_2 \dots k_m})) = 0, \\ &\lim_{m \to \infty} (\text{dužina } (b_{k_1 k_2 \dots k_m} - h_{k_1 k_2 \dots k_m},\ b_{k_1 k_2 \dots k_m} + h_{k_1 k_2 \dots k_m})) = 0. \end{aligned} \tag{6. 13}$$

Na osnovu (6. 12) i (6. 13), a uzimajući u obzir da je

$$(a_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}} - d_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}},\ a_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}} + d_{k_1 k_2 \dots k_{m+1}}) \subset$$
$$\subset (b_{k_1 k_2 \dots k_m} - h_{k_1 k_2 \dots k_m},\ b_{k_1 k_2 \dots k_m} + h_{k_1 k_2 \dots k_m}),$$

$$(a_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}}-d_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}},\ a_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}}+d_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}})\subset$$
$$\subset(a_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}-d_{k_1k_2\,\cdots\,k_m},\ a_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}+d_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}),$$

proizilazi da postoji jedan i samo jedan broj koji pripada svima članovima (intervalima) niza (6. 8) i da taj i samo taj broj pripada i svima članovima (intervalima) niza (6. 9). Ako taj broj označimo sa $q(\{k_n\})$, ili za sada radi kratkoće samo sa q, proizilazi da je

$$\lim_{m\to\infty}(a_{k_1k_2\,\cdots\,k_m})=q \ \text{ i } \lim_{m\to\infty}(b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m})=q. \tag{6. 14}$$

Obzirom da je za $m+1$ paran broj

$$(a_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}}-d_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}},\ a_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}}+d_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}})\subset$$
$$\subset(b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m},\ b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}+h_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}),$$

proizilazi da je za slučaj kada je m neparan broj:

$$b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}<q. \tag{6. 15}$$

Kada je $m+1$ neparan broj imali smo da je

$$(a_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}}-d_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}},\ a_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}}+d_{k_1k_2\,\cdots\,k_{m+1}})\subset$$
$$\subset(b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}-h_{k_1k_2\,\cdots\,k_m},\ b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}),$$

pa je prema tome za slučaj kada je m paran broj:

$$b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}>q. \tag{6. 16}$$

Iz (6. 15) i (6. 16) proizilazi da je uvek

$$b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}\neq q. \tag{6. 17}$$

Pokažimo sada da funkcija $f(x)$ ne može imati nijedan jednostrani izvod u tački q.

Kada bi funkcija $f(x)$ imala levi izvod u tački q tada bi postojao bar jedan broj $p>0$ takav da bude zadovoljena nejednačina

$$\left|\frac{f(x_1)-f(q)}{x_1-q}-\frac{f(x_2)-f(q)}{x_2-q}\right|<1/2, \tag{6. 18}$$

za svako $x_1\in(q-p,\ q)$ i $x_2\in(q-p,\ q)$.

No pokazaćemo da pretpostavka (6. 18) ne može biti ispunjena. U tom cilju uzmimo jedno $b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}\in(q-p,\ q)$, gde je m neparan broj, a to prema (6. 15) i (6. 14) možemo, i jedno njemu odgovarajuće $c_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}\in(q-p,\ q)$, pa ćemo u vezi njih dobiti da je

$$\left|\frac{f(b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m})-f(q)}{b_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}-q}-\frac{f(c_{k_1k_2\,\cdots\,k_m})-f(q)}{c_{k_1k_2\,\cdots\,k_m}-q}\right|=$$

$$= \left| \frac{f(b_{k_1k_2 \ldots k_m}) - f(c_{k_1k_2 \ldots k_m}) - \left(\dfrac{b_{k_1k_2 \ldots k_m} - q}{c_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} - 1 \right) (f(c_{k_1k_2 \ldots k_m}) - f(q))}{b_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \frac{f(b_{k_1 \ldots k_m}) - f(c_{k_1 \ldots k_m})}{b_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} \right| - \left| \left(\frac{b_{k_1 \ldots k_m} - q}{c_{k_1 \ldots k_m} - q} - 1 \right) \frac{f(c_{k_1 \ldots k_m}) - f(q)}{b_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} \right| >$$

$$> \left| \frac{f(b_{k_1 \ldots k_m}) - f(c_{k_1 \ldots k_m})}{b_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} \right| - \left| \left(\frac{b_{k_1 \ldots k_m} - q}{c_{k_1 \ldots k_m} - q} - 1 \right) \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon_{k_1 \ldots k_m}}{b_{k_1 \ldots k_m} - q} \right| .$$

No iz $|f(b_{k_1k_2 \ldots k_m}) - f(c_{k_1k_2 \ldots k_m})| > h_{k_1k_2 \ldots k_m} > |b_{k_1 \ldots k_m} - q|$ proizilazi da je

$$\left| \frac{f(b_{k_1k_2 \ldots k_m}) - f(c_{k_1k_2 \ldots k_m})}{b_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} \right| > 1. \tag{6. 19}$$

