PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 24 (1959)

METODE REŠAVANJA NEODREĐENIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KOJE SE JAVLJAJU U TEORIJI ELASTICITETA, HIDRODINAMICI I ELEKTRONICI

Ivan Brandić

PREDGOVOR

U ovom radu tretira se problem rešavanja neodređenih diferencijalnih jednačina prvog i drugog reda sa dve nepoznate funkcije $y(x)$ i $z(x)$, i to u prvom redu jednačina koje se javljaju u teoriji elasticiteta, hidrodinamici, elektronici i nekim problemima tehnike.

Rešenja tih jednačina izražavaju se, prema širem shvatanju, usvojenom u radovima D. Mitrinovića, u obliku

$$y = f_1(x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, c_1, c_2 \ldots); \quad z = f_2(x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots),$$

gde su λ_ν proizvoljne funkcije promenljive x, a c_ν konstante.

Sam metod rešavanja osniva se na izvesnim osobinama relativnih izvoda M. Petrovića. U tom cilju je u glavi I izveden niz novih odnosa među relativnim izvodima, od kojih se u ovom radu najčešće primenjuju

$$\Delta_2(y) - \Delta_2(z) = \Delta_1\left(\frac{y}{z}\right) \Delta_1\left[yz\, \Delta_1\left(\frac{\dot{y}}{z}\right)\right]; \quad \frac{\Delta_k(y)}{\Delta_{k-1}(y)} + \Delta_1(y) = \Delta_1(y\, y^{(k-1)}),$$

kao i jedna teorema o rekurentnoj linearnoj jednačini oblika $\Delta_2(y) = f(x)$, koja se inače primenjuje kod proširivanja kruga integrabilnih nelinearnih jednačina.

U glavi II izvršena je najpre jedna elementarna klasifikacija neodređenih jednačina, uvođenjem pojma W-jednačina u kojima ne figurišu eksplicitno nepoznate funkcije, a njihovi izvodi javljaju se samo u obliku relativnih izvoda.

Posle toga izložena je metoda rešavanja linearnih W-jednačina prvog i drugog reda.

$$\Delta_1(y) + a_0\, \Delta_1(z) = a_1; \quad \Delta_2(y) + a_0\, \Delta_2(z) + a_1\, \Delta_1(y) + a_2\, \Delta_1(z) = a_3, \quad (a_\nu = a_\nu(x))$$

kao i kvazihomogenih W-jednačina prvog i drugog reda

$$P(x, \Delta_1(y), \Delta_1(z)) = Q(x, \Delta_1(y), \Delta_1(z)),$$

$$P(x, \Delta_1(y), \Delta_1(z), \Delta_2(y), \Delta_2(z)) = Q(x, \Delta_1(y), \Delta_1(z), \Delta_2(y), \Delta_2(z)),$$

gde su P i Q homogene funkcije različitog stepena u odnosu na relativne izvode koji u njima figurišu. Te jednačine se za $Q \equiv 0$ reduciraju na homogene W-jednačine.

Metode primenjene kod W-jednačina iskorišćene su, dalje, na rešavanje opštijih neodređenih jednačina oblika

$$\Delta_2(y) + a_0\, \Delta_2(z) + a_1\, \Delta_1(y) + a_2\, \Delta_1(z) = f(x, yz) \qquad (a_\nu = a_\nu(x))$$

gde funkcija $f(x, y, z)$ ispunjava izvesne uslove.

Izvedeni rezultati se primenjuju pri rešavanju neodređenih jednačina navedenih tipova iz teorije elasticiteta

$$\Delta_2(y) + (n^2-1)\,\Delta_2(z) = 0; \quad \Delta_1(y)\,\Delta_2(x) - \Delta_2(y)\,\Delta_1(x) = \frac{n^2-1}{z}\,\Delta_2(x) \qquad (n = \text{const});$$

iz hidrodinamike

$$\Delta_2(y) - \Delta_2(z) = h \quad (h - \text{const.}); \quad \Delta_2(y) - \Delta_2(z) = \frac{a}{z^2} + b \qquad (a, b = \text{const.});$$

iz tehnike

$$\Delta_2(y) - \Delta_2(z) - 2a\,\Delta_1(y) = 0 \qquad (a = \text{const.}).$$

Na kraju ove glave rešena je neodređena W-jednačina trećeg reda

$$\Delta_2(y) - \left[\frac{\Delta_3(z)}{\Delta_2(z)} + \Delta_1(z)\right]\Delta_1(y) + n^2\,\Delta_2(z) = 0,$$

koja se javlja u jednom važnom problemu teorije elasticiteta.

U glavi III primenjene su metode iz glave II kod izvođenja kriterijuma integrabilnosti sledećih važnih običnih nelinearnih jednačina.

1° diferencijalna jednačina $yy'' + y^2 f(x) = \varphi(x)$, koja se javlja u elektronici, 2° uopštene *Emden*-ove jednačine $y'' + f(x)\,y' = \varphi(x)\,y^n$, poznate iz teoriske fizike, 3° uopštene *Emden*-ove jednačine izotermičkih gasnih kugala $y'' + f(x)\,y' = \varphi(x)\,e^y$.

U V O D

Opšti oblik neodređene diferencijalne jednačine sa dve nepoznate funkcije $y(x)$ i $z(x)$ jeste

$$(1) \qquad F(x, y, y', \ldots, y^{(n)};\ z, z', \ldots, z^{(n)}) = 0 \qquad \left(y^{(\nu)} = \frac{d^{\nu} y}{d x^{\nu}},\ z^{(\nu)} = \frac{d^{\nu} z}{d x^{\nu}}\right)$$

gde je F proizvoljna funkcija naznačenih argumenata, a m i n prirodni brojevi. Jednačina (1) naziva se i *Monge*-ova jednačina.

Rešenje jednačine (1) pretstavlja svaki skup $\{y(x), z(x)\}$, koji datu jednačinu identično zadovoljava. Rešiti (1) znači odrediti sve skupove $\{y(x), z(x)\}$ sa navedenom osobinom.

Eksplicitnim rešenjem[1] jednačine (1) naziva se rešenje oblika

$$(2) \qquad x = \varphi_1(t, \vartheta, \vartheta', \ldots, \vartheta^{(p)}), \quad y = \varphi_2(t, \vartheta, \vartheta', \ldots, \vartheta^{(p)}), \quad z = \varphi_3(t, \vartheta, \vartheta', \ldots, \vartheta^{(p)}),$$

gde su φ_ν date funkcije naznačenih argumenata, t je jedan parametar, a ϑ proizvoljna p-puta diferencijabilna funkcija promenljive t.

Problem integracije neodređenih diferencijalnih jednačina u ovom radu je ograničen, uglavnom, na jednačine prvog i drugog reda sa dve nepoznate funkcije, $y(x)$ i $z(x)$.

Zbog toga je ovde iznesen pregled istoriskog razvoja samo onih *metoda koje se neposredno odnose na neodređene diferencijalne jednačine prvog i drugog reda sa dve nepoznate funkcije*, dok su metode rešavanja neodređenih jednačina višeg reda, kao i sistema neodređenih jednačina, samo registrovane.

Opšti oblik neodređene diferencijalne jednačine prvog reda sa nepoznatim funkcijama $y(x)$ i $z(x)$ je

$$(3) \qquad f(x, y, z, y', z') = 0 \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

Problem integracije (3) prvi je postavio i rešio *Monge*, [1], služeći se jednom čisto geometriskom interpretacijom, pomoću koje je uspostavio neposrednu vezu između (3) i jedne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

$$(4) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0\,,$$

koju je nazvao *adjungovanom jednačinom* jednačine (3).

On je pokazao da karakteristike integralnih površina adjungovane jednačine (4) pretstavljaju integralne krive jednačine (3) i da je, sem toga, i obvojnica tih karakteristika, tzv. povratna ivica[2] integralnih površina, integralna kriva jednačine (3).

Jednačina te povratne ivice se inače, izražava u obliku (2) i upravo iz ove geometriske interpretacije je i nastao *pojam eksplicitnog rešenja*.

---

[1] U francuskoj literaturi: *solution explicite*, u nemačkoj *integrallose Auflösung*, u ruskoj *безинтегральное выражение решениав*.

[2] *Sophus Lie* samo povratnu ivicu naziva integralnom krivom.

Pošto je *Monge*-ovom metodom u potpunosti rešen problem integracije neodređene diferencijalne jednačine prvog reda sa dve nepoznate funkcije, u idućoj fazi proučavane su neodređene jednačine sa više nepoznatih funkcija, kao i odgovarajući sistemi jednačina. Same metode su još uvek geometriskog karaktera, a rešenja se javljaju isključivo u ekspliciтnom obliku.

Od radova iz ove faze treba spomenuti metode *Serret*-a, [2], *Darboux*-a, [3[, i *Hadamard*-a, [4].

Opšti oblik neodredene diferencijalne jednačine drugog reda sa dve nepoznate funkcije je

$$f(x, y, z, y', z', y'', z'') = 0 \tag{5}$$

Jedno potpuno rešenje ove jednačine dao je *Goursat*, [5]. On primenjuje jednu geometrisku interpretaciju, sličnu *Monge*-ovoj, dovodeći postavljeni problem u vezu sa jednim linearnim sistemom parcijalnih jednačina drugog reda u involuciji. Međutim, i on se ograničuje isključivo na eksplicitna rešenja.

Polazeći sa istog stanovišta, *D. Hilbert*, [6], izvodi jednu teoremu kojom dokazuje da se rešenje jednačine

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 \tag{6}$$

ne može izraziti u obliku

$$x = \varphi_1(t, w, w_1, \ldots, w_r), \quad y = \varphi_2(t, w, w_1, \ldots, w_r), \quad z = \varphi_3(t, w, w_1, \ldots, w_r), \tag{7}$$

gde su φ_ν funkcije naznačenih argumenata, t je jedan parametar, w je proizvoljna funkcija od t, a $w_\nu = \dfrac{d^\nu w}{dt^\nu}$.

Izvedenu teoremu *Hilbert* uopštava primenjujući je na jednačinu $z' = F(x, y, z, y', y'')$ a *P. Zervos*, [7], na druge tipove neodređenih jednačina.

Iduću fazu u razvoju metoda rešavanja pretstavljaju radovi *E. Cartan*-a[1], u kojima se rešavanje sistema neodređenih jednačina dovodi u vezu sa svođenjem jednog sistema *Pfaff*-ovih jednačina na kanoničnu formu; zatim radovi *M. Vessiot*-a[2], u kojima se primenjuje jedna opštija teorija integracije koja se osniva na izvesnim infinitezimalnim transformacijama

Problem integracije neodređenih diferencijalnih jednačina shvaćen je znatno šire tek kad je njihova *primena u raznim naučnim i tehničkim disciplinama došla u jačoj meri do izražaja.* Tada se javlja potreba da se uspostave što je moguće opštije relacije među nepoznatim funkcijama, tako da data neodređena jednačina bude identično zadovoljena, bez obzira na koji način te funkcije figurišu u pomenutim relacijama. Na taj način postepeno se napušta i geometriska interpretacija rešenja, *kao i iznalaženje isključivo eksplicitnih rešenja.*

Te ideje čine osnovu radova *D. Mitrinovića*, koji ispituje, u prvom redu, neodređene jednačine koje se javljaju u primenama. On nalazi tri metode rešavanja u navedenom smislu, koje omogućuju da se obrazuju *rešenja datih neodređenih jednačina,* $\{y(x), z(x)\}$, *u čijem sklopu se javljaju proizvoljna funkcija promenljive* x *i proizvoljne konstante.*

Te metode, pokazane na pojedinim primerima, sastoje se u sledećem:

a) Data je neodređena jednačina, [8]

$$\frac{f''}{f} - \lambda(x)\frac{g''}{g} = \mu(x) \qquad (f = f(x), g = g(x), \lambda(x) \neq 0) \tag{8}$$

Jednačina (8) smenom

$$f = \exp\int F\,dx, \qquad g = \exp\int G\,dx \qquad (F = F(x), G = G(x)) \tag{9}$$

---

[1] *P. Zervos* Le problème, de Monge, Mémorial des sciences Math., t. III, p. 24–41, Paris, 1932.

