PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 30 (1959)

SUR UN THÉORÈME DE NEUBERG ET SON INVERSION

Slobodan V. Pavlović

Soit donné le triangle ABC, avec les côtés a, b, c (fig. 1), et dans son plan un point D, dont les distances aux sommets sont $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$. Construisons le triangle $O_1 O_2 K \sim ABC$, et soient ses côtés $\overline{O_1 O_2} = m$, $\overline{O_1 K} = l$, $\overline{O_2 K} = n$.

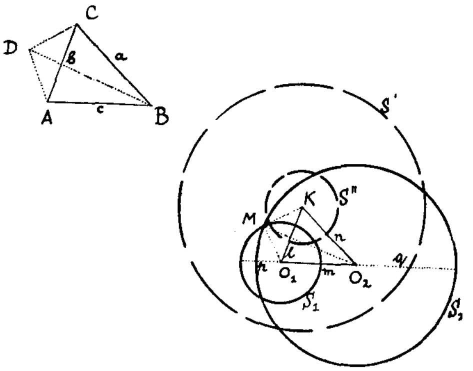

Fig. 1

Décrivons les circonférences S_1, S_2 autour des points O_1, O_2 avec les rayons p et q $(>p)$, et construisons les triangles $PTQ \sim ABC$, les sommets P, T se trouvant sur ces circonférences.

Nous avons démontré ailleurs[1], en n'utilisant que la similitude des triangles, la proposition suivante:

Dans le plan, le lieu géométrique des sommets Q est un anneau fermé. Le centre des circonférences S', S'' qui ferment l'anneau est le point K, et ses rayons sont:

$$R = q\frac{l}{m} + p\frac{n}{m}, \quad r = q\frac{l}{m} - p\frac{n}{m}. \tag{1}$$

[1]) *S. V. Pavlović*: Sur une démonstration géométrique d'un théorème de D. Pompeïu. *Elemente der Mathematik*, Band VIII, № 1, p. 13 (1953).

Nous montrerons d'abord qu'on peut obtenir de cette proposition, comme corollaire, le théorème suivant de J. Neuberg[2]):

On peut toujours au moyen des segments $a \cdot \overline{DA}$, $b \cdot \overline{DB}$, $c \cdot \overline{DC}$ *construire un triangle.*

Nous déduirons aussi, par l'intermédiaire d'un théorème de D. Pompeïu[3]) la généralisation suivante du théorème de Neuberg:

Soient donnés deux triangles directement semblables, ABC (avec les côtés a, b, c) et A' B' C' (fig. 2); *on peut toujours à l'aide des segments* $a \cdot \overline{AA'}$, $b \cdot \overline{BB'}$, $c \cdot \overline{BB'}$ *construire un triangle.*

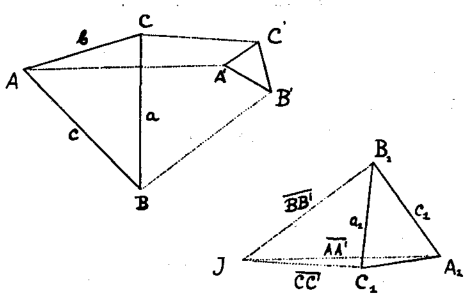

Fig. 2

Enfin nous considérerons l'inversion du théorème de Neuberg:

Si l'on donne deux triangles, $\Delta\, ABC$ *avec les côtés a, b, c,* (*fig. 3*), *et le second avec les côtés* $l_1\,(=a \cdot \overline{DA})$, $l_2\,(=b \cdot \overline{DB})$, $l_3\,(=c \cdot \overline{DC})$, *on peut toujours construire un triangle PTQ semblable au triangle ABC et tel que les distances d'un point dans son plan à ses sommets soient égales aux segments*

$$\overline{DA}\left(=\frac{l_1}{a}\right), \overline{DB}\left(=\frac{l_2}{b}\right), \overline{DC}\left(=\frac{l_3}{c}\right) \quad (\overline{DA} \leqslant \overline{DB} \leqslant \overline{DC}).$$

I. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE NEUBERG

1° Soient maintenant $m=c^2$, $l=cb$, $n=ca$, les côtés du triangle $O_1 O_2 K$ (fig. 1). Remarquons qu'à tout point D dans le plan ABC, correspond un point M dont les distances aux sommets $O_1 O_2 K$ sont $\overline{MO_1}=c \cdot \overline{DA}$, $\overline{MO_2}=$ $=c \cdot \overline{DB}$, $\overline{MK}=c \cdot \overline{DC}$.