S druge strane je

$$\lim_{c_{k_1k_2 \ldots k_m} \to b_{k_1k_2 \ldots k_m}} \left(\left(\frac{b_{k_1k_2 \ldots k_m} - q}{c_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} - 1 \right) \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon_{k_1k_2 \ldots k_m}}{b_{k_1 \ldots k_m} - q} \right) = 0, \tag{6. 20}$$

a odatle sledi da postoji jedan broj $t > 0$ koji zadovoljava uslov da je

$$\left| \left(\frac{b_{k_1k_2 \ldots k_m} - q}{c_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} - 1 \right) \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon_{k_1k_2 \ldots k_m}}{b_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} \right| < 1/2, \tag{6. 21}$$

za svako $c_{k_1k_2 \ldots k_m} \in (b_{k_1k_2 \ldots k_m} - t,\ b_{k_1k_2 \ldots k_m} + t)$.

Iz (6. 19), (6. 20) i (6. 21) proizilazi da je

$$\left| \frac{f(b_{k_1k_2 \ldots k_m}) - f(q)}{b_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} - \frac{f(c_{k_1k_2 \ldots k_m}) - f(q)}{c_{k_1k_2 \ldots k_m} - q} \right| > 1/2, \tag{6. 22}$$

za svako fiksirano $b_{k_1k_2 \ldots k_m} \in (q-p,\ q)$, i za svako njemu odgovarajuće

$$c_{k_1k_2 \ldots k_m} \in (b_{k_1k_2 \ldots k_m} - t,\ b_{k_1k_2 \ldots k_m} + t) \cap (q-p,\ q).$$

Kako je (6. 22) u suprotnosti sa (6. 18) proizilazi da funkcija $f(x)$ zaista nema konačni levi izvod u tački $q(\{k_n\})$.

Sada ćemo pokazati da funkcija $f(x)$ u tački $q(\{k_n\})$ ne može imati ni desni izvod. Ako pretpostavimo da funkcija $f(x)$ ima desni izvod u tački q, tada bi morao postojati jedan broj $p_1 > 0$ koji dozvoljava da bude zadovoljena nejednačina

$$\left|\frac{f(x_1)-f(q)}{x_1-q}-\frac{f(x_2)-f(q)}{x_2-q}\right|<1/2, \tag{6. 23}$$

za svako $x_1 \in (q,\ q+p_1)$ i $x_2 \in (q,\ q+p_1)$.

Pokazaćemo da pretpostavka (6. 23) ne može biti ispunjena, a to je dovoljno da se izvede zaključak da funkcija $f(x)$ ne može imati desni izvod u tački q. Uzmimo u tom cilju jedno $b_{k_1k_2 \cdots k_j} \in (q,\ q+p_1)$, u tom slučaju j je paran broj, a to prema (6. 14) i (6. 16) možemo, i jedno njemu odgovarajuće $c_{k_1k_2 \cdots k_j} \in (q,\ q+p_1)$, pa ćemo u vezi njih dobiti da je

$$\left|\frac{f(b_{k_1k_2 \cdots k_j})-f(q)}{b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}-\frac{f(c_{k_1k_2 \cdots k_j})-f(q)}{c_{k_jk_2 \cdots k_j}-q}\right|=$$

$$=\left|\frac{f(b_{k_1 \cdots k_j})-f(q)-\left(\dfrac{b_{k_1 \cdots k_j}-q}{c_{k_1 \cdots k_j}-q}-1+1\right)\left(f(c_{k_1 \cdots k_j})-f(q)\right)}{b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}\right|=$$

$$=\left|\frac{f(b_{k_1 \cdots k_j})-f(c_{k_1 \cdots k_j})-\left(\dfrac{b_{k_1 \cdots k_j}-q}{c_{k_1 \cdots k_j}-q}-1\right)\left(f(c_{k_1 \cdots k_j})-f(q)\right)}{b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left|\frac{f(b_{k_1 \cdots k_j})-f(c_{k_1 \cdots k_j})}{b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}\right|-\left|\left(\frac{b_{k_1 \cdots k_j}-q}{c_{k_1 \cdots k_j}-q}-1\right)\cdot\frac{f(c_{k_1 \cdots k_j})-f(q)}{b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}\right|>$$

$$>\left|\frac{f(b_{k_1k_2 \cdots k_j})-f(c_{k_1 \cdots k_j})}{b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}\right|-\left|\left(\frac{b_{k_1 \cdots k_j}-q}{c_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}-1\right)\cdot\frac{2\cdot\varepsilon_{k_1k_2 \cdots k_j}}{b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}\right|.$$