[2] *P. Zervos*, ibid., p. 42–47.

postaje

$$\lambda(\lambda-1)G^2+(2\lambda\theta+\lambda')G+(\theta'+\theta^2-\mu)=0, \quad F-\lambda G=0 \tag{10}$$

odakle se nalazi

$$F=\frac{-2\theta-\lambda'\pm\Delta}{2(\lambda-1)}, \quad G=\frac{-2\lambda\theta-\lambda'\pm\Delta}{2\lambda(\lambda-1)}; \quad \Delta=[(2\lambda\theta+\lambda')^2-4\lambda(\lambda-1)(\theta'+\theta^2-\mu)]^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

Ovaj postupak se zatim primenjuje na svaku neodređenu jednačinu koja se smenom (9) svodi na oblik

$$\frac{dR}{dx}=S \quad (R=R(F,G,x), \quad S=S(F,G,x)) \tag{12}$$

Tada se funkcije F i G određuju iz relacija

$$R(F,G,x)=\theta(x), \quad S(F,G,x)=\theta'(x) \tag{13}$$

Neodređenu jednačinu sa navedenom osobinom *D. Mitrinović* naziva *E*-jednačinom, postavljajući u isto vreme jednu analogiju između jedne *E*-jednačine, kojoj pripada karakterističan skup (13) i jedne linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima, kojoj odgovara karakteristična jednačina.

b) Data je jednačina, (9)

$$\frac{y''}{y}=h_3\frac{z''}{z}+h_2\frac{1}{z_2}=h_1 \quad (h_\nu=\text{const.}) \tag{14}$$

Kad se u (14) uvede pretpostavka

$$y=T(z), \tag{15}$$

gde je T proizvoljna funkcija, (14) postaje

$$\frac{dp}{dz}+\frac{zT''}{zT'-h_3T}p=\frac{(h_1z^2+h_2)T}{z(zT'-h_3T)}p^{-1} \quad \left(p=\frac{dz}{dx}, T^{(\nu)}=\frac{d^\nu T}{dz^\nu}\right) \tag{16}$$

a to je *Bernoulli*-jeva jednačina čije je rešenje, naprimer

$$p=p(z,c_1) \quad (c_1=\text{const.}) \tag{17}$$

Iz $\dfrac{dz}{dx}=p(z,c_1)$ sleduje

$$\int_{z^0}^{z}\frac{dz}{p(z,c_1)}=x+c_2 \quad (c_2=\text{const.}) \tag{18}$$

gde je z_0 data podesno izabrana numerička konstanta.

Kad se u (18) izvrši naznačena kvadratura i zatim inverzija dobija se

$$z=z(x,c_1,c_2),$$

što zajedno sa (15) daje rešenje jednačine (14).

c) Data je jednačina, [10]

$$\frac{y''}{y}=h\frac{z''}{z} \quad (h=\text{parametar}) \tag{19}$$

Umesto (19) može se posmatrati skup jednačina

(20) $$\frac{z''}{z}=\Phi(x),\quad \frac{y''}{y}=h\,\Phi(x)\quad (\Phi=\text{proizvoljna funkcija})$$

Jednačine (20) obuhvaćene su jednom jednačinom

(21) $$\frac{d^2 u}{dx^2}=h\,u\,\Phi(x)$$

Prema tome, ako se (21) može integrisati za proizvoljno h, dobiju se i rešenja $\{y(x), z(x)\}$ jednačine (10).

U ovom radu se tretira problem rešavanja neodređenih diferencijalnih jednačina prvog i drugog reda sa dve nepoznate funkcije, i to u prvom redu jednačina koje se javljaju u raznim aktuelnim problemima nekih naučnih i tehničkih disciplina.

Primenjene metode zasnivaju se na izvesnim osobinama relativnih izvoda *M. Petrovića*, a sam pojam rešenja shvata se u širem smislu, kao u navedenim metodama *D. Mitrinovića*.

GLAVA I

M. Petrović, [11], uvodi pojam relativnog izvoda n-og reda funkcije $u=u\ (x)$ definicijom

$$(1) \qquad \Delta_u(u)=\frac{u^{(n)}}{u}, \qquad \left(u^{(n)}=\frac{d^n u}{dx^n}\right)$$

Relativan izvod je u ovom radu primenjen kao algoritam, u tom smislu što se na osnovu poznatih odnosa među relativnim izvodima, kao i nekih novih odnosa izvedenih u ovom poglavlju, diferencijalni izrazi koji figurišu u diferencijalnim jednačinama, transformišu u jednostavniji *kondenzovan oblik,* što dovodi ili neposredno do rešenja date diferencijalne jednačine, ili do izvesnih korisnih supstitucija.

1° Od mnogobrojnih odnosa među relativnim izvodima, do kojih dolazi *M. Petrović,* polazeći od (1), navodimo samo one koji su u ovom radu iskorišćeni.

Neka je $u_\nu=u_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ .\ .\ .\ ;$ m $=$ const.

$$(1.1) \quad \Delta_1(m)=0, \quad \Delta_1(mu)=\Delta_1(u), \quad \Delta_1(u^m)=m\Delta_1(u), \quad \Delta_2(u)=\Delta_1^1(u)+\Delta_1^2(u);$$

$$(1.2) \qquad \Delta_1(u_1u_2)=\Delta_1(u_1)+\Delta_1(u_2); \qquad \Delta_1\left(\frac{u_1}{u_2}\right)=\Delta_1(u_1)-\Delta_1(u_2);$$

$$(1.3) \qquad \Delta_1(\exp\int u dx)=\exp\int\Delta_1(u)\,dx=u.$$

2° Iz osnovne definicije neposredno se dolazi do sledećih odnosa, koje *M. Petrović* ne navodi, a koji omogućuju da se izvesni diferencijalni izrazi transformišu u kondenzovaniji oblik.[1]

(2.1) Odnosi u vezi sa relativnim izvodima prvog reda

$$(2) \qquad u_1+\Delta_1(u_2)=\Delta_1(u_2\exp\int u_1dx); \qquad u_1-\Delta_1(u_2)=\Delta_1\left(\frac{1}{u_2}\exp\int u_1\,dx\right):$$

$$(3) \quad u_1\Delta_1(u_2)+u_3=u_1\Delta_1\left(u_2\exp\int\frac{u_3}{u_1}dx\right); \quad u_1\Delta_1(u_2)-u_3=u_1\Delta_1\left[u_2\exp(-\int\frac{u_3}{u_1}dx)\right];$$

$$(4) \qquad u_1'+u_1u_2=u_1\Delta_1(u_1 exp\int u_2dx); \qquad u_1'-u_1u_2=u_1\Delta_1[u_1\exp(-\int u_2\,dx)]$$

---

[1]) Izvođenje navedenih odnosa je izostavljeno radi uštede u prostoru.

(2.2) Odnosi u vezi sa relativnim izvodima višeg reda

$$\Delta_2(u_1) - \Delta_2(u_2) = \Delta_1\left(\frac{u_1}{u_2}\right)\Delta_1\left[u_1 u_2 \Delta_1\left(\frac{u_1}{u_2}\right)\right]; \tag{5}$$

$$\Delta_k(u) = \Delta_{k-1}(u) + \Delta_1(u)\Delta_{k-1}(u) = \Delta_k(u)\,\Delta_1(u^{(k-1)}); \tag{6}$$

$$\frac{\Delta_k(u_1)}{\Delta_{k-1}(u_1)} + \Delta_1(u_2) = \Delta_1\left(u_2 u_1^{(k-1)}\right); \quad \frac{\Delta_k(u_1)}{\Delta_{k-1}(u_1)} - \Delta_1(u_2) = \Delta_1\left(\frac{u_1^{(k-1)}}{u_2}\right) \tag{7}$$

$$u_1 \Delta_{k-1}(u_2) + u_3\,\Delta_k(u_2) = u_3 \Delta_{k-1}(u_2)\,\Delta_1\left(u_2^{k-1}\, exp \int \frac{u_1}{u_3}\, dx\right); \tag{8}$$

$$m\,\Delta_{k-1}(u) + n\Delta_k(u) = n\,\Delta_{k-1}(u)\Delta_1\left[u^{(k-1)} exp \frac{mx}{n}\right], \quad (m,n = \text{const.}) \tag{9}$$

$$\Delta_k(u_1)\,\Delta_{k+1}(u_2) + \Delta_{k+1}(u_1)\;\Delta_k(u_2) = \Delta_k(u_1)\,\Delta_k(u_2)\,\Delta_1\,(u_1^{(k)}\,u_2^{(k)}); \tag{10}$$

$$\Delta_k(u_1)\,\Delta_{k+1}(u_2) - \Delta_{k+1}(u_1)\,\Delta_k(u_2) = \Delta_k(u_1)\,\Delta_k(u_2)\,\Delta_1\left(\frac{u_2^{(k)}}{u_1^{(k)}}\right) \tag{11}$$

3° Pri transformisanju relativnih izvoda prvog i drugog reda uvođenjem nove nezavisno promenljive i nove funkcije dolazi se do sledećih rezultata

(3.1) Data je funkcija $y = y(x)$. Supstitucijom

$$x = \alpha(t), \quad y = z\beta(t)$$

dobije se

$$\Delta_1(y)_x = \frac{1}{\alpha'}\,\Delta_1(\beta z)\,; \quad \Delta_2(y)_x = \frac{1}{\alpha'^2}\left[\Delta_1(z)\,\Delta_1\left(\frac{\beta^2 z'}{\alpha'}\right) + \Delta_1(\beta)\,\Delta_1\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\right] \tag{12}$$

(3.2) Ako se uvede samo nova nezavisno promenljiva t, smenom $x = \alpha(t)$, iz (12) se nalazi

$$\Delta_1(y)_x = \frac{1}{\alpha'}\,\Delta_1(y); \quad \Delta_2(y)_x = \frac{1}{\alpha'_2}\,\Delta_1(y)\,\Delta_1\left(\frac{y'}{\alpha'}\right). \tag{13}$$

4° U ovom paragrafu iznosi se jedna teorema koja omogućuje formiranje beskonačnog niza integrabilnih jednačina istog oblika na osnovu jedne date integrabilne jednačine, i to tako da se opšti integrali novih jednačina nalaze iz opšteg integrala date jednačine bez ikakvih suplementarnih kvadratura[1].

Ovaj problem se iznosi kao metod za proširivanje kruga integrabilnih jednačina kad se kriterijum integrabilnosti svodi na linearnu jednačinu oblika $\Delta_2(u) = f(x)$, što će biti iskorišćeno u glavi III.

