PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 29 (1959)

O NEKIM NEJEDNAKOSTIMA

Dragoslav S. Mitrinović

1. Posmatrajmo funkciju

$$f(x) \equiv (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^r$$

$$\{a, b, c;\ p\ (\geqslant 1),\ q\ (\geqslant 1),\ r\ (\geqslant 1) \text{ realne konstante;} \quad a \neq b \neq c \neq a\}$$

i njen prvi izvod

$$f'(x) \equiv (x-a)^{p-1} (x-b)^{q-1} (x-c)^{r-1} \{(p+q+r)\, x^2 - [p(b+c)+q(c+a)+r(a+b)]\, x + (pbc+qca+rab)\}.$$

Pretpostavimo da je $a<b<c$, čime se ne umanjuje generalnost rezultata.

Funkcija $f(x)$ ima tri nule $x=a$, $x=b$, $x=c$.

Prema *Rolle*-ovoj teoremi između a i b nalazi se sledeća nula izvodne funkcije:

$$\frac{1}{2(p+q+r)} \{p(b+c)+q(c+a)+r(a+b) - [(p(b+c)+q(c+a)+r(a+b))^2 - 4(p+q+r)(pbc+qca+rab)]^{1/2}\}.$$

Između b i c nalazi se sledeća nula izvodne funkcije:

$$\frac{1}{2(p+q+r)} \{p(b+c)+q(c+a)+r(a+b) + [(p(b+c)+q(c+a)+r(a+b))^2 - 4(p+q+r)(pbc+qca+rab)]^{1/2}\}.$$

Kako su navedene nule izvodne funkcije, koje leže u intervalima (a, b) i (b, c), realne i različite, sigurno je

$$[p(b+c)+q(c+a)+r(a+b)]^2 - 4(p+q+r)(pbc+qca+rab) > 0.$$

Na osnovu ovog što prethodi imamo nejednakosti:

$$\begin{aligned}
2(p+q+r)\min(a, b, c) &< p(b+c)+q(c+a)+r(a+b) \\
&\quad - \{[p(b+c)+q(c+a)+r(a+b)]^2 - 4(p+q+r)(pbc+qca+rab)\}^{1/2} \\
&< 2(p+q+r)\,\mathrm{med}\,(a, b, c) \\
&< p(b+c)+q(c+a)+r(a+b) \\
&\quad + \{[p(b+c)+q(c+a)+r(a+b)]^2 - 4(p+q+r)(pbc+qca+rab)\}^{1/2} \\
&< 2(p+q+r)\max(a, b, c).
\end{aligned}$$

Sa med (a, b, c) označili smo onaj od brojeva a, b, c koji nije ni max (a, b, c) ni min (a, b, c).

2. Posmatrajmo sada funkciju

$$g(x) \equiv (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$
$$\equiv x^4 - (\Sigma a)\, x^3 + (\Sigma ab)\, x^2 - (\Sigma abc)\, x + abcd$$

i njen prvi izvod

$$g'(x) \equiv 4x^3 - 3(\Sigma a)\, x^2 + 2(\Sigma ab)\, x - \Sigma abc.$$

Σa, Σab, Σabc označavaju osnovne simetrične funkcije promenljivih a, b, c, d i to respektivno reda 1, 2, 3.

Polinom trećeg stepena $g'(x)$ ima sigurno sve tri nule realne i različite. Uslov da sve nule polinoma

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3$$

budu realne i različite glasi:

$$G^2 + 4H^3 < 0,$$

gde je

$$H \equiv a_0 a_2 - a_1^2, \quad G \equiv a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3.$$

U posmatranom slučaju izrazi H i G su oblika

$$H \equiv \frac{8}{3} \Sigma ab - (\Sigma a)^2,$$
$$G \equiv -16 \Sigma abc + 8(\Sigma a)(\Sigma ab) - 2(\Sigma a)^3.$$

Prema tome, izveli smo nejednakost

$$27\,[8\Sigma abc - 4(\Sigma a)(\Sigma ab) + (\Sigma a)^3]^2 + [8\Sigma ab - 3(\Sigma a)^2]^3 < 0,$$

odnosno

$$108(\Sigma abc)^2 - 9(\Sigma ab)^2(\Sigma a)^2 - 108\,\Sigma a\,\Sigma ab\,\Sigma abc$$
$$+ 27(\Sigma a)^3 \Sigma abc + 32(\Sigma ab)^3 < 0.$$

Odavde se dolazi do sledećih relacija:

1° Ako je $\Sigma a = 0$, tada imamo nejednakost

$$27(\Sigma abc)^2 + 8(\Sigma ab)^3 < 0.$$

2° Ako je $\Sigma ab = 0$, tada je

$$4(\Sigma abc)^2 + (\Sigma a)^3 \Sigma abc < 0.$$

3° Ako je $\Sigma abc = 0$, tada važi nejednakost

$$32\Sigma ab - 9(\Sigma a)^2 < 0.$$

3. Ako ovaj postupak za formiranje nejednakosti primenimo na funkciju

$$h(x) \equiv (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^r (x-d)^s$$

$$\{a, b, c, d \text{ realni različiti}, \quad p\,(\geqslant 1),\ q\,(\geqslant 1),\ r\,(\geqslant 1),\ s\,(\geqslant 1)\}$$

dobićemo jednu nejednakost koja će sadržati poslednju nejednakost kao partikularni slučaj.