Ali iz

$$|f(b_{k_1k_2 \cdots k_j})-f(c_{k_1k_2 \cdots k_j})|>h_{k_1k_2 \cdots k_j}>|b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q|$$

proizilazi da je

$$\left|\frac{f(b_{k_1k_2 \cdots k_j})-f(c_{k_1k_2 \cdots k_j})}{b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}\right|>1. \tag{6. 24}$$

Sem toga je

$$\lim_{c_{k_1k_2 \cdots k_j}\to b_{k_1k_2 \cdots k_j}}\left(\frac{b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}{c_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}-1\right)\cdot\frac{2\cdot\varepsilon_{k_1k_2 \cdots k_j}}{b_{k_1k_2 \cdots k_j}-q}=0, \tag{6. 25}$$

pa prema tome mora postojati bar jedan broj $t_1 > 0$ koji zadovoljava uslov da je

$$(6.26)\qquad \left| \left(\frac{b_{k_1 k_2 \ldots k_j} - q}{c_{k_1 k_2 \ldots k_j} - q} - 1 \right) \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_j}}{b_{k_1 k_2 \ldots k_j} - q} \right| < 1/2,$$

za svako $c_{k_1 k_2 \ldots k_j} \in (b_{k_1 k_2 \ldots k_j} - t_1, \; b_{k_1 k_2 \ldots k_j} + t_1)$.

Na osnovu (6. 24), 6. 25) i (6. 26) tvrdimo da je

$$(6.27)\qquad \left| \frac{f(b_{k_1 k_2 \ldots k_j}) - f(q)}{b_{k_1 k_2 \ldots k_j} - q} - \frac{f(c_{k_1 k_2 \ldots k_j}) - f(q)}{c_{k_1 k_2 \ldots k_j} - q} \right| > 1/2,$$

za svako fiksirano $b_{k_1 k_2 \ldots k_j} \in (q, \; q + p_1)$, i za svako njemu odgovarajuće $c_{k_1 k_2 \ldots k_j} \in (b_{k_1 k_2 \ldots k_j} - t_1, \; b_{k_1 k_2 \ldots k_j} + t_1) \cap (q, \; q + p_1)$.

Kako je (6. 27) u suprotnosti sa (6. 23) proizilazi da funkcija $f(x)$ u tački $q(\{k_n\})$ nema ni desni izvod.

Pokazali smo da svakom fiksiranom nizu $\{k_n\}$ odgovara jedan i samo jedan broj $q(\{k_n\})$. Uzmimo sada dva različita fiksirana niza $\{k_n\}_1$ i $\{k_n\}_2$ i pokažimo da iz

$$\{k_n\}_1 \neq \{k_n\}_2$$

proizilazi da je i

$$q(\{k_n\}_1) \neq q(\{k_n\}_2).$$

Ako je $\{k_n\}_1 \neq \{k_n\}_2$ znači da egzistira bar jedan prirodan broj m takav da je $(k_m)_1 \neq (k_m)_2$, gde su: $(k_m)_1$ m-ti član niza $\{k_n\}_1$ a $(k_m)_2$ m-ti član niza $\{k_n\}_2$. Označimo sa j najmanji prirodan broj koji zadovoljava uslov

$$(k_j)_1 \neq (k_j)_2.$$

Iz gornjeg proizilazi da je

$$(6.28)\qquad \text{ili} \quad ((k_j)_1 = 1, \; (k_j)_2 = 2),$$

$$(6.29)\qquad \text{ili} \quad ((k_j)_1 = 2, \; (k_j)_2 = 1).$$

No kako je

$$(a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1} - d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1}, \; a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1} + d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1}) \cap$$
$$\cap (a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2} - d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2}, \; a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2} + d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2}) = V,$$

i kako je za slučaj (6. 28)

$$q(\{k_n\}_1) \in (a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1} - d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1}, \; a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1} + d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1}),$$
$$q(\{k_n\}_2) \in (a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2} - d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2}, \; a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2} + d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2});$$

a za slučaj (6. 29)

$$q(\{k_n\}_1) \in (a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2} - d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2}, \; a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2} + d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 2}),$$
$$q(\{k_n\}_2) \in (a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1} - d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1}, \; a_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1} + d_{k_1 k_2 \ldots k_{j-1} 1});$$

znači da je $q(\{k_n\}_1) \neq q(\{k_n\}_2)$. Obzirom da je $(k_i)_1 = (k_i)_2$, za $i < j$, to smo u prethodnoj rečenici mesto $(k_i)_1$ i $(k_i)_2$ pisali samo k_i.

Iz izloženog izvodimo zaključak da zaista

$$(6.30) \qquad \begin{cases} \text{iz uslova } \{k_n\}_1 \neq \{k_n\}_2 \\ \text{proizilazi da je i } q(\{k_n\}_1) \neq q(\{k_n\}_2). \end{cases}$$

Različitih nizova $\{k_n\}$ imamo $2^{\aleph_0}$, odnosno njihova je potencija jednaka moći kontinuuma, a iz toga i (6. 30) proizilazi da i brojeva

$$q(\{k_n\}) \in (c_3, c_4)$$

imamo kontinuum-mnogo.