---

[1] I. Bandić, On a Recurrent Linear Differential Equation of the Second Order, Glasnik mat.—fiz. i astron., Ser. II, T. 12, Zagreb 1958.

Teorema. Svakoj integrabilnoj linearnoj homogenoj diferencijalnoj jednačini drugog reda

$$\Delta_2(y) = \Phi, \quad (\Phi = \Phi(x))$$

odgovara integrabilna jednačina

$$\Delta_2(y_k) = \Phi + \lambda_k, \quad (k = 1,2,3, \ldots)$$

gde je
$$\lambda_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} \left\{ \Delta_2 \left[\frac{1}{p\sqrt{X_\nu - \Delta_2(p)}} \right] \right\} - k\Delta_2(p)$$

a $p = p(x)$ proizvoljna funkcija.

Funkcije X_ν formiraju se po rekurentnom obrascu

$$X_\nu = X_{\nu-1} + \Delta_2 \left[\frac{1}{p\sqrt{X_{\nu-1} - \Delta_2(p)}} \right] - \Delta_2(p); \quad (X_o = \Phi)$$

Opšti integrali tih jednačina vezani su relacijom

$$y_k = y \prod_{\nu=o}^{k-1} \left[\frac{\Delta_1\left(\frac{y_\nu}{p}\right)}{\sqrt{X_\nu - \Delta_2(p)}} \right]; \quad (y_o = y)$$

(4.1) Ovom teoremom obuhvaćena je, između ostalog, poznata teorema *M. Petrovića*, [12], o *Riccati*-jevoj jednačini; zatim teorema *Darboux*-a, [13], koja se odnosi na jednačinu linearnog oblika

$$z'' = [\vartheta(z) + h]\, z, \quad (h = \text{const.})$$

kao i niz stavova *D. Mitrinovića*, [14], kojima su obuhvaćene obe navedene teoreme.

GLAVA II

Mnogobrojni problemi teorije elastičnosti, hidrodinamike, geometrije i drugih naučnih oblasti u kojima se primenjuju matematičke metode i aparatura, svode se u krajnjoj analizi na jednu ili više neodređenih diferencijalnih jednačina.

Već je rečeno da za takve probleme nije od osnovne važnosti da se rešenja odgovarajućih neodređenih diferencijalnih jednačina izražavaju u tzv. eksplicitnom obliku, nego da se odrede što je moguće opštiji skupovi vrednosti $\{y(x), z(x)\}$ koji datu jednačinu identično zadovoljavaju.

Pri iznalaženju takvih rešenja postupa se obično na sledeći način: polazi se od unapred datog oblika jedne od nepoznatih funkcifa, $y(x)$ ili $z(x)$, pa se iz dobijene obične diferencijalne jednačine određuje ona druga funkcija. Međutim, na ovakav se način dolazi do veoma ograničenog broja partikularnih rešenja $\{y(x), z(x)\}$, što je i bio razlog da su pomenuti problemi primenjenih nauka malo nap edovali.

U metodama koje je uveo *D. Mitrinović* rešenje date neodređene jednačine, $\{y(x), z(x)\}$, uvek sadrži jednu proizvoljnu funkciju promenljive x, i izvestan broj konstanata, a rezultati do kojih se tim metodama dolazi već se primenjuju u raznim naučnim i tehničkim oblastima.

Ove metode primenjene su u radovima D. Mitrinovića na neodređene diferencijalne jednačine oblika

$$\frac{y''}{y} - a_0(x)\frac{z''}{z} = a,(x), \tag{1}$$

$$\frac{y''}{y} + a\frac{z''}{z} = o, \quad (a = \text{const.}) \tag{2}$$

$$\frac{y''}{y} - \frac{z''}{z} = h, \quad (h = \text{const.}) \tag{3}$$

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{z'''}{z''} + \frac{z'}{z}\right)\frac{y'}{y} + a\frac{z'}{z} = o, \quad (a = \text{const.}) \tag{4}$$

$$\frac{y''}{y} = \frac{z''}{z} + \frac{a}{z^2} + b; \quad (a = \text{const.}, \ b = \text{const.}) \tag{5}$$

$$\frac{y''}{y} - 2a\frac{y'}{y} - \frac{z''}{z} = 0; \quad (a = \text{const.}) \tag{6}$$

Jednačina (1) i njene varijante (2) i (3), kao i jednačina (4) javljaju se kod rešavanja nekih važnih problema teorije elasticiteta, jednačina (5) u jednom problemu hidrodinamike, a (6) u jednom pitanju tehnike.

Ovde je izložena jedna metoda rešavanja izvesnih klasa neodređenih diferencijalnih jednačina prvog i drugog reda, i to u prvom redu onih koje se i u primenama najčešće javljaju. Tom metodom su, između ostalog, obuhvaćene i jednačine (1) do (6).

Osnovne karakteristike izložene metode su

a) dosledna primena relativnih izvoda prvog i drugog reda kao kondenzatora diferencijalnih izraza;

b) jedinstvenost postupaka pri rešavanju neodređenih diferencijalnih jednačina raznih tipova;

c) izračunavanje rešenja u obliku

$$y=f_1(x,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,c_1,c_2,\ldots),\quad z=f_2(x,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,c_1,c_2,\ldots),$$

gde su $\lambda_\nu\equiv\lambda_\nu(x)$ proizvoljne funkcije, a c_ν integracione konstante, i gde se funkcije $\lambda_\nu(x)$ javljaju u proizvoljnom obliku u funkcijama f_ν.

Sam način izražavanja rešenja pretstavlja znatnu olakšicu kod praktičnih primena, a prisustvo proizvoljnih funkcija i integracionih konstanata čini da su rešenja dovoljno opšta.

1° Opšti oblik neodređene diferencijalne jednačine sa dve nepoznate funkcije, $y(x)$ i $z(x)$ jeste

$$f(x,y,y',\ldots,y^{(m)};z,z',\ldots,z^{(n)})=0,$$

gde su m i n prirodni brojevi.

Uzevši u obzir da je $u^{(k)}=u\,\Delta_k(u)$, $u\equiv u(x)$, ova se jednačina uvek može svesti na jednačinu oblika

$$f(x,y,\Delta_1(y),\ldots,\Delta_m(y);\ z,\Delta_1(z),\ldots,\Delta_n(z))=0,$$

u kojoj se izvodi nepoznatih funkcija javljaju samo u obliku relativnih izvoda

Prema tome, opšti oblik neodređene diferencijalne jednačine prvog reda je

$$f(x,y,z,\Delta_1(y),\Delta_1(z))=0, \tag{7}$$

a jednačina drugog reda

$$f(x,y,z,\Delta_1(y),\Delta_1(z),\Delta_2(y),\Delta_2(z))=0 \tag{8}$$

2° Jednačinu (7), odnosno (8), *u kojoj nepoznate funkcije y i z ne figurišu eksplicitno nazvaćemo W-jednačinom prvog, odnosno drugog reda.*

Primenom pomenute metode ovde se rešavaju a) linearne W-jednačine prvog i drugog reda, b) homogene i kvazihomogene W-jednačine prvog i drugog reda, c) neki opštiji oblici jednačina (7) i (8) u kojima se javljaju eksplicitno i funkcije y i z.

Na kraju je, primera radi, pokazana neposredna primena relativnih izvoda, kao kondenzatora, pri rešavanju jedne W-jednačine višeg reda, koja igra važnu ulogu u teoriji elasticiteta.

(2.1) Neodređena jednačina oblika

(9) $$\Delta_1(y)+a_0\Delta_1(z)=a_1 \quad (a_\nu \equiv a_\nu(x))$$

jeste linearna W-jednačina prvog reda.

Na isti način, opšti oblik linearne W-jednačine drugog reda je

(10) $$\Delta_2(y)+a_0\Delta_2(z)+a_1\Delta_1(y)+a_2\Delta_1(z)=a_3 \quad (a_\nu=a_\nu(x))$$

W-jednačine obika (9) i (10) uvek se rešavaju kvadraturama, a njihova rešenja se izražavaju u eksplicitnom obliku. U tim rešenjima figuriše jedna proizvoljna funkcija i dve integracione konstante.

(2. 1. 1) Kad se od obe strane jednačine (9) oduzme $\Delta_1(z)$ dobije se

$$\Delta_1(y)-\Delta_1(z)=a_1-(1+a_0)\Delta_1(z),$$

ili

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)=a_1-(1+a_0)\Delta_1(z)$$

Uvodeći proizvoljnu funkciju $\lambda\equiv\lambda(x)$ supstitucijom

(11) $$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)=\lambda, \text{ t.j. } y=Az\exp\int\lambda\,dx \quad (A=\text{const.}),$$

poslednja jednačina postaje

$$\lambda=a_1-(1+a_0)\Delta_1(z)$$

odakle je

(12) $$z=B\exp\int\frac{a_1-\lambda}{1+a_0}dx \quad (B=\text{const.});$$

smenom ove vrednosti u (11) dobiju se, konačno, rešenja jenačine (9)

$$y=c_1\exp\int\frac{a_0\lambda+a_1}{1+a_0}dx,\quad z=c_2\exp\int\frac{a_1-\lambda}{1+a_0}dx \quad (c_\nu=\text{const.})$$

(2. 1. 1. 1) Izložena metoda se ne može primeniti kad je $a_0\equiv-1$. No u tom slučaju se iz (9) nalazi neposredno

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)=a_1, \text{ t. j. } y=cz\exp\int a_1\,dx$$

(2. 1. 2) Ako se od obe strane linearne W-jednačine drugog reda (10) oduzme izraz $\Delta_2(z)+a_1\Delta_1(z)$, dobije se

$$\Delta_2(y)-\Delta_2(z)+a_1[\Delta_1(y)-\Delta_1(z)]=a_3-(1+a_0)\Delta_2(z)-(a_1+a_2)\Delta_1(z),$$

ili, s obzirom na (5) iz glave I

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\Delta_1\left[yz\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\right]+a_1\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)=a_3-(1+a_0)\Delta_2(z)-(a_1+a_2)\Delta_1(z),$$

odnosno

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\cdot\Delta_1\left[yz\exp\int a_1\,dx\cdot\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\right]=a_3-(1+a_0)\,\Delta_2(z)-(a_1+a_2)\,\Delta_1(z)$$

Uvodeći proizvoljnu funkciju $\lambda\equiv\lambda(x)$ smenom (11) iz poslednje jednačine izlazi

$$(1+a_0)\,\Delta_2(z)+(2\lambda+a_1+a_2)\,\Delta_1(z)+(\lambda'+\lambda^2+a_1\lambda-a_3)=0$$

Ovo je linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda koja se supstitucijom

$$z=Bw\exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{2\lambda+a_1+a_2}{1+a_0}\,dx\right),\quad (w=w(x)) \tag{13}$$

transformiše u kanoničan oblik

$$\Delta_2(w)=\frac{\alpha_0\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_2}{4\,(1+a_0)^2}, \tag{14}$$

gde je

$$\begin{gathered}\alpha_0=-4a_0;\quad \alpha_1=4\,(a_2-a_0a_1-a_0');\\ \alpha_2=(a_1+a_2)^2+4\,(1+a_0)\,a_3+2\,(1+a_0)\,(a_1+a_2)\,\Delta_1\left(\frac{a_1+a_2}{1+a_0}\right)\end{gathered} \tag{15}$$

Iz (11) i (13) se y i z izražavaju kao funkcije od w i λ.

$$\begin{gathered}y=c_1w\exp\frac{1}{2}\int\frac{2a_0\lambda-a_1-a_2}{1+a_0}\,dx,\\ z=c_2w\exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{2\lambda+a_1+a_2}{1+a_0}\,dx\right);\quad (c_\nu=\text{const.})\end{gathered} \tag{16}$$

pri čemu su w i λ vezani relacijom (14).