---

[2]) *J. Neuberg*: Sur les quadrangles complets. *Mathésis* №1, 1891 an, p. 81. M.M. *de Lapierre* et *Paul Montel* ont démontré plus récemment ce théorème, dans *l'Enseignement Scientifique,* (octobre 1930), et *Bull. Math. Phys. Ecole polytechn.* Bucarest, t IX p. 3 (1938). Tous ces références sur le théorème de J. Neuberg se trouvent dans le travail: Sur un théorème de M. D. Pompeïu par M. Victor Thébault. *Bull. Math. Phys. École polytechn.* t X. p. 38 (1939).

[3]) *D. Pompeïu*: Remarques sur la note de M. Teodoriu. *Bull. Math. Phys. École polytechn.* Bucarest t. I, page 161 (1931).

Supposons que les circonférences S_1, S_2 passent par le point M, ou que $p = c \cdot \overline{DA}$, $q = c \cdot \overline{DB}$.

Les rayons des circonférences S', S'' sont dans ce cas:

$$R = c \cdot \overline{DB}\frac{c \cdot b}{c^2} + c \cdot \overline{DA}\frac{c \cdot a}{c^2} = b \cdot \overline{DB} + a \cdot \overline{DA}$$

$$r = b \cdot \overline{DB} - a \cdot \overline{DA}.$$

Le point M doit se trouver dans l'anneau (ou sur ses bords). Car s'il n'était pas ainsi, les sommets d'un triangle PTQ suffisamment petit, et qui contiendrait le point M, pourraient se trouver en dehors de l'anneau, mais c'est en contradiction avec notre proposition[1].

Donc, on conclut de là que:

$$r \leqslant \overline{KM} \leqslant R$$

ou

$$b \cdot \overline{DB} - a \cdot \overline{DA} \leqslant c \cdot \overline{DC} \leqslant b \cdot \overline{DB} + a \cdot \overline{DA}$$

et ce sont des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse, des segments $c \cdot \overline{DC}$, $b \cdot \overline{DB}$ et $a \cdot \overline{DA}$ construire le triangle.

2° Démonstration du théorème de J. Neuberg généralisé.

Voici l'énoncé du théorème de D. Pompeïu[3] à l'aide duquel nous déduirons la généralisation du théorème de J. Neuberg:

Étant donnés, dans un plan, deux triangles directement semblables ABC (avec les côtés a, b, c) et $A'B'C'$ (fig 2), et si d'un point J on mène les vecteurs JA_1, JB_1, JC_1 équipollents aux vecteurs AA', BB', CC', le triangle $A_1B_1C_1$ est semblable aux triangles donnés.

D'après le théorème de Neuberg, des segments $k \cdot b_1 \cdot \overline{JB_1}$, $k \cdot a_1 \cdot \overline{JA_1}$, et $k \cdot c_1 \cdot \overline{JC_1}$ (k étant un nombre arbitraire) on peut former le triangle.

Comme d'après le théorème ci- dessus de Pompeïu $\Delta A_1B_1C_1$ (avec les côtés a_1, b_1, c_1) est semblable à ΔABC, on peut faire que $k \cdot b_1 = b$, $k \cdot a_1 = a$, $k \cdot c_1 = c$, et comme d'après la construction $\overline{JB_1} = \overline{BB'}$, $\overline{JA_1} = \overline{AA'}$, $\overline{JC_1} = \overline{CC'}$, il en résulte que:

Des segments $a \cdot \overline{AA'}$, $b \cdot \overline{BB'}$, $c \cdot \overline{CC'}$ on peut toujours construire le triangle.

Cette proposition généralise aussi celle de N. G. Botea[4]:

Si l'on considère dans le plan deux triangles ABC et $A'B'C'$ équilatéraux et directement semblables, avec les trois longueurs AA', BB', CC' on peut toujours former un triangle.

---

[4]) *N. G. Botea*: Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de Géométrie Élémentaire. *Bull. Math. Phys. École polytechn.* t. 7, page 13 (1936).

II. SUR L'INVERSION DU THÉORÈME DE J. NEUBERG

L'inversion du théorème de J. Neuberg se réduit à la construction du triangle $PTQ \sim \Delta\ ABC$ ses sommets se trouvant sur les circonférences concentriques décrites autour du point O avec les rayons $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ (fig. 3).

Montrons que cette construction soit toujours possible.