Iz svega izloženog proizilazi da je teorema, izložena na početku ovog paragrafa, zaista tačna.

Kao posledica ove teoreme proizašle bi teorema (I) i teorema (II) dokazane u (§ 5.).

U vezi rezultata dobivenih u ovom paragrafu nameće se kao pitanje i sledeći problem:

Problem (III): Ako je realna funkcija $f(x)$, $x \in (a, b)$, svuda-gusto prekidna i istovremeno svuda-gusto neprekidna, da li postoji svuda-gusto raspoređeni skup brojeva, kojeg ćemo označiti sa G, u kojima je funkcija $f(x)$ neprekidna ali u njima nema ni konačnog ni beskonačnog ni levog ni desnog izvoda?

Ako je odgovor na gornje pitanje potvrdan nameće se i:

Problem (IV): Naći potenciju skupa G.

Dalja proučavanja u vezi rezultata dobivenih u ovom radu

Rezultati dobiveni u ovom radu razotkrivaju nam izvestan broj novih problema čija bi rešenja bila od interesa. Mi smo na kraju petog i šestog paragrafa naveli četiri takva problema. Ti se problemi odnose na realne funkcije jedne promenljive, pa se odmah nameće kao problem da se reše analogna pitanja i za realne funkcije od konačno-mnogo nezavisno promenljivih. No slična pitanja mogla bi se postaviti i za funkcije od prebrojivo beskonačno-mnogo nezavisno promenljivih. Jasno je da se nameću slični problemi i za kompleksne funkcije koje zavise bilo od jedne bilo od konačno-mnogo kompleksnih nezavisno promenljivih. Jedan od problema bio bi i ispitivanje kardinalnog broja i mere pojedinih skupova koji se pominju u ovom radu kao i skupova brojeva koji će se pojaviti pri obradi navedenih problema.

Na kraju smatramo da treba ukazati na nekoliko problema koje je autor ovog rada razradio u [18], [19], [20] i [21]. Problematika u radovima [19] i [20] tesno je povezana sa problematikom ovog rada dok se u radovima [18] i [21] proučava pitanje aproksimacije realnih brojeva koja se može uspešno primeniti pri rešavanju problema koji se pojavljuju u vezi problematike ovog rada.

U radu [19] dokazuje se egzistencija nekih klasa kompleksnih funkcija koje zavise od konačno-mnogo nezavisno promenljivih i formiraju se što prostije funkcije koje pripadaju pojedinim od tih klasa. Navedimo definiciju jedne od tih klasa čija se egzistencija dokazuje i označimo je sa H_{nq}.

Definicija: Sa H_{nq} *označavamo klasu svih kompleksnih funkcija koje zavise od n kompleksnih nezavisno promenljivih i od kojih svaka ima istovremeno sledeće osobine:*

1°. Egzistira skup svuda-gusto raspoređenih tačaka u kojima je funkcija prekidna;

2°. Egzistira skup svuda-gusto raspoređenih tačaka kojih ima mere nula a kontinuum-mnogo u svakoj oblasti i u kojima je funkcija neprekidna i u kojima su zadovoljene Cauchy-Riemann-ove jednačine za sve nezavisno promenljive ali ni u jednoj od tih tačaka ne postoji parcijalni izvod ni po jednoj od nezavisno promenljivih;

3°. Egzistira skup svuda-gusto raspoređenih tačaka kojih ima mere nula a kontinuum-mnogo u svakoj oblasti i u kojima postoje parcijalni izvodi po i samo po unapred proizvoljno uočenoj grupi nezavisno promenljivih;

4°. Egzistira skup svuda-gusto raspoređenih tačaka kojih ima kontinuum-mnogo u svakoj oblasti i u kojima postoje parcijalni izvodi po svima nezavisno promenljivim ali funkcija nije diferencijabilna ni u jednoj od tih tačaka;

5°. Funkcija nije diferencijabilna ni u jednoj tački i ako je u svuda-gusto raspoređenim tačkama, kojih ima u svakoj oblasti kontinuum-mnogo, neprekidna i ako sem toga u svuda-gusto raspoređenim tačkama ima sve parcijalne izvode·

Polazeći od teorema koje se nalaze u drugoj glavi, autor u radu [20] razrađuje pitanje diferencijabilnosti i pitanje izvodljivosti funkcija koje zavise od konačno-mnogo nezavisno promenjivih. Autor uvodi zatim pojam diferencijabilnosti u širem smislu, odnosno uglovnu diferencijabilnost i u vezi toga dokazuje nekoliko teorema.

LITERATURA

[1] A. Гельфонд — *О совместных приближениях алгебраических чисел рациональными дробями* — Изв. АН СССР, №5, 1941.