Međutim, iz te relacije, koja pretstavlja kvadratnu jednačinu u odnosu na λ, može se λ uvek izraziti kao funkcija od w.

(2. 1. 4) U slučaju $a_0\equiv-1$ jednačina (10) glasi

$$\Delta_2(y)-\Delta_2(z)+a_1\,\Delta_1(y)+a_2\,\Delta_1(z)=a_3, \tag{17}$$

a rešenje se ne može izraziti u obliku (16)

Međutim, oduzimanjem izraza $a_1\Delta_1(z)$ od obe strane (17) nalazi se

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\Delta_1\left[yz\exp\int a_1\,dx\cdot\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\right]=a_3-(a_1+a_2)\,\Delta_1(z)$$

Odatle se smenom (11) dolazi do jednačine

$$2\lambda\,\Delta_1(z)+(\lambda'+\lambda^2+a_1\lambda)=a_3-(a_1+a_2)\,\Delta_1(z)$$

Ovo je diferencijalna jednačina prvog reda

$$(2\lambda + a_1 + a_2)\,\Delta_1(z) = a_3 - (\lambda' + \lambda^2 + a_1\lambda),$$

čije je rešenje

$$z = B\exp\int \frac{a_3 - (\lambda' + \lambda^2 + a_1\lambda)}{2\lambda + a_1 + a_2}\,dx \quad (B = \text{const.})$$

Uzevši u obzir i (11) konačno se dolazi do rešenja jednačine (17)

$$(18)\qquad \begin{aligned} y &= c_1 \exp\int \frac{a_3 - \lambda' + \lambda^2 + a_2\lambda}{2\lambda + a_1 + a_2}\,dx, \\ z &= c_2 \exp\int \frac{a_3 - (\lambda' + \lambda^2 + a_1\lambda)}{2\lambda + a_1 + a_2}\,dx \quad (c_\nu = \text{const.}) \end{aligned}$$

(2. 2) Rezultati iz dva prethodna paragrafa ovde se primenjuju na rešavanje specijalnih oblika linearne W-jednačine drugog reda, na jednačine (1), (2), (3) i (6).

(2. 2. 1) Kad se u (10) uvede uslov $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, dobije se

$$(19)\qquad \Delta_2(y) + a_0\,\Delta_2(z) = a_3, \quad (a_0 \neq -1)$$

a to je jednačina oblika (1).

Jednačina (19) pretstavlja uopštenu neodređenu diferencijalnu jednačinu drugog reda iz (2.2.2) koja igra važnu ulogu u teoriji elasticiteta.

Jednačinu (19) uvodi *D. Mitrinović*, [8], a rešava je metodom prikazanom u uvodu ovog rada (jednačina (30)).

Međutim, rešenje te jednačine se sada dobije neposredno, na osnovu (16)

$$(20)\qquad y = c_1 w \exp\int \frac{a_o\lambda}{1 + a_o}\,dx, \quad z = c_2 \exp\left(-\int \frac{\lambda}{1 + a_o}\,dx\right)$$

gde je, prema (14) i (15)

$$(21)\qquad a_o\lambda^2 + a_0'\lambda + (1 + a_o)\left[(1 + a_o)\Delta_2(w) - a_3\right] = 0$$

(2.2.2) Jedan specijalni oblik jednačine (19) jeste

$$(22)\qquad \Delta_2(y) + a\,\Delta_2(z) = 0, \quad (a = \text{konst.})$$

gde je $a_o \equiv a$, $a_2 \equiv 0$, a to je jednačina oblika (2).

Jednačina (22) se javlja u jednom problemu teorije elasticiteta koji su rešavali *C. Truesdell* i *P. Neményi*, [15].

Oni postavljaju jednačinu oblika

$$(23)\qquad y'' + (n-1)\frac{z^n}{z}y = F(x, z), \qquad (n = \text{const.})$$

gde je F data funkcija naznačenih argumenata, a rešavaju je na taj način što određuju y za razne unapred date vrednosti z.

Međutim, jednačina (23) je obična linearna nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda po y, a odgovarajuća homogena jednačina

$$\frac{y''}{y}+(n^2-1)\frac{z''}{z}=0 \tag{24}$$

može se smatrati kao neodređena jednačina oblika (22).

Rešenje jednačine (24) je, na osnovu (16), (14) i (15)

$$y=c_1 w\exp\left[\mp\sqrt{1-n^2}\int[\Delta_2(w)]^{1/2}dx\right],\quad z=c_2 w\exp\left[\mp\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\int[\Delta_2(w)]^{1/2}dx\right] \tag{25}$$

gde treba uzeti jednovremeno oba gornja, ili oba donja znaka.

Prema tome ako je z dato drugom jednačinom (25), onda prva jednačina (25) pretstavlja jedan partikularan integral, y_1, homogene jednačine (24). U tom slučaju se opšti integral jednačine (23) dobija iz relacije

$$y=y_1\left[c_1+\int\frac{c_2+\int y_1 F(x,z)\,dx}{y_1^2}\,dx\right],$$

gde su y_1 i z dati sistemom (25).

(2.2.3) Specijalni slučaj jednačine (19) je i jednačina

$$\Delta_2(y)-\Delta_2(z)=h,\quad (h=\text{const.}) \tag{26}$$

gde je $a_o\equiv-1$, $a_3\equiv h$, a to je jednačina oblika (3), koja se, inače javlja u jednom problemu hidrodinamike.

Rešenje jednačine (26) nalazi se iz (2.1.4)

$$y=\frac{c_1}{\sqrt{\lambda}}\exp\frac{1}{2}\int\left(\frac{h}{\lambda}+\lambda\right)dx,\quad z=\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}}\exp\frac{1}{2}\int\left(\frac{h}{\lambda}-\lambda\right)dx$$

(2.2.4) Kad se u (10) uvede pretpostavka $a_o\equiv-1$, $a_1\equiv-2a$, $(a=\text{const.})$, $a_2\equiv 0$, $a_3\equiv 0$, dobije se jednačina (6)

$$\Delta_2(y)-\Delta_2(z)-2a\Delta_1(y)=0, \tag{27}$$

koja se javlja u jednom problemu tehnike, a rešavaju je *N. R. Granolsson* i *D. Mitrinović*.

Rešenje jednačine (27) dobija se iz (2.1.4)

$$y=\frac{c_1}{(\lambda-a)^{1/2}}\exp\frac{1}{2}\int\frac{\lambda^2}{\lambda-a}dx,\quad z=\frac{c_2}{(\lambda-a)^{1/2}}\exp\frac{1}{2}\int\frac{\lambda(\lambda-2a)}{a-\lambda}dx$$

(2.3) Jednu klasu integrabilnih W-jednačina pretstavljaju *kvazihomogene i homogene W-jednačine prvog i drugog reda.*

Kvazihomogenom W-jednačinom prvog reda naziva se *jednačina oblika*

$$P(x,\Delta_1(y),\Delta_1(z))=Q(x,\Delta_1(y),\Delta_1(z)), \tag{28}$$

a kvazihomogenom W-jednačinom drugom reda

(29) $$P(x, \Delta_1(y), \Delta_1(z), \Delta_2(y), \Delta_2(z)(= Q(x_1 \Delta_1(y), \Delta_1(z), \Delta_2(y), \Delta_2(z)),$$

gde su P i Q homogene funkcije u odnosu na relativne izvode koji u njima figurišu, i to, u opštem slučaju, P m-og, a Q n-og stepena.

U slučaju $Q \equiv 0$ jednačine (28) i (29) pretstavljaju homogene W-jednačine prvog, odnosno drugog reda.

(2.3.1). U ovom paragrafu je izloženo rešavanje homogenih i kvazihomogenih W-jednačina prvog reda.

a) Opšti oblik homogene W-jednačine prvog reda je

(30) $$P(x, \Delta_1(y), \Delta_1(z)) = 0,$$

gde je P homogena funkcija u odnosu na $\Delta_1(y)$ i $\Delta_1(z)$, u opštem slučaju m-og stepena.

Iz definicije funkcije P sleduje

$$[\Delta_1(z)]^m P\left(x, \frac{\Delta_1(y)}{\Delta_1(z)}, 1\right) = 0,$$

a odatle, pošto $\Delta_1(z) \neq 0$

$$P\left(x, \frac{\Delta_1(y)}{\Delta_1(z)}, 1\right) = 0$$

Neka je jedno rešenje ove jednačine

$$\frac{\Delta_1(y)}{\Delta_1(z)} = \varphi(x)$$

Odatle je

(31) $$\Delta_1(y) = \varphi(x) \Delta_1(z),$$

a kad se od obe strane oduzme $\Delta_1(z)$

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right) = [\varphi(x) - 1] \Delta_1(z)$$

Uvođenjem proizvoljne funkcije $\lambda = \lambda(x)$ supstitucijom (11) poslednja jednačina postaje

$$\lambda = [\varphi(x) - 1] \Delta_1(z),$$

odakle je

$$z = c_2 \exp \int \frac{\lambda}{\varphi(x) - 1} dx$$

Iz (31) se nalazi

$$y = c_1 \exp \int \varphi(x) \Delta_1(z) dx,$$

ili

$$y = c_1 \exp \int \frac{\lambda \varphi(x)}{\varphi(x) - 1} dx,$$

pa je rešenje jednačine (30)

$$y = c_1 \exp \int \frac{\lambda \varphi(x)}{\varphi(x) - 1} dx, \quad z = c_2 \exp \int \frac{\lambda}{\varphi(x) - 1} dx.$$

b) Kad se u kvazihomogenu *W*-jednačinu prvog reda

$$P(x, \Delta_1(y), \Delta_1(z)) = Q(x, \Delta_1(y), \Delta_1(z)),$$

gde je P m-og, a Q n-og stepena u odnosu na $\Delta_1(y)$ i $\Delta_1(z)$, uvede proizvoljna funkcija $\lambda \equiv \lambda(x)$ smenom

(32) $\Delta_1(y) = \lambda \Delta_1(z)$, dobije se jednačina: $[\Delta_1(z)]^{m-n} = F(x)$, $F(x) = \dfrac{P(x, \lambda, 1)}{Q(x, \lambda, 1}$

iz koje se nalazi $m-n$ relacije oblika

$$\Delta_1(z) = [F(x)]^{\frac{1}{m-n}}$$

odnosno

$$z = c_2 \exp \int [F(x)]^{\frac{1}{m-n}}, dx \tag{33}$$

Uzevši u obzir i (32), rešenje date kvazihomogene jednačine sastoji se iz $m-n$ jednakosti

$$y = c_1 \exp \int \lambda [F(x)]^{\frac{1}{m-n}} dx, \quad z = c_2 \exp \int [F(x)]^{\frac{1}{m-n}} dx; \quad F(x) = \frac{P(x, \lambda, 1)}{Q(x, \lambda, 1)} \tag{34}$$

vodeći računa o $m-n$ determinacija stepena $[F(x)]^{\frac{1}{m-n}}$

Primer: Neka je $m = 3$, $n = 1$, naprimer,

$$a_o \Delta_1^3(y) + a_1 \Delta_1(y) \Delta_1^2(z) = b_o \Delta_1(y) + b_1 \Delta_1(z).$$

Rešenje te jednačine je, na osnovu (34)

$$y = c_1 \exp[\pm \int \lambda \sqrt{F(x)}\, dx], \quad z = c_2 \exp[\pm \int \sqrt{F(x)}\, dx]; \quad F(x) = \frac{b_o \lambda + b_1}{\lambda (a_o \lambda^2 + a_1)};$$

gde treba istovremeno uzeti oba gornja odnosno oba donja znaka.

