**PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU**
**PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE**

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA – SERIE: MATHEMATIQUE ET PHYSIQUE

№ 32 (1959)

# O JEDNOM REDU

*Dragomir Ž. Đoković*

Uočimo skup $M$ svih prirodnih brojeva oblika $m^n$, gde su $m\,(>1)$ i $n\,(>1)$ prirodni brojevi. Uredimo $M$ po veličini i označimo mu elemente sa $a_i\;(i=1,\,2,\,\ldots)$.

Označimo sa $P$ skup brojeva $b_i=a_i-1\quad(i=1,\,2,\,\ldots)$.

Prvih deset članova skupa $P$ su:

$$3,\ 7,\ 8,\ 15,\ 24,\ 26,\ 31,\ 35,\ 48,\ 63.$$

Dokazaćemo da je $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{b_i}=1.$

Uočimo zbir $S_n=\sum\limits_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu}\,.$

Označimo sa $c_i\;(i=1,\,2,\,\ldots\,,p)\;(c_1<c_2<\cdots<c_p)$ one članove skupa $\{2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,\ldots\,,n-2,\,n-1,\,n\}$ koji nisu elementi skupa $M$:

Sabirke zbira $S_n$ razdelićemo u sledećih $p$ grupa

$$\text{(1)}\qquad \frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_1^{\,2}}+\cdots+\frac{1}{c_1^{\,k_1}}\qquad (c_1^{\,k_1}\leqslant n<c_1^{\,k_1+1});$$

$$\text{(2)}\qquad \frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_2^{\,2}}+\cdots+\frac{1}{c_2^{\,k_2}}\qquad (c_2^{\,k_2}\leqslant n<c_2^{\,k_2+1});$$

$$\vdots$$

$$(p)\qquad \frac{1}{c_p}+\frac{1}{c_p^{\,2}}+\cdots+\frac{1}{c_p^{\,k_p}}\qquad (c_p^{\,k_p}\leqslant n<c_p^{\,k_p+1}).$$

Zbir $i$-te grupe je

$$\frac{1}{c_i}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{c_i^{\,k_i}}}{1-\dfrac{1}{c_i}}=\frac{1}{c_i-1}-\frac{1}{c_i^{\,k_i}\,(c_i-1)}\,.$$

Zato je

$$S_n=\sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu}=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{c_i-1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{c_i^{\,k_i}\,(c_i-1)}\,,$$

ili

$$\sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{1}{\nu} - \sum_{i=2}^{p} \frac{1}{c_i - 1} = 1 - \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i^{k_i}(c_i - 1)}.$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{q(n)} \frac{1}{b_i} = 1 - \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i^{k_i}(c_i - 1)}$$

($q$ je indeks najvećeg $b_i$ koji nije veći od $n-1$).

Da bismo dokazali navedenu relaciju, treba još pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i^{k_i}(c_i - 1)} = 0.$$

Uvedimo oznake:

$$S(1, p) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i^{k_i}(c_i - 1)}; \qquad S(r+1, p) = \sum_{i=r+1}^{p} \frac{1}{c_i^{k_i}(c_i - 1)}.$$

Znači da je:

$$S(1, p) = S(1, r) + S(r+1, p)$$

[$p$ i $r (< p)$ su zasada dva proizvoljna prirodna broja].

Neka je $\varepsilon (> 0)$ proizvoljan broj.

Pošto je

$$S(r+1, p) \leqslant \sum_{i=r+1}^{p} \frac{1}{c_i(c_i - 1)}$$

i kako je red

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i(c_i - 1)}$$

konvergentan, postoji takav prirodan broj $r_1$ da za svako $r > r_1$ i proizvoljno $p (> r)$ bude

$$S(r+1, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fiksirajmo jedno takvo $r > r_1$.

S obzirom da je $\lim\limits_{p\to\infty} S(1, r) = 0$ (jer $k_i \to \infty$), postojaće takav prirodan broj $p_1$ da za svako $p > p_1$ bude

$$S(1, r) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fiksirajmo jedno takvo $p > p_1$.

Znači da je:

$$S(1, p) = S(1, r) + S(r+1, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S(1, p) = 0.$$

Ovim je dokaz završen.

*Résumé*

## SUR UNE SÉRIE

*D. Ž. Đoković*

En décomposant la somme $\sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{\nu}$ en groupes (1), (2), . . . , ($p$), on obtient la formule suivante

$$\sum_{i=1}^{q(n)} \frac{1}{b_i} = 1 - \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i^{k_i}(c_i - 1)} .$$

et en passant à la limite quand $n \to \infty$, on trouve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i} = 1,$$

où les $b_i$ sont les nombres naturels $m^\nu - 1$ ($m$ et $\nu$ nombres naturels $> 1$), et $q$ l'index du plus grand des nombres $b_i$ qui ne dépasse pas $n - 1$.

Cette remarque est développée dans l'article suivant:

*D. Đoković — Đ. Kurepa: On the summation of fundamental fractions* (Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, t. X (1958), p. 35—42).