[2] A. Denjoy — *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse* — Paris, 1954.

[3] J. Liouville — *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques* — Journal de mathém. pures et appliquées 16, 1851.

[4] F. Lukacs — *Eine unstetige und differenzierbare Funktion* — Mathematische Annalen, LXX, 1911.

[5] N. Lusin — *Sur les propriétés des fonctions mesurables* — Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 154, 1912.

[6] Н. Лузин — *К основной теореме интегрального исчисления* — Математический сборник, 28, вып. 2, 1912.

[7] N. Lusin — *Sur la recherche des fonctions primitives* — Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 162, 1916.

[8] Н. Лузин — *Интеграл и тригонометрический ряд (диссертация)* — Собрание сочинений I, Москва, 1953.

[9] K. Siegel — *Approximation algebraischer Zahlen* — Math. Zeitschr, B. 10, 1921.

[10] A. Thue — *Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen* — Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 135, 1909.

[11] S. Ćetković — *O diferencijabilnosti dva skupa realnih funkcija* — Vesnik Društva mat. i fiz. NR Srbije, IV, 3—4, 1952.

[12] S. Ćetković — *Veza između reda algebarskih brojeva i diferencijabilnosti jedne familije funkcija* — Vesnik Društva mat. i fiz. NR Srbije, V, 3—4, 1953.

[13] S. Ćetković — *Transcendentni brojevi i diferencijabilnost jedne familije funkcija. Formiranje jednog skupa transcendentnih brojeva* — Vesnik Društva mat. i fiz. NR Srbije, VI, 1—2, 1954.

[14] S. Ćetković — *Formiranje nekih realnih funkcija od konačno mnogo promenljivih neobičnih osobina* — Vesnik Društva mat. i fiz. NR Srbije, VIII, 3—4, 1956.

[15] S. Ćetković — *Un théorème de la théorie des fonctions* — Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 245, 1957.

[16] S. Ćetković — *Diferencijabilnost funkcija koje su neprekidne u svuda-gusto raspoređenim tačkama* — Vesnik Društva mat. i fiz. NR Srbije, X, 1958.

[17] S. Ćetković — *Egzistencija nekih klasa realnih funkcija koje zavise od beskonačno-mnogo nezavisno promenljivih* — Vesnik Društva mat. i fiz. NR Srbije, X, 1958.

[18] S. Ćetković — *Dvostruka aproksimacija transcendentnih brojeva pomoću racionalnih* — Vesnik Društva mat. i fiz. NR Srbije, X, 1958.

[19] S. Ćetković — *Egzistencija nekih klasa kompleksnih funkcija koje zavise od konačno-mnogo nezavisno promenljivih* — (Rad nije do sada publikovan ali je prijavljen kao naučno saopštenje za III kongres mat. i fiz. Jugoslavije).

[20] S. Ćetković — *Diferencijabilnost svuda-gusto neprekidnih realnih funkcija koje zavise od konačno-mnogo nezavisno promenljivih* — (Rad nije do sada publikovan ali je prijavljen kao naučno saopštenje za III kongres mat. i fiz. Jugoslavije).

[21] S. Ćetković — *Aproksimacija transcendentnih brojeva preko proizvoljnog niza svuda-gusto raspoređenih realnih brojeva* — Vesnik Društva mat. i fiz. NR Srbije, XI, 1959. (Predato za štampu).

[22] M. K. Fort Jr. — *A theorem concerning functions discontinuos on a dense set* — Am. Math. Monthly, June—July, 1951.

[23] C. Маркус — *Точки разрыва и точки дифференцируемости* — Revue de math. pures et appl., Ed. Acad. R. P. R., t. II, 1957.

[24] A. Брундо — *Непрерывность и дифференцируемость* — Матем. сб., 13 (55), 1, 1943.

[25] Е. М. Ландис — *О множестве точек существования бесконечной производной* — ДАН, 107, 1956.