(2.3.2) Data je kvazihomogena *W*-jednačina drugog reda

$$P(x, \Delta_1(y), \Delta_2(y), \Delta_1(z), \Delta_2(z)) = Q(x, \Delta_1(y), \Delta_2(y), \Delta_1(z), \Delta_2(z)), \tag{35}$$

u kojoj su P i Q homogene funkcije u odnosu na sve relativne izvode, i to P m-og, Q n-og stepena.

Jednačina (35) rešava se kvadraturama samo za neke specijalne oblike funkcija P i Q, a metod koji se koristi pri rešavanju, može se primeniti i za rešavanje homogene W-jednačine drugog reda, koja se dobija iz (35) kad je, naprimer, $Q\equiv 0$.

Umesto nepoznatih funkcija y i z uvode se tri funkcije, $\lambda=\lambda(x)$, $\mu=\mu(x)$, $\vartheta=\vartheta(x)$ smenom

(36) $$\Delta_2(y)=\lambda\,\Delta_1(z)\,;\;\Delta_2(z)=\mu\,\Delta_1(y)\,;\;\Delta_1(z)=\vartheta\,\Delta_1(y)$$

tako da se (35) javlja u obliku

(37) $$[\Delta_1(y)]^{m-n}P(x_1,1,\lambda\vartheta,\vartheta,\mu)=Q(x,1,\lambda\vartheta,\vartheta,\mu)$$

Međutim, iz prve dve jednačine (36) sleduje

$$\Delta_1(y')=\lambda\frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(y)},\quad \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(y)}\Delta_1(z')=\mu$$

ili, s obzirom na treću jednačinu (36)

$$\Delta_1(y')=\lambda\vartheta,\quad \Delta_1(z')=\frac{\mu}{\vartheta},$$

odakle je

(38) $$y=c_1\int(\exp\int\lambda\vartheta dx)\,dx,\quad z=c_2\int\left(\exp\int\frac{\mu}{\vartheta}\,dx\right)dx;\quad (c_1=\text{const.})$$

Pošto je, dalje, iz treće jednačine (36)

(39) $$z=\exp\int\vartheta\,\Delta_1(y)\,dx,$$

to se iz upoređenja sa prvom jednačinom (38) nalazi

$$c_2\int\left(\exp\int\frac{\mu}{\vartheta}\,dx\right)dx=\exp\int\vartheta\,\Delta_1(y)\,dx,$$

a odatle

$$\mu=\vartheta\,\Delta_1[\vartheta\,\Delta_1(y)\,\exp\int\vartheta\,\Delta_1(y)dx]\,,$$

ili

(40) $$\mu=\vartheta\,[\Delta_1(\vartheta)+\lambda\,\vartheta+(\vartheta-1)\,\Delta_1(y)]\,,$$

gde je y dato prvom jednačinom (38)

(2.3.3) Uvodeći umesto λ novu funkciju $\varphi=\varphi(x)$ supstitucijom

$$\int(\exp\int\lambda\,\vartheta\,dx)\,dx=\exp\int\varphi\,dx,$$

odnosno

(41) $$\lambda=\frac{1}{\vartheta}\,(\varphi+\Delta_1(\varphi)),$$

jednačina (40) postaje

(42) $$\mu=\vartheta\,(\vartheta\,\varphi+\Delta_1(\vartheta\,\varphi)),$$

a jednačine (38)

$$y = c_1 \exp \int \varphi \, dx, \quad z = c_2 \exp \int \vartheta \varphi \, dx \tag{43}$$

pri čemu funkcije ϑ i φ zadovoljavaju sledeći uslov, izveden iz (37)

$$\begin{aligned} \varphi^{m-n} P(x, 1, \varphi + \Delta_1(\varphi), \vartheta, \vartheta(\vartheta\varphi + \Delta_1(\vartheta\varphi))) = \\ = Q(x, 1, \varphi + \Delta_1(\varphi), \vartheta, \vartheta(\vartheta\varphi + \Delta_1(\varphi\vartheta))) \end{aligned} \tag{44}$$

Prema tome, rešenje kvazihomogene W-jednačine (35) dato je sistemom (43), ako funkcije φ i ϑ zadovoljavaju uslov (44).

Rešenje $\{y(x), z(x)\}$ date jednačine izražava se, dakle, pomoću dve proizvoljne konstante i jedne proizvoljne funkcije, naravno pod pretpostavkom da se iz (44) jedna od funkcija, $\varphi(x)$ ili $\vartheta(x)$, može izraziti kao funkcija druge.

(2.3.4) To je moguće, između ostalog, kada jednačina (35) ne sadrži relativan izvod $\Delta_2(z)$. U tom slučaju (35) glasi

$$P(x, \Delta_1(y), \Delta_2(y), \Delta_1(z)) = Q(x, \Delta_1(y), \Delta_2(y), \Delta_1(z)); \tag{45}$$

njeno rešenje je

$$y = c_1 \exp \int \varphi \, dx, \quad z = c_2 \exp \int \vartheta \varphi \, dx \tag{46}$$

pri čemu funkcije ϑ i φ zadovoljavaju uslov

$$\varphi^{m-n} P(x, 1, \varphi + \Delta_1(\varphi), \vartheta) = Q(x, 1, \varphi + \Delta_1(\varphi), \vartheta), \tag{47}$$

iz koga se ϑ može izraziti kao funkcija od φ.

Primer. Neka je $m = 2$, $n = 1$, naprimer,

$$\Delta_1(z)\Delta_2(y) + a_0 \Delta_1^2(y) + a_1 \Delta_1^2(z) = b_0 \Delta_1(y) + b_1 \Delta_1(z), \quad (a_\nu = a_\nu(x), b_\nu = b_\nu(x))$$

Rešenje ove jednačine je dato relacijom (46), gde ϑ i φ zadovoljavaju uslov (47), koji se sada svodi na kvadratnu jednačinu

$$a_1 \varphi \vartheta^2 + (\varphi' + \varphi^2 - b_1)\vartheta + (a_o \varphi - b_o) = 0$$

(2.4) Jednačina (35) se u izvesnim slučajevima rešava kvadraturama i kad u njoj figuriše relativan izvod $\Delta_2(z)$.

Tako, *P. Neményi* i *C. Truesdell*, [15], ispitujući jednačinu (24) za razne specijalne oblike funkcije z, nalaze da je za svestranije proučavanje jednog problema teorije elasticiteta korisnije da se z uzme za nezavisno promenljivu a x za funkciju. Na taj način se (24) transformiše u jednačinu

$$\Delta_1(y)\Delta_2(x) - \Delta_2(y)\Delta_1(x) = \frac{1-n^2}{z}\Delta_2(x), \tag{48}$$

gde su relativni izvodi uzeti po argumentu z, a to je kvazihomogena W-jednačina drugog reda.

Jednačina (48) se može rešiti neposredno, koristeći se obrascem (17) iz glave I.

Primenom tog obrasca na (48) dobije se

$$\Delta_1(x)\Delta_1(y)\Delta_1\left(\frac{x'}{y'}\right)=\frac{1-n^2}{z}\cdot\Delta_1(x)\Delta_1(x'),$$

ili, počto $\Delta_1(x)\neq 0$

(49) $$\Delta_1(y)\Delta_1\left(\frac{x'}{y'}\right)=\frac{1-n^2}{z}\cdot\Delta_1(x')$$

Uvodeći proizvoljnu funkciju $\lambda=\lambda(z)$ smenom

(50) $$\Delta_1\left(\frac{x'}{y'}\right)=\lambda,\quad x'=Ay'\exp\int\lambda dz,\quad (A=\text{const.})$$

iz (49) se nalazi

$$\lambda\Delta_1(y)=\frac{1-n^2}{z}\Delta_1(y'\exp\int\lambda dz).$$

Kad se uvede nova nepoznata funkcija $\theta=\theta(z)$ smenom

(51) $$\Delta_1(y)=\theta,$$

poslednja jednačina postaje

(52) $$\theta'=\left(\frac{\lambda z}{1-n^2}-1\right)\theta^2-\lambda\theta$$

a to je *Bernoulli*-jeva jednačina, čiji je opšti integral

(53) $$\theta=\mu[c+\int\left(1-\frac{\lambda z}{1-n^2}\right)\mu dz]^{-1},\quad \mu=\exp(-\int\lambda dz)$$

Iz (51) i (50) se, konačno, nalazi rešenje jednačine (48)

$$y=c_1\exp\int\theta dz,\quad x=c_1\int(\theta\exp\int(\lambda+\theta)dz)\,dz+c_2$$

gde je θ dato relacijom (53).

3° Metoda primenjena pri rešavanju *W*-jednačina može se primeniti i na izvesne specijalne tipove neodređenih diferencijalnih jednačina prvog i drugog reda, u kojima figurišu eksplicitno i nepoznate funkcije y i z.

(3.1) Takva je, naprimer, neodređena diferencijalna jednačina prvog reda

(54) $$\Delta_1(y)+a_o\Delta_1(z)=f(x,y,z),\quad (a_o=a_o(x))$$

Kad se od obe strane oduzme $\Delta_1(z)$ dobije se

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)=f(x,y,z)-(1+a_o)\Delta_1(z)$$

Uvodeći proizvoljnu funkciju $\lambda\equiv\lambda(x)$ supstitucijom (11) iz poslednje jednačine proizilazi

(55) $$(1+a_o)\Delta_1(z)=\varphi(x,z)+\lambda,\quad \varphi(x,z)=f(x,Az\exp\int\lambda dx,z),\quad (A=\text{const}).$$

Neka je $z = z(x, \lambda, c_2)$ opšti integral ove jednačine. Tada je rešenje neodređene jednačine (54), na osnovu (11)

(56) $$y = c_1 z(x, \lambda, c_2) \exp \int \lambda dx, \quad z = z(x, \lambda, c_2)$$

Prema tome neodređena jednačina (54) rešava se kvadraturama u isto vreme kad i obična diferencijalna jednačina prvog reda (55). To znači da se podesnim izborom funkcije $f(x,y,z)$ rešavanje neodređene jednačine (54) može svesti na integrisanje poznatih tipova običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, naprimer

a) Neka je $f(x, y, z)$ homogena funkcija po y i z stepena m, t. j.

$$f(x, y, z) = z^m f\left(x, \frac{y}{z}, 1\right)$$

ili, s obzirom na (11)

$$\varphi(x, z) = z^m \psi(z); \quad \psi(x) = f(x, A \exp \int \lambda\, dx, 1);$$

na osnovu toga (55) se javlja u obliku

$$(1 + a_0)\, \Delta_1(z) = z^m \psi(x) - \lambda,$$

a to je *Bernoulli*-jeva jednačina čiji je opšti integral

(57) $$z = \mu \left[m \left(c_2 - \int \frac{\psi(x)\, \mu^m}{1 + a_0} dx \right) \right]^{-\frac{1}{m}}; \quad \mu = \exp\left(- \int \frac{\lambda}{1 + a_0} dx \right)$$

