PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHÊMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 31 (1959)

O JEDNOJ SUMACIONOJ FORMULI

Nadežda Janković

Izvešćemo sumacionu formulu[1]

$$S_n^{\nu}=\sum_{k=1}^{n} S_k^{\nu-1}=(m+1)!\binom{n+m+\nu}{m+\nu+1} \quad (\nu=2,\ 3,\ 4,\ \ldots), \tag{1}$$

gde je

$$S_n^1=\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2)\cdots(k+m). \tag{2}$$

Izraz (2) može se napisati u obliku

$$S_n^1=(m+1)!+\frac{(m+2)!}{1!}+\frac{(m+3)!}{2!}+\cdots+\frac{(m+n)!}{(n-1)!},$$

odnosno

$$S_n^1=(m+1)!\left[\binom{m+1}{m+1}+\binom{m+2}{m+1}+\binom{m+3}{m+1}+\cdots+\binom{m+n}{m+1}\right].$$

Primenom obrasca

$$\binom{a}{a}+\binom{a+1}{a}+\binom{a+2}{a}+\cdots+\binom{m}{a}\equiv\binom{m+1}{a+1}, \tag{3}$$

gde su m i a ($\leqslant m$) prirodni brojevi, dobija se

$$S_n^1=(m+1)!\binom{n+m+1}{m+2}.$$

Kako je

$$S_n^2=\sum_{k=1}^{n} S_k^1,$$

odnosno

$$S_n^2=(m+1)!\left[\binom{m+2}{m+2}+\binom{m+3}{m+2}+\binom{m+4}{m+2}+\cdots+\binom{n+m+1}{m+2}\right],$$

biće

$$S_n^2=(m+1)!\binom{n+m+2}{m+3}.$$

[1] Ovaj problem je postavljen u knjizi: *D. S. Mitrinović*. Zbornik matematičkih problema, knjiga I, drugo izdanje, Beograd, 1958, str. 221.

Iz prethodnog može se naslutiti du je uopšte

$$S_n^{\nu}=(m+1)!\binom{n+m+\nu}{m+\nu+1}, \tag{4}$$

što se može dokazati metodom matematičke indukcije.

Pretpostavimo da je formula (4) tačna za prirodan broj $\nu=p$. Prema definiciji je

$$S_n^{p+1}=\left(\sum_{k-1}^{n}\right)S_k^p,$$

te se, na osnovu induktivne hipoteze, dobija

$$S_n^{p+1}=\sum_{k=1}^{n}(m+1)!\binom{k+m+p}{m+p+1},$$

odnosno

$$S_n^{p+1}=(m+1)!\sum_{k=1}^{n}\binom{k+m+p}{m+p+1},$$

i na kraju

$$S_n^{p+1}=(m+1)!\binom{n+m+p+1}{m+p+2}.$$

Na osnovu čega možemo zaključiti da formula (4) važi za svako $\nu=p+1$, ako važi za $\nu=p$.

Kako formula (4) važi za $\nu=1$, induktivni dokaz je završen.

Résumé

SUR UNE FORMULE SOMMATOIRE

N. Janković

Dans la Note № 2821 (*The Mathematical Gazette*, vol. 43 № 343, 1959, p. 44) on indique la formule de *Milošević — Đoković* suivante

$$S_n^{\nu}=\sum_{k=1}^{n}S_k^{\nu-1}=2\binom{n+\nu+1}{\nu+2}\quad(\nu=2,\,3,\,4,\,\ldots),$$

où

$$S_n^1=\sum_{k=1}^{n}k\,(k+1).$$

Plus généralement, nous avons obtenu la formule sommatoire suivante

$$\sigma_n^{\nu}=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{\nu-1}=(m+1)!\binom{n+m+\nu}{m+\nu+1}\quad(\nu=2,\,3,\,4,\,\ldots), \tag{*}$$

avec

$$\sigma_n^1=\sum_{k=1}^{n}k\,(k+1)\,(k+2)\ldots(k+m)\quad(m\text{ nombre naturel}).$$

Nous avons démontré la formule (*) par l'emploi de la méthode d'induction complète.