Résumé

QUELQUES CONTRIBUTIONS À LA THÉORIE DES FONCTIONS CONTINUES DANS LES POINTS PARTOUT-DENSEMENT DISPOSÉS

Simon Ćetković

Dans le présent travail nous nous proposons de découvrir les propriétés communes au sujet de la différentiabilité et des dérivées partielles des fonctions qui sont continues dans les points partout-densement disposés et, en même temps, discontinues dans les points partout-densement disposés. Dans le but d'accomplir le devoir proposé nous avons démontré, dans le premier chapitre de ce travail, l'existence et formé un certain nombre de classes de fonctions chez lesquelles se manifestent, de plus en plus, d'un côté, l'indépendance et, de l'autre, la liaison entre la continuité, la discontinuité, la différentiabilité, l'indifférentiabilité des fonctions. Dans le premier paragraphe nous rattachons la question de la différentiabilité des fonctions à un ensemble de nombres transcendants partout-densement disposés. Dans le deuxième paragraphe nous construisons un ensemble de nombres irrationnels partout-densement disposés ayant certaines propriétés spéciales. Nous utilisons ces nombres dans certaines démonstrations exposées aux paragraphes trois et quatre. Les nombres susmentionnés possèdent la propriété de pouvoir être approximés d'une façon spéciale à quelques suites correspondantes de nombres rationnels. Dans le troisième paragraphe nous étudions la question de la différentiabilité et des dérivées partielles à travers quelques classes de fonctions réelles dépendant d'une multitude infinie de variables indépendantes. Dans le paragraphe quatre nous démontrons l'existence de quelques classes de fonctions complexes, chez lesquelles nous rattachons les notions: de la différentiabilité, de l'existence et non-existence des dérivées partielles, de la discontinuité et continuité, aux équations de Cauchy-Riemann.

Dans le chapitre deux il y a quelques théorèmes qui nous indiquent un certain nombre de propriétés essentielles communes à toutes les fonctions qui sont continues dans les points partout-densement disposés et, simultanément, discontinues dans les points partout-densement disposés.

Nous allons exposer les résultats auxquels nous sommes arrivés dans les paragraphes particuliers de ce travail.

§ 1. *Nombres transcendants et différentiabilité d'une famille de fonctions.* — Dans le présent paragraphe nous nous proposons de former les fonctions aussi simples que possible qui auraient des propriétés suivantes: discontinues dans tous les points rationnels et différentiables dans un ensemble fini de nombres transcendants, donné par avance, ainsi que dans les points partout-densement disposés. Ensuite, notre but était de former des nombres transcendants partout-densement disposés, dans lesquels ces fonctions ne seraient pas différentiables quoiqu'elles soient continues. Afin d'arriver à cette fin nous avons procédé de la façon suivante:

1° Pour tout nombre réel a on forme la suite $g_a(n)=\min\left|\frac{d}{n}-a\right|$, suite de densité du nombre a, où d varie dans l'ensemble de nombres entiers avec $\frac{d}{n}\neq a$, n étant un nombre naturel.

Ensuite, on considère la suite

$$f(n)=\min\,(g_\xi\,(n),\ n^{-n}),$$

où ξ appartient à un ensemble fini et arbitraire S de nombres transcendants donnés d'avance.

Après cela on forme la fonction réelle $F_s(x)$ que voici:

$$F_s\,(x)=0,\ \text{pour } x \text{ irrationnel};$$

$F_s(x)=\frac{1}{q}f(q)$, pour $x=\frac{p}{q}$, p nombre entier, q naturel et p et q premiers entre eux.

Ceci étant admis, on démontre que la fonction $F_s(x)$ est différentiable dans un ensemble de nombres transcendants S donné d'avance, ainsi que dans un ensemble de points partout dense, quoiqu'elle soit discontinue dans tous les points rationnels.

2° Si $h(n)$ désigne le plus grand nombre de la forme n^{-m}, (m et n nombres naturels, $n>1$ avec $h(n)\leqslant\frac{1}{n}f(n)$) on construit une suite de suites

$$h_k(n)=h\,\{1/h_{k-1}(n)\},$$

et avec elle la nouvelle suite suivante

$$\alpha\,(n)=\lim_{i\to\infty}\sum_{k=1}^{i}h_k(n).$$

Mettant à profit la suite de nombres rationnels

$$a\,(l)=\sum_{k=1}^{l}h_k(n),$$

on démontre que les $\alpha\,(n)$ sont des nombres transcendants. Au moyen de ces nombres $\alpha\,(n)$ on forme, à la fin, l'ensemble partout dense de nombres transcendants et on démontre que la fonction $E_s(x)$ pour ces nombres n'est pas différentiable.

§ 2. *Formation d'un ensemble de nombres irrationnels partout-densement disposés.* — Dans ce paragraphe-ci nous avons formé un ensemble de nombres irrationnels partout-densement disposés qui possèdent la propriété de pouvoir être approximés, d'une façon spéciale, aux certaines suites de nombres rationnels. Nous avons utilisé les nombres formés dans le présent paragraphe, pour les démonstrations exposées aux paragraphes trois et quatre.

§ 3. *Existence de quelques fonctions réelles dépendant d'une multitude infinie dénombrable de variables indépendantes.* — Dans ce paragraphe-ci nous démontrons l'existence des classes de fonctions G_{wp}, G_{wq} et G_{wt} et formons les fonctions simples appartenant à ces classes.

1. — Par G_{wp} nous dénotons la classe composée de toutes les fonctions réelles dépendant d'une multitude infinie dénombrable de variables indépendantes, dont chacune possède en même temps les propriétés suivantes:

1° Elle est discontinue dans tous les points;

2° Dans les points partout-densement disposés elle possède toutes les dérivées partielles, quoiqu'elle soit discontinue dans tous ces points;

3° Dans les points partout-densement disposés elle possède des dérivées partielles d'après, et rien que d'aprés un groupe arbitrairement envisagé par avance, de variables indépendantes, quoiqu'elle soit discontinue dans tous ces points.