Rešenje neodređene jednačine (54) u ovom slučaju dato je jednačinom (56) i (57)

b) Neodređena jednačina

$$\Delta_1(y) + a_0 \Delta_1(z) = \frac{z}{y^2}(b_0 y^2 + b_1); \quad (a_0 \equiv a_0(x),\ b_\nu \equiv b_\nu(x))$$

svodi se, prema (55) na jednačinu

$$(1 + a_0)\, \Delta_1(z) = \frac{A^2 b_0 z^2 \exp 2 \int \lambda\, dx + b_1}{A^2 z \exp 2 \int \lambda\, dx} - \lambda,$$

a to je *Riccati*-jeva jednačina

$$z' = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2,$$

u kojoj je

$$\alpha_0 = \frac{b_0}{1 + a_0}, \quad \alpha_1 = - \frac{\lambda}{1 + a_0}, \quad \alpha_2 = \frac{b_1}{A^2 (1 + a^0)} \exp(-2 \int \lambda\, dx)$$

(3.2) Na isti način može se odrediti kriterijum integrabilnosti neodređene jednačine drugog reda oblika

(58) $$\Delta_2(y) + a_0 \Delta_2(z) + a_1 \Delta_1(y) + a_2 \Delta_1(z) = f(x, y, z), \quad (a_\nu \equiv a_\nu(x))$$

Ako se od obe strane ove jednačine oduzme izraz $\Delta_2(z)+a_1\Delta_1(z)$ dobije se

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\Delta_1\left[yz\exp\int a_1\,dx.\,\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\right]=f(x,y,z)-(a_1+a_2)\,\Delta_1(z)-(1+a_o)\,\Delta_2(z)$$

Uvođenjem proizvoljne funkcije $\lambda=\lambda(x)$ smenom (11) ova jednačina postaje

$$(1+a_o)\,\Delta_2(z)+(2\lambda+a_1+a_2)\Delta_1(z)-[\lambda'+\lambda^2+a_1\lambda-\varphi(x,z)]=0, \tag{59}$$

gde je

$$\varphi(x,z)=f(x,Az\exp\textstyle\int\lambda dx,z),\quad (A=\text{const.}) \tag{60}$$

Prema tome, neodređena jednačina (58) integrabilna je u isto vreme kad i nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda (59).

(3.2.1) Jedan slučaj integrabilnosti jednačine (58) dobije se, naprimer pri uslovu

$$a_o\equiv-1,\quad f(x,y,z)=\theta(x)+F(y,z)\psi(x), \tag{61}$$

gde su $\theta(x)$ i $\psi(x)$ proizvoljne funkcije, a $F(y,z)$ homogena funkcija u odnosu na y i z. Neka je stepen homogenosti te funkcije m. Тада je

$$\varphi(x,z)=\theta(x)+z^m\varepsilon(x),\quad \varepsilon(x)=\psi(x)F(A\exp\textstyle\int\lambda dy,\,1)$$

a jednačina (59) glasi

$$(2\lambda+a_1+a_2)z'=z^{m+1}\varepsilon(x)+z[\theta(x)-(\lambda'+\lambda^2+a_1\lambda)]$$

To je *Bernoulli*-jeva jednačina čiji je opšti integral

$$z=\mu\left[m\left(c_2-\int\frac{\varepsilon(x)\mu^m}{2\lambda+a_1+a_2}dx\right)\right]^{-\frac{1}{m}},\quad \mu=\exp\int\frac{\theta(x)-(\lambda'+\lambda^2+a_1\lambda)}{2\lambda+a_1+a_2}dx \tag{62}$$

Prema tome, rešenje jednačine (58) je s obzirom na (11) i (62)

$$y=c_1z\exp\int\lambda dx,\quad z=\mu\left[m\left(c_2-\int\frac{\varepsilon(x)\mu^m}{2\lambda+a_1+a_2}dx\right)\right]^{-\frac{1}{m}}, \tag{63}$$

gde je μ dato relacijom (62).

(3.2.1) Jedan poznat integrabilan slučaj jednačine (58) jeste jednačina oblika (5)

$$\Delta_2(y)-\Delta_2(z)=\frac{a}{z^2}+b,\quad (a=\text{const.},\ b=\text{const.}) \tag{64}$$

u kojoj je

$$a_0\equiv-1,\quad a_1\equiv0,\quad a_2\equiv0,\quad F(y,z)=\frac{a}{z^2},\quad \theta(x)\equiv b,\quad \psi(x)\equiv1.$$

Jednačinu (64), koja se inače javlja u jednom opštijem problemu hidrodinamike, ispituju *E. Höiland, E. Palm, A. Eliassen, E. Riis,* [16], no nalaze svega dva integrabilna slučaja

$$\frac{v''}{v}+h=\text{const.},\qquad \frac{v''}{v}+h=e^{-2z}+\text{const.}$$

D. Mitrinović, [9], pokazao je da je (64) integrabilno u beskonačno mnogo slučajeva, služeći se metodom izloženom u uvodu (jednačina (37)).

Međutim, jedno dovoljno opšte rešenje jednačine (64) nalazi se neposredno iz jednačine (63)

$$y=c_1 z\exp.\lambda dx,\qquad z=\mu\left(c_2+a\int\frac{dx}{\lambda\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \mu=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\exp\frac{1}{2}\int\left(\frac{b}{\lambda}-\lambda\right)dx$$

4° U ovom paragrafu prikazana je neposredna primena relativnih izvoda kao kondenzatora diferencijalnih izraza pri rešavanju neodređene W-jednačine oblika

$$\frac{F''}{F}-\left(\frac{f'''}{f''}+\frac{f'}{f}\right)\frac{F'}{F}+n^2\frac{f''}{f}=0, \tag{65}$$

gde su F i f nepoznate funkcije promenljive x, a n prirodan broj.

C. Truesdell je u svojoj doktorskoj tezi, [17] rešavajući jedan problem teorije elastičnosti, postavio jednačinu oblika

$$F''-\left(\frac{f'''}{f''}+\frac{f'}{f}\right)F'+n^2\frac{f''}{f}F=h(f,x), \tag{66}$$

koja pretstavlja običnu nehomogenu linearnu jednačinu drugog reda u odnosu na nepoznatu funkciju F, a koju je ispitivao za razne specijalne vrednosti funkcije $f=f(x)$.

Međutim, jednačina (65) je homogena linearna jednačina koja odgovara jednačini (66), što znači da se za svako partikularno rešenje jednačine (65) može odrediti opšti integral jednačine (66).

Prema tome, zadatak se svodi na rešavanje neodređene jednačine (65).

D. Mitrinović, [18], je dao jednu metodu rešavanja te jednačine. Jedno njegovo rešenje sadrži tri proizvoljne konstante i jednu potpuno proizvoljnu funkciju, a izražava se dvema kvadraturama i dvema inverzijama promenljivih, što u izvesnim slučajevima otežava eksplicitno izražavanje rešenja $\{F,f\}$.

Ovde je pokazan jedan način za određivanje rešenja jednačine (65) u eksplicitnom obliku, bez inverzije promenljivih, oslanjajući se na osobine relativnih izvoda izloženih u glavi I.

(4.1) Jednačina (65) se pomoću relativnih izvoda izražava u obliku

$$\Delta_2(F)-\left[\frac{\Delta_3(f)}{\Delta_2(f)}+\Delta_1(f)\right]\Delta_1(F)+n^2\Delta_2(f)=0$$

Na osnovu obrasca (9) iz glave I sleduje

$$\frac{\Delta_3(f)}{\Delta_2(f)}+\Delta_1(f)=\Delta_1(ff'')=\Delta_1[f^2\Delta_2(f)],$$

tako da poslednja jednačina postaje

$$\Delta_2(F)-\Delta_1[f^2\Delta_2(f)]\,\Delta_1(F)+n^2\Delta_2(f)=0,$$

ili

$$\Delta_1'(F)+\Delta_1^2(F)-\Delta_1[f^2\Delta_2(f)]\Delta_1(F)+n^2\Delta_2(f)=0$$

Odatle se, dalje, dobije

$$\Delta_1(F)\{\Delta_1[\Delta_1(F)]+\Delta_1(F)-\Delta_1[f^2\Delta_2(f)]\}=-n^2\Delta_2(f),$$

odnosno

$$\Delta_1\left[\frac{f^2\Delta_2(f)}{F\Delta_1(F)}\right]=n^2\frac{\Delta_2(f)}{\Delta_1(F)} \tag{67}$$

Uvodeći funkciju $\varepsilon=\varepsilon(x)$ supstitucijom

$$\frac{\Delta_2(f)}{\Delta_1(F)}=\varepsilon,$$

Jednačina (67) se svodi na sistem jednačina

$$\Delta_1\left(\frac{f^2}{F}\varepsilon\right)=n^2\varepsilon;\quad \Delta_2(f)=\varepsilon\Delta_1(F) \tag{68}$$

gde ε igra ulogu parametra.

Iz prve jednačine tog sistema se nalazi

$$f^2=F\eta,\quad \eta=\frac{c}{\varepsilon}\exp n^2\int\varepsilon dx, \tag{69}$$

odakle se dobije relativnim diferenciranjem

$$\Delta_1(f)=\frac{1}{2}[\Delta_1(F)+\Delta_1(\eta)]$$

Smenom te vrednosti u drugoj jednačini (68) dolazi se do jednačine

$$\Delta_1'(F)=-\frac{1}{2}\Delta_1^2(F)+[2\varepsilon-\Delta_1(\eta)]\,\Delta_1(F)-[\Delta_2'(\eta)+\frac{1}{2}\Delta_1'(\eta)],$$

koja se supstitucijom

$$F=\frac{c_1 w^2}{\eta}\exp 2\int\varepsilon\,dx,\quad (c_1=\text{const.},\ w=w(x)) \tag{70}$$

transformiše u linearnu jednačinu

$$\Delta_2(w)=(1-n^2)\,\varepsilon^2,$$

iz koje se dobije

$$\varepsilon = \left[\frac{\Delta_2(w)}{1-n^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{71}$$

Ako se ε iz (71) smeni u (70), a zatim i u (69), dolazi se do sledećih relacija u kojima su f i F izraženi kao funkcije od proizvoljne funkcije w

$$f = \sqrt{c_1}\, w\theta; \quad F = c_2 w^2 \theta^{2-n^2}\theta'; \quad \theta = \exp \int \left[\frac{\Delta_2(w)}{1-n^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx \tag{72}$$

Prema tome, jedno rešenje $\{f, F\}$ jednačine (65) sadrži jednu proizvoljnu funkciju promenljive x i dve konstante, a izražava se eksplicitno i to jednom kvadraturom.

Primeri:

1. Ako je $w = a \sin bx$, $(a = \text{const.}$, $b = \text{const.})$, iz (72) se dobije

$$f = c_1 e^{kx} \sin bx; \quad F = c_2 e^{(2-n^2)kx} \sin bx; \quad k = b\,(n^2-1)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Za $w = e^x$ se nalazi

$$f = c_1 e^{kx}, \quad F = c_2 e^{k_1 x}; \quad k = 1 + (1-n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k_1 = 2 + (2-n^2)(1-n^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

GLAVA III

Pri rešavanju neodređenih diferencijalnih jednačina najčešće se primenjuju metode rešavanja običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina, što je i razumljivo s obzirom da su te metode svestrano razrađene.