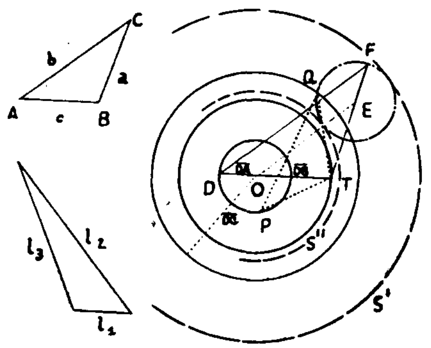

Fig. 3

En effet, comme nous avons montré ailleurs[5], étant donnés trois segments $r_1\ (=\overline{DA})$, $r_2\ (=\overline{DB})$, $r_3\ (=\overline{DC})$ et le triangle ABC avec les côtés a, b, c, s'il est remplie la condition nécessaire et suffisante

$$(2) \qquad \frac{b}{c}\overline{DB} - \frac{a}{c}\overline{DA} \leqslant \overline{DC} \leqslant \frac{b}{c}\overline{DB} + \frac{a}{c}\overline{DA}$$

on peut construire le triangle PTQ semblable à ΔABC de telle manière que les distances d'un point de son plan à ses sommets soient égales à $\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$.

Or, les segments l_1, l_2, l_3, étant les côtés d'un triangle, la relation suivante est toujours remplie:

$$l_2 - l_1 \leqslant l_3 \leqslant l_2 + l_1.$$

Les valeurs des segments étant $l_1 = a \cdot \overline{DA}$, $l_2 = b \cdot \overline{DB}$, $l_3 = c \cdot \overline{DC}$, cette relation devient:

$$b \cdot \overline{DB} - a \cdot \overline{DA} \leqslant c \cdot \overline{DC} \leqslant b \cdot \overline{DB} + a \cdot \overline{DA}$$

Il en résulte la condition (2) et notre assertion que l'inversion du théorème de J. Neuberg est toujours possible.

La construction effective du $\Delta\ PTQ$ a étê décrite dans[5]).

[5]) *S. V. Pavlović.* Sur deux théorèmes de D. Pompeīu. *Mathésis,* № 4 — 5 — 6 p. 211—214 (1956).

Rezime

O JEDNOJ NEUBERG-OVOJ TEOREMI I NJENOJ INVERZIJI

Slobodan V. Pavlović

Ako se oko tačaka O_1, O_2 trougla O_1O_2K (sa stranama $\overline{O_1O_2}=m$, $\overline{O_1K}=l$, $\overline{O_2K}=n$) koji je sličan datom trouglu ABC (sa stranama a, b, c), opišu krugovi S_1, S_2 poluprečnika p i q ($>p$), (sl. 1), i ako se konstruišu trouglovi $PTQ \sim \Delta ABC$, čija se temena P, T nalaze na krugovima S_1, S_2 tada:

Geometrisko mesto temena Q je zatvoren kružni prsten. Centar krugova S', S'' koji zatvaraju prsten je tačka K, a njihovi poluprečnici su dati obrascima (1).

U ovome radu smo pokazali kako se iz gornjeg stava, koji smo dokazali na drugom mestu[1], može izvesti Neuberg-ova teorema[2]:

Ako se u ravni ma kakvog trougla ABC, uoči neka tačka D onda se od duži $a\cdot\overline{DA}$, $b\cdot\overline{DB}$, $c\cdot\overline{DC}$ može uvek konstruisati trougao.

Izveli smo takođe, oslanjajući se na jednu teoremu D. Pompeïu-a[3], jedno uopštenje teoreme Neuberg-a:

Neka su data, u jednoj ravni, dva direktno slična trougla ABC (sa stranama a, b, c) i $\triangle A'B'C'$ (sl. 2); *može se uvek pomoću otsečaka $a\cdot\overline{AA'}$, $b\cdot\overline{BB'}$, $c\cdot\overline{CC'}$ konstruisati trougao.* Ovaj stav uopštava sledeću teoremu N. Bote-a[4]:

Ako se u ravni, posmatraju dva ravnostrana i direktno slična trougla ABC i $A'B'C'$, može se uvek od duži AA', BB', CC' obrazovati trougao.

Na kraju smo posmatrali i inverziju Neuberg-ove teoreme:

Ako se uoče dva trougla, $\triangle ABC$ sa stranama a, b, c (sl. 3), i trougao sa stranama $l_1\,(=a\cdot\overline{DA})$, $l_2\,(=b\cdot\overline{DB})$, $l_3\,(=c\cdot\overline{DC})$, tada se uvek može konstruisati $\triangle PTQ \sim \Delta ABC$, takav da rastojanja od neke tačke u njegovoj ravni do njegovih temena budu respektivno

$$\overline{DA}\left(=\frac{l_1}{a}\right),\quad \overline{DB}\left(=\frac{l_2}{b}\right),\quad \overline{DC}\left(=\frac{l_3}{c}\right)\quad (DA \leqslant DB \leqslant DC).$$

У раду[5] је показано како се може конструисати троугао PTQ.