Prvi izvod funkcije $h(x)$ ima oblik

$$h'(x) \equiv (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(x-c)^{r-1}(x-d)^{s-1}$$
$$\times \{p(x-b)(x-c)(x-d) + q(x-c)(x-d)(x-a)$$
$$+ r(x-d)(x-a)(x-b) + s(x-a)(x-b)(x-c)\}$$

odnosno

$$h'(x) \equiv (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(x-c)^{r-1}(x-d)^{s-1}$$
$$\times \{(p+q+r+s)x^3 - [p(b+c+d) + q(c+d+a) + r(d+a+b)$$
$$+ s(a+b+c)]x^2 + [p(cd+db+bc) + q(da+ac+cd) + r(ab+bd+da)$$
$$+ s(bc+ca+ab)]x - (pbcd + qcda + rdab + sabc)\}.$$

Polinom III stepena $P(x)$ koji se nalazi u vitičastim zagradama ima sigurno sve tri nule realne i različite, pa je

$$G^2 + 4H^3 < 0 \tag{1}$$

gde su izrazi

$$H \equiv a_0 a_2 - a_1^2, \quad G \equiv a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3$$

vezani za polinom

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3.$$

U ovom slučaju je

$$a_0 \equiv p+q+r+s$$
$$-3a_1 \equiv p(b+c+d) + q(c+d+a) + r(d+a+b) + s(a+b+c),$$
$$3a_2 \equiv p(cd+db+bc) + q(da+ac+cd) + r(ab+bd+da) + s(bc+ca+ab),$$
$$-a_3 \equiv pbcd + qcda + rdab + sabc.$$

Ako je, na primer,

$$p(b+c+d) + q(c+d+a) + r(d+a+b) + s(a+b+c) = 0,$$

tada (1) postaje

$$4a_0^3 a_2^3 + a_0^4 a_3^2 < 0,$$

odnosno

$$4a_2^3 + a_0 a_3^2 < 0 \qquad (\text{jer je } a_0 \equiv p+q+r+s > 0),$$

odnosno

$$4[p(cd+db+bc) + q(da+ac+cd) + r(ab+bd+da)$$
$$+ s(bc+ca+ab)]^3 - 27(p+q+r+s)(pbcd+qcda+rdab+sabc)^2 < 0.$$

Ako nule polinoma $P(x)$ označimo sa x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ i pretpostavimo da je

$$a < b < c < d,$$

tada imamo relaciju

$$a < x_1 < b < x_2 < c < x_3 < d,$$

gde su x_1, x_2, x_3 funkcije parametara p, q, r, s, a, b, c, d koje su određene *Cardano*-ovom formulom.

Résumé

SUR QUELQUES INÉGALITÉS

D. S. Mitrinović

1. On obtient, entre autres, l'inégalité suivante

$$108\,(\Sigma\, abc)^2 - 9\,(\Sigma\, ab)^2\,(\Sigma\, a)^2 - 108\,\Sigma\, a\,\Sigma\, ab\,\Sigma\, abc + 27\,(\Sigma\, a)^3\,\Sigma\, abc + 32\,(\Sigma\, ab)^3 < 0$$

avec

$$\Sigma\, a = a + b + c + d, \quad \Sigma\, ab = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$
$$\Sigma\, abc = abc + abd + acd + bcd,$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles différentes.

Cette inegalité renferme, comme cas particuliers, les inégalités que voici:

1° Si $\Sigma\, a = 0$, on a

$$27\,(\Sigma\, abc)^2 + 8\,(\Sigma\, ab)^3 < 0;$$

2° Si $\Sigma\, ab = 0$, on a

$$4\,(\Sigma\, abc)^2 + (\Sigma\, a)^3\,\Sigma\, abc < 0;$$

3° Si $\Sigma\, abc = 0$, on a

$$32\,\Sigma\, ab - 9\,(\Sigma\, a)^2 < 0.$$

2. On indique également l'inégalité simple

$$[p\,(b+c) + q\,(c+a) + r\,(a+b)]^2 - 4\,(p+q+r)\,(pbc + qca + rab) > 0,$$

où $p\,(\geqslant 1)$, $q\,(\geqslant 1)$, $r\,(\geqslant 1)$ sont des constantes réelles; a, b, c des constantes réelles différentes.

3. Soit mentionné encore le résultat suivant:

Dans le cas où l'on admet

$$p\,(b+c+d) + q\,(c+d+a) + r\,(d+a+b) + s\,(a+b+c) = 0,$$

on aura

$$4\,[p\,(cd+db+bc) + q\,(da+ac+cd) + r\,(ab+bd+da)$$
$$+ s\,(bc+ca+ab)]^3 - 27\,(p+q+r+s)\,(pbcd + qcda + rdab + sabc)^2 < 0.$$

Ici a, b, c, d désignent des constantes réelles différentes; p, q, r, s des constantes réelles $\geqslant 1$.