Međutim, u izvesnim slučajevima s uspehom se rešava i suprotan zadatak.

Polazeći od date integrabilne neodređene jednačine, naprimer, neodređene jednačine drugog reda

$$F(x, y, z, \Delta_1(y), \Delta_1(z), \Delta_2(y), \Delta_2(z)) = 0, \tag{1}$$

čije je rešenje, primenom metoda karakterističnih za neodređene jednačine, recimo metoda iz glave II, izraženo u obliku

$$y = f_1(x, \lambda, a_1, a_2), \quad z = f_2(x, \lambda, a_1, a_2); \quad (a_\nu = \text{const.}, \ \lambda = \lambda(x)) \tag{2}$$

može se u izvesnim slučajevima odrediti opšti integral one obične diferencijalne jednačine drugog reda, koje se dobije iz (1) kad se jedna od nepoznatih funkcija smatra parametrom.

a) Ako je jednačina (1) linearna, naprimer, u odnosu na $y(x)$, onda prva jednačina (2) pretstavlja njen partikularan integral, a druga izražava kriterijum integrabilnosti te jednačine.

Odatle se, zatim, neposredno nalazi i njen opšti integral.

b) Ako jednačina (1) nije linearna u odnosu na $y(x)$, odnosno $z(x)$, njeno rešenje se u izvesnim slučajevima može izraziti, sem u obliku (2), i u obliku

$$\varphi(x, y, z, c_1, c_2) = 0, \quad (c_\nu = \text{const.}) \tag{3}$$

a to rešenje pretstavlja, očevidno, opšti integral obične diferencijalre jednačine drugog reda (1), u kojoj se naprimer $z(x)$ smatra datim parametrom.

Ovaj postupak je u idućim paragrafima primenjen na neke *obične diferencijalne jednačine drugog reda koje se, inače, javljaju u raznim problemima tehnike, teoriske fizike i astronomije.*

1° Linearnu diferencijalnu jednačinu četvrtog reda

$$f(x)(y^{(IV)} - 2a^2 y'' + a^4 y) + 2f'(x)(y''' - a^2 y') = 0, \quad (a = \text{const.}) \tag{4}$$

rešavao je *M. R. Gran Olsson,* [19]. On je (4) najpre smenom promenljivih transformisao u linearnu jednačinu drugog reda

$$(v'' - 2av')f(x) - vf''(x) = 0, \tag{5}$$

a zatim je našao da se rešava kvadraturama kad je $f(x) = Ax + B$, ($A = \text{const.}$, $B = \text{const.}$).

D. Mitrinović, [20], daje dve metode iznalaženja rešenja kvadraturama, pri čemu dobijena rešenja zavise od jedne proizvoljne funkcije, a zatim ispituje slučajeve kad se rešenja izražavaju pomoću raznih poznatih specijalnih funkcija (*Bessel*-a, *Weber*-a, *Legendre*-a, itd.)

Ovde se polazi od jednačine (5) kao neodređene jednačine sa dve nepoznate funkcije $v(x)$ i $f(x)$.

Ta se jednačina može izraziti u obliku

$$\Delta_2(v) - \Delta_2(f) - 2a\Delta_1(v) = 0 \tag{6}$$

a to je jednačina oblika (6) iz glave II. Njeno je rešenje

$$v = \frac{A}{(\lambda - a)^{1/2}} \exp \frac{1}{2}\int \frac{\lambda^2}{\lambda - a}dx; \; f = \frac{B}{(\lambda - a)^{1/2}} \exp \frac{1}{2}\int \frac{\lambda(\lambda - 2a)}{a - \lambda}dx; \; (A, B = \text{const.}) \tag{7}$$

Međutim, prva jednačina (7) pretstavlja jedno partikularno rešenje linearne jednačine (5), u kojoj je $f(x)$ dato drugom relacijom (7).

Opšti integral jednačine (5) je u tom slučaju

$$v = v_1 \left(c_1 + c_2 \int \frac{e^{2ax}}{v_1^2} dx \right)$$

gde je v_1 dato prvom relacijom (7).

2° Diferencijalna jednačina

$$yy'' + y^2 f(x) = \varphi(x) \tag{8}$$

ispitana je samo u malom broju specijalnih slučajeva.

Tako, *F. Mertens*, [21], i *W. Wirtinger*, [22], određuju rešenje (8) razvijanjem u redove, i to za slučajeve $f(x) = 0$, $\varphi(x) = ax$ i $\varphi(x) = ax^2$.

J. Müller, [23], rešava slučaj $f(x) = 1$; $\varphi(x) = ax + b$ primenom jedne grafičke metode.

Jedno opštije rešenje daje *T. Leko*, [24], nalazeći da se (8) rešava kvadraturama kad $f(x)$ i $\varphi(x)$ zadovoljavaju uslov

$$2\varphi\varphi'' = 4f\varphi^2 + 3\varphi'^2$$

U osnovi do istog rezultata dolazi *I. Bandić*, [25], tretirajući jednačinu (8) sa jednog drugog stanovišta.

Ovde je najpre formirana jedna neodređena diferencijalna jednačina drugog reda koja se svodi na običnu diferencijalnu jednačinu oblika (8), kad se u njoj jedna od nepoznatih funkcija smatra datim parametrom.

Zatim je izveden uslov kad se jedno rešenje te neodređene jednačine izražava u obliku (3), čime je određen i opšti integral odgovarajuće obične jednačine (8). Na kraju je iznesen jedan postupak za formiranje beskonačnog niza integrabilnih jednačina (8) na osnovu teoreme iz (4) u glavi I.

(2.1) Data je neodređena diferencijalna jednačina drugog reda

$$\Delta_2(y) - \Delta_2(z) = \frac{a^2 z^m}{y^2}, \quad (a = \text{const.}) \tag{9}$$

čija se rešenja nalaze neposredno na osnovu metoda iz (3.2), glava II

$$y = A\, z \exp \int \lambda\, dx$$

$$\left. z = \mu \left[(2-m) \left(\frac{a^2}{2A^2} \int \frac{\mu^m}{\exp \int \lambda\, dx}\, dx + B \right) \right]^{\frac{1}{2-m}}, \right\} \quad \begin{array}{l} \mu = (\lambda \exp \int \lambda\, dx)^{-\frac{1}{2}} \\ A = \text{const.},\ B = \text{const.} \end{array}$$

(2.2) Međutim, jedno rešenje jednačine (9) može se izraziti u obliku (3). Kad se u (9), odnosno u jednačini

$$\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right) \cdot \Delta_1\left[y z\, \Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\right] = \frac{a^2 z^m}{y^2}$$

uvede nova nezavisno promenljiva t i nova nepoznata funkcija $\eta \equiv \eta(t)$ supstitucijom

$$t = \int [z(x)]^m\, dx; \quad y = \eta\, \beta(t) \tag{10}$$

poslednja jednačina se javlja, na osnovu (20) iz glave I, u obliku

$$\Delta_1\left(\frac{\beta\eta}{z}\right) \Delta_1\left[\beta \eta z^{1+m} \Delta_1\left(\frac{\beta\eta}{z}\right)\right] = \frac{a^2}{\beta^2 z^m \eta^2}$$

Ako se, dalje, pretpostavi

$$\beta = a z^{-\frac{m}{2}}, \quad (z \equiv z(t)) \tag{11}$$

dobije se jednačina

$$\Delta_1\left[\eta z^{-\left(1+\frac{m}{2}\right)}\right] \cdot \Delta_1\left\{\eta z^{1+\frac{m}{2}} \Delta_1\left[\eta z^{-\left(1+\frac{m}{2}\right)}\right]\right\} = \frac{1}{\eta^2},$$

koja se za $m = -2$ reducira na integrabilnu jednačinu

$$\Delta_2(\eta) = \frac{1}{\eta^2}$$

čiji je opšti integral

$$\int (c_1 + 2 \ln \eta)^{-1/2}\, d\eta = t + c_2 \tag{12}$$

Jednačina (9) za $m = -2$ glasi

$$\Delta_2(y) - \Delta_2(z) = \frac{a^2}{y^2 z^2} \tag{13}$$

a jedno njeno rešenje, oblika (3), nalazi se iz (10) i (11),

$$y = a\eta z \tag{14}$$

gde je, na osnovu (10) i (12)

$$\int (c_1 + 2\, l n \eta)^{-1/2} d\eta = c_2 + \int \frac{dx}{z^2} \tag{15}$$

(2.2.1) Ako se u (13) $z = z(x)$ smatra parametrom, dobije se obična linearna diferencijalna jednačina oblika (8)

$$yy'' - y^2 \Delta_2(z) = \frac{a^2}{z^2} \tag{16}$$

Upoređujući koeficijente jednačine (8) i (16), i uzevši u obzir (14) i (15), dolazi se konačno, do sledećeg rezultata.

(2.3) Diferencijalna jednačina

$$yy'' + y^2 f(x) = \varphi(x) \tag{17}$$

rešava se kvadraturama pri uslovu

$$f(x) = -\Delta_2(z), \quad \varphi(x) = \frac{a^2}{z^2}; \quad (z = z(x), \ a = \text{const.}) \tag{18}$$

Opšti integral jednačine (17) je u tom slučaju

$$y = a\eta z, \tag{19}$$

gde je η dato relacijom

$$\int (c_1 + 2\, l n \eta)^{-1/2} d\eta = c_2 + \int \frac{dx}{z^2} \tag{20}$$

(2.4) Rezultati iz (2.3) omogućuju rešavanje dva zadatka: a) formiranje integrabilnih oblika jednačine (17) bez unapred datog ograničenja njenih koeficijenata, b) formiranje integrabilnih jednačina (17) kad je jedan od koeficijenata, $f(x)$, $\varphi(x)$, unapred dat.

(2.4.1) Rešenje zadatka pod a) proističe neposredno iz (2.3) jer se polazeći od proizvoljno izabrane funkcije $z(x)$ dolazi neposredno do integrabilne jednačine (17)

$$yy'' - y^2 \Delta_2(z) = \frac{a^2}{z^2} \tag{21}$$

Primer. Ako je $z = mx + n$, ($m = \text{const.}$, $n = \text{const.}$), dobije se $\Delta_2(z) = 0$, tako da (21) postaje

$$yy'' = \frac{a^2}{(mx+n)^2}$$

Njen opšti integral je, na osnovu (19) i (20)

$$y = a\eta\,(mx+n); \ \int (c_1 + 2\, l n \eta)^{-1/2} d\eta = c_2 - \frac{1}{m(mx+n)}$$

(2.4.2) Slučaj kad je unapred dat koeficijent $\varphi(x)$ u osnovi se slaže s prethodnim zadatkom, jer se $f(x)$ nalazi neposredno iz (18), pa se (17) javlja u obliku

(22)
$$yy'' - y^2\Delta_2\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\right) = \varphi(x)$$

Primer. Neka je $\varphi(x) = k^2x^{2m}$, ($k = $const.). Iz (18) se nalazi

$$f(x) = -\Delta_2\left(\frac{1}{kx^m}\right) = \frac{m(m+1)}{x^2},$$

tako da (22) postaje

$$x^2yy'' - m(m+1)y^2 = k^2x^{2(m+1)}$$

Opšti integral ove jednačine je, prema (19) i (20)

$$y = \frac{a^2\eta}{kx^m}; \int (c_1 + 2ln\eta)^{-1/2}d\eta = c_2 + \frac{k^2}{(2m+1)a^2}x^{2m+1}$$

(2.4.3) Međutim, ako je unapred dat koeficijent $f(x)$, onda mora biti integrabilna i jednačina

$$\Delta_2(z) = -f(x),$$

jer se samo uz taj uslov može odrediti $\varphi(x)$ iz (18).