2. — Par G_{wq} nous avons dénoté la classe composée de toutes les fonctions réelles dépendant d'une multitude infinie dénombrable de variables indépendantes dont chacune possède en même temps des propriétés suivantes:

1° Elle est discontinue dans les points partout-densement disposés;

2° Elle est continue dans les points partout-densement disposés, mais ne possède, dans ceux-ci, aucune dérivée partielle;

3° Elle est continue dans les points partout-densement disposés et possède, dans ceux-ci, toutes les dérivées partielles;

4° Elle est continue dans les points partout-densement disposés et possède, dans ceux-ci, des dérivées partielles d'après, et rien que d'après un groupe de variables indépendantes, arbitrairement envisagé par avance;

5° Elle n'est différentiable dans aucun point.

3. — Par G_{wt} nous avons dénoté la classe composée de toutes les fonctions réelles dépendant d'une multitude infinie dénombrable de variables indépendantes, dont chacune possède en même temps des propriétés suivantes:

1° Elle est discontinue dans les points partout-densement disposés;

2° Elle est continue dans les points partout-densement disposés, mais ne possède de dérivée d'après aucune de variables;

3° Elle possède, dans les points partout-densement disposés, des dérivées partielles d'après, et rien que d'après un groupe de variables indépendantes, envisagées arbitrairement par avance;

4° Elle est différentiable dans les points partout-densement disposés.

II. — Afin de démontrer l'existence des classes G_{wp}, G_{wq} et G_{wt} nous énonçons un principe pour la formation des fonctions pareilles. Soit donnée une suite infinie de variables indépendantes: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \equiv \{x_n\}$. Soient a, b et R trois nombres réels. Formons les fonctions réelles $F_{ab}(\{x\})$ de la façon suivante:

$F_{ab}(\{x_n\})=0$, lorsque tous les termes de la suite $\{x_n\}$ sont des nombres irrationnels;

$F_{ab}(\{x_n\})=1/q^a$, lorsqu'une, et rien qu'une des variables indépendantes possède une valeur rationnelle et que q soit le dénominateur de cette valeur rationnelle;

$F_{ab}(\{x_n\})=1/(\min(q_i, q_j))^b$, lorsque deux, et rien que deux variables indépendantes assument une valeur rationnelle, et que q_i et q_j soient des dénominateurs de ces valeurs rationnelles;

$F_{ab}(\{x_n\})=R$, si plus de deux variables indépendantes assument une valeur rationnelle.

De cette facon-là nous avons formé un ensemble de fonctions. A chaque couple de valeurs (a, b) correspond une fonction. Nous avons ici des fonctions d'une multitude infinie de variables indépendantes, mais ces fonctions pourraient être nommées aussi les fonctions de la suite a ou les fonctions dans l'espace élargi de Hilbert (élargi, car on y prend aussi les suites aux modules divergents). Chacune de ces fonctions est en effet la transformation de l'ensemble de toutes les suites réelles, convergentes et divergentes, limitées et illimitées sur l'ensemble de nombres réels.

Dans ce paragraphe-ci nous démontrons ensuite que:

$F_{ab}(\{x_n\}) \in G_{wp}$, pour $a>2$, $b\leqslant 0$, R nombre réel arbitraire;

$F_{ab}(\{x_n\}) \in G_{wq}$, pour $a>2$, $b \in (0, 1]$, $R=0$;

$F_{ab}(\{x_n\}) \in G_{wt}$, pour $a>2$, $b \in (2, \infty)$, $R=0$.

§ 4. *Existence de quelques classes de fonctions complexes.* — Dans ce paragraphe-ci nous avons démontré l'existence des classes H_p, H_q et H_t et formé les fonctions simples appartenant à ces classes.

a) — Par H_p nous avons dénoté la classe formée de toutes les fonctions complexes dépendant d'une variable indépendante complexe, dont chacune possède en même temps les propriétés suivantes:

1° Elle est discontinue dans tous les points.

2° Il existe un ensemble de points partout-densement disposés, dans lesquels sont satisfaites les équations de Cauchy-Riemann, mais elle n'est différentiable dans aucun de ces points.

b) — Par H_q nous avons denoté la classe formée de toutes les fonctions complexes dépendant d'une variable indépendante complexe et dont chacune possède les propriétes suivantes:

1° Il existe un ensemble de points partout-densement disposés dans lesquels la fonction est discontinue.

2° Il existe un ensemble de points partout-densement disposés dans lesquels la fonction est continue, dans chacun de ces points sont satisfaites les équations de Cauchy-Riemann et, pourtant, dans aucun de ces points elle n'est différentiable.

3° Elle n'est différentiable dans aucun point.

c) — Par H_t nous avons dénoté la classe formée de toutes les fonctions complexes dépendant d'une variable indépendante complexe et dont chacune possède les propriétés suivantes:

1° Il existe un ensemble de points partout-densement disposés dans lesquels la fonction est discontinue.

2° Il existe un ensemble de points partout-densement disposés dans lesquels sont satisfaites les équations de Cauchy-Riemann, mais elle n'est différentiable dans aucun de ces points.

3° Il existe un ensemble de points partout-densement disposés dans lesquels la fonctions est différentiable.

1° — Nous avons formé une fonction complexe dépendant d'une variable indépendante complexe $F_a(z)=F_a(x+iy)=P(x, y)+iQ(x, y)$, de la façon suivante:

$P(x, y)=0$, lorsque x aussi bien que y sont des nombres irrationnels;

$P(x, y)=1/(\min(q_1, q_2))^a$, lorsque x aussi bien que y sont des nombres rationnels différents du zéro (q_1 et q_2 sont des dénominateurs de ces nombres rationnels, le numérateur et le dénominateur étant des nombres premiers entre eux; a est un nombre réel arbitrairement fixé);

$P(x, y)=0$, lorsque soit x seul, soit y seul est un nombre rationnel;

$P(x, y)=0$, lorsqu'au moins soit x, soit y est égal au zéro;

$Q(x, y)=1$, pour chaque (x, y).

De l'ensemble de fonctions que nous avons formées, nous avons isolé les trois familles suivantes de fonctions:

$$(F_a(z) \quad \text{pour} \quad a\leqslant 0);$$
$$(F_a(z) \quad \text{pour} \quad a\in(0, 1]);$$
$$(F_a(z) \quad \text{pour} \quad a>2).$$

Nous avons montré ensuite que:

$$(F_a(z) \quad \text{pour} \quad a\leqslant 0)\in H_p;$$
$$(F_a(z) \quad \text{pour} \quad a\in(0, 1])\in H_q;$$
$$(F_a(z) \quad \text{pour} \quad a>2)\in H_t.$$

2° — Si $f(z)$ est une fonction analytique, alors aussi

$$(F_a(z), \quad a\leqslant 0)+f(z)\in H_p;$$
$$(F_a(z), \quad a\in(0, 1])+f(z)\in H_q;$$
$$(F_a(z), \quad a>2)+f(z)\in H_t;$$

c'est à dire, à chaque fonction analytique d'une variable complexe nous pouvons envisager une fonction correspondante, resp. une famille de fonctions, appartenant à n'importe laquelle des classes H_p, H_q, H_t à laquelle elle se rattache réciproquement d'une façon univoque et il s'ensuit de là que le nombre cardinal de l'ensemble de fonctions de n'importe laquelle des classes H_p, H_q et H_t n'est pas inférieur au nombre cardinal de l'ensemble de toutes les fonctions analytiques d'une variable indépendante complexe.

§ 5. *Différentiabilité des fonctions réelles discontinues dans les points partout-densement disposés.* — Dans ce paragraphe on donne une démonstration élémentaire des théorèmes suivants:

Théorème (I): Si la fonction réelle $f(x)$, $x \in (a, b)$, est discontinue dans les points partout-densement disposés et simultanément continue dans les points partout-densement disposés, il existe alors des points partout-densement disposés dans lesquels la fonction $f(x)$ est continue, mais elle n'est pas différentiable dans ce point-ci.

Théorème (II): Si la fonction réelle $f(x)$, $x \in (c_1, c_2)$, est continue dans les points partout-densement disposés et, en même temps, discontinue dans les points partout-densement disposés, alors dans chaque intervalle (c_3, c_4), $((c_3, c_4) \subseteq (c_1, c_2))$, il existe un ensemble de points dont la puissance est égale à celle du continuum et dans lesquels la fonction $f(x)$ est continue et indifférentiable.

§ 6. *De la différentiabilité au sens unique des fonctions réelles discontinues dans les points partout-densement disposés.* — Dans ce paragraphe-ci on donne une démonstration élémentaire du théorème suivant:

Théorème: Si $f(x)$, $x \in (c_1, c_2)$, est une fonction réelle discontinue dans les points partout-densement disposés et en même temps continue dans les points partout-densement disposés, alors dans chaque intervalle (c_3, c_4), $((c_3, c_4) \subseteq (c_1, c_2))$, il existe un ensemble de points dont la puissance est égale à celle du continuum et dans lesquels la fonction $f(x)$ est continue, mais dans aucun de ces points il n'existe ni la dérivée gauche ni la dérivée droite.

Pour terminer, mentionnons que ce travail contient aussi quelques problèmes qui s'imposent en rapport avec les résultats obtenus.

Remarque: Les théorèmes (I) et (II) sont démontrés plus vite en utilisant les résultats obtenus dans les travaux [22] et [23].

SADRŽAJ