U tom slučaju integrabilna jednačina (17) glasi

(23)
$$yy'' + y^2f(x) = \frac{a^2}{z^2}$$

gde z pretstavja jedno rešenje jednačine

(24)
$$\Delta_2(z) = -f(x)$$

Primer

Neka je $f(x) = m$, ($m = $const.). Jednačina (24) postaje

$$\Delta_2(z) = -m,$$

a jedno njeno rešenje

a) za $m < o$, $z = e^{x\sqrt{m}}$, b) za $m > o$, $z = \sin x\sqrt{m}$

U slučaju a) jednačina (23) glasi

$$yy'' + m\,y^2 = a^2e^{-2x\sqrt{m}},$$

a njen opšti integral

$$y = a\eta\, e^{x\sqrt{m}}; \int (c_1 + 2\,ln\,\eta)^{-1/2}d\eta = c_2 - \frac{1}{2\sqrt{m}}e^{-2xm}$$

U slučaju b) iz (23) se nalazi

$$yy'' + my^2 = a^2 \operatorname{cosec}^2 x\sqrt{m},$$

a njen opšti integral

$$y = a\eta \sin x\sqrt{m}; \quad \int (c_1 + 2\ln\eta)^{-1/2} d\eta = c_2 - \frac{1}{\sqrt{m}} \operatorname{cotg} x\sqrt{m}.$$

(2.5) Koristeći se teoremom iz 4°, glava I, o jednoj rekurentnoj homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini drugog reda, može se za svaki integrabilan oblik jednačine (23), uz uslov (24), formirati po jedan beskonačan niz integrabilnih jednačina istog oblika.

Kad se u (23) stavi $f(x) = -\Phi(x)$, dobije se jednačina

(25) $$yy'' - y^2 \Phi(x) = \frac{a^2}{z^2},$$

a uslov (24) postaje

(26) $$\Delta_2(z) = \Phi(x)$$

Uz pretpostavku da je jednačina (26) integrabilna i da je $z(x)$ jedno njeno rešenje, a na osnovu pomenute teoreme, sleduje da je integrabilna i svaka jednačina

(27) $$y_k y_k'' - y_k^2 \Phi_k(x) = \frac{a^2}{z_k^2}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

pri čemu je

(28) $$\Delta_2(z_k) = \Phi_k(x), \quad \Phi_k(x) = \Phi(x) + \lambda_k,$$

gde je

(29) $$\lambda_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} \left\{ \Delta_2 \left[\frac{1}{p\sqrt{X_\nu - \Delta_2(p)}} \right] \right\} - k\,\Delta_2(p);$$

Funkcije X_k obrazuju se po rekurentnom obrascu

(30) $$X_k = X_{k-1} + \Delta_2 \left[\frac{1}{p\sqrt{X_{k-1} - \Delta_2(p)}} \right] - \Delta_2(p)$$

a funkcije z_k nalaze se iz relacije

(31) $$z_k = z \prod_{\nu=0}^{k-1} \left[\frac{\Delta_1\left(\frac{z_\nu}{p}\right)}{\sqrt{X_\nu - \Delta_2(p)}} \right]; \quad (z_0 = z, \; X_0 = \Phi(x))$$

Opšti integrali jednačina (27) dobiju se iz (19) i (20)

(32) $$y_k = a\eta_k z_k,$$

gde je

(33) $$\int (c_1 + 2\ln\eta_k)^{-1/2} d\eta_k = c_2 + \int \frac{dx}{z_k^2}$$

Primer. Radi jednostavnosti se uzima $p \equiv \text{const}$, što znači da se jednačine (29), (30) i (31) javljaju u prostijem obliku

$$\lambda_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[\Delta_2 \left(\frac{1}{\sqrt{X_\nu}} \right) \right] \quad (X_0 = \Phi) \tag{34}$$

$$X_k = X_{k-1} + \Delta_2 \left(\frac{1}{\sqrt{X_{k-1}}} \right), \tag{35}$$

$$z_k = z \prod_{\nu=0}^{k-1} \left[\frac{\Delta_1 (z_\nu)}{\sqrt{X_\nu}} \right], \quad (z_0 = z) \tag{36}$$

Od jednačina (27) biće obrazovana samo prva, za $k = 1$

a) Ako se u (26) uvede

$$\Phi(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2},$$

dobije se

$$z = \sqrt{x^2+1},$$

tako da se (25) javlja u obliku

$$y y'' - \frac{y^2}{(x^2+1)^2} = \frac{a^2}{x^2+1}; \tag{37}$$

opšti integral ove jednačine je

$$y = a\eta \sqrt{x^2+1}, \quad \int (c_1 + 2 ln\, \eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta = c_2 + \operatorname{arc\,tg} x$$

b) Na osnovu (34), (35) i (36) nalazi se za $k = 1$

$$\lambda_1 = \frac{2}{x^2+1}, \quad x_1 = \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}, \quad z_1 = x \sqrt{x^2+1},$$

tako da (27) postaje

$$y_1 y_1'' - \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} y_1^2 = \frac{a^2}{x^2(x^2+1)}; \tag{38}$$

opšti integral jednačine (38) je

$$y_1 = a\eta_1 x \sqrt{x^2+1}, \quad \int (c_1 + 2 ln\, \eta_1)^{-\frac{1}{2}} d\eta_1 = c_2 - \left(\frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg} x \right)$$

3° Druga nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda koja se rešava metodama primenjenim kod neodređenih diferencijalnih jednačina jeste uopštena *Emden*-ova jednačina oblika

$$a_0 y'' + a_1 y' = b_0 y^n, \quad (a_\nu = a_{\nu(x)},\ b_0 = b_{0(x)}) \tag{39}$$

koja je takođe proučavana samo u malom broju specijalnih slučajeva.

Jedan takav slučaj je specijalna *Emden*-ova jednačina

$$xy'' + 2y' + ax^{\nu} y^n = 0, \quad (a > 0), \tag{40}$$

koja se javlja u raznim problemima teoriske fizike i astronomije [1].

D. Mitrinović, [26], ispituje opštiji oblik jednačine (39)

$$f(x)\, y'' + \varphi(x)\, y' + ay^n = 0, \quad (a = \text{const.}) \tag{41}$$

i nalazi da se ona rešava kvadraturama pri uslovu

$$\varphi(x) = \frac{\frac{n+3}{n+1}\sqrt{f(x)}}{\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}} + \frac{1}{2} f'(x)$$

Ovde se polazi od najopštijeg oblika jednačine (39), t. j. od pretpostavke da su svi koeficijenti proizvoljne funkcije promenljive x.

Kriterijum integrabilnosti te jednačine određuje se, kao i u prethodnom paragrafu, iz upoređenja sa jednom integrabilnom neodređenom jednačinom drugog reda, čije rešenje se može izraziti u obliku (3).

(3.1) Data je neodređena diferencijalna jednačina drugog reda

$$\Delta_2(y) + \Delta_1(y)\, \Delta_1(z) = y^{n-1} z^m, \tag{42}$$

Jednačina (42) može se izraziti u obliku

$$\Delta_1(y)\, \Delta_1(zy') = y^{n-1} z^m \tag{43}$$

Uvodeći novu nezavisno promenljivu t smenom

$$t = \int [z(x)]^{\frac{m}{2}} dx, \tag{44}$$

iz (43) se dobije

$$\Delta_1(y) \Delta_1 \left[y' z^{\left(1+\frac{m}{2}\right)} \right] = y^{n-1},$$

a ta se jednačina za $m = -2$ reducira na integrabilnu jednačinu

$$\Delta_2(y) = y^{n-1},$$

čiji je opšti integral

$$\int (c_1 + y^{n+1})^{-\frac{1}{2}} dy = \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} (c_2 + t) \quad (c_\nu = \text{const.}).$$

---

[1] Rezultati istraživanja izloženi su u zbirci, *E. Kamke*, Differentialgleichungen I str. 560—561, Leipzig, 1943.

Kad se još uzme u obzir (44), dobije se jedno rešenje, oblika (3), neodređene jednačine (42)

$$\int (c_1+y^{n+1})^{-\frac{1}{2}}dy=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(c_2+\int\frac{dx}{z}\right) \tag{45}$$

(3.2) Ako se u (42) $z(x)$ smatra parametrom i uvede uslov $m=-2$, dobije se integrabilna obična diferencijalna jednačina, oblika uopštene *Emden*-ove jednačine.

$$y''+y'\Delta_1(z)=\frac{y^n}{z^2} \tag{46}$$

Upoređujući koeficijente jednačina (39) i (46) dolazi se, konačno, do sledećeg rezultata.

(3.2.1) Uopštena *Emden*-ova jednačina

$$a_o y''+a_1 y'=b_o y^n \tag{47}$$

rešava se kvadraturama kad njeni koeficijenti zadovoljavaju uslov

$$a_1=a_o\Delta_1(z),\quad b_o=\frac{a_o}{z^2} \tag{48}$$

gde je z proizvoljna funkcija promenljive x.

Opšti integral jednačine (47) dat je relacijom

$$\int (c_1+y^{n+1})^{-\frac{1}{2}}dy=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(c_2+\int\frac{dx}{z}\right) \tag{49}$$

Primer. Uz pretpostavku $a_o=\cos x$, $a_1=\sin x$, iz (48) se nalazi

$$z=\frac{1}{\cos x},\quad b_o=\cos^3 x,$$

tako da (47) postaje

$$y''\cos x+y'\sin x=y^n\cos^3 x,$$

a njen opšti integral, prema (49)

$$\int (c_1+y^{n+1})^{-\frac{1}{2}}dy=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}(c_2+\sin x).$$

4° Treća nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda, koja se rešava metodama primenjenim kod neodređenih jednačina, jeste jednačina oblika

$$a_0 y''+a_1 y'=b_0 e^y \quad (a_\nu=a_\nu(x),\ b_0=b_0(x)) \tag{50}$$

koja je takođe ispitivana u malom broju specijalnih slučajeva.

Jedan takav specijalan oblik jeste *Emden*-ova diferencijalna jednačina izotermičkih gasnih kugala.

$$xy''+ay'+bxe^y=0 \quad (a=\text{const.},\ b=\text{const.}) \tag{51}$$

koja je tretirana sa raznih stanovišta[1].

[1]) E. Kamke, Differentialgleichungen, I, str. 562—563, Leipzig, 1943.

Jedan kriterijum ntegrabilnosti jednačine (50) određuje se kao i u prethodnim slučajevima, iz upoređenja sa jednom integrabilnom neodređenom diferencijalnom jednačinom drugog reda, kad se jedno rešenje te jednačine može izraziti u obliku (3).

(4.1) Data je neodređena diferencijalna jednačina drugog reda

(52) $$\Delta_2(y)+\Delta_1(y)\,\Delta_1\left(\frac{z}{y}\right)=yz^n$$

Iz (52) neposredno izlazi

$$\Delta_1(y)\left[\Delta_1(y')+\Delta_1\left(\frac{z}{y}\right)\right]=yz^n,$$

ili

(53) $$\Delta_1(y)\,\Delta_1[z\,\Delta_1(y)]=yz^n$$

Uvodeći novu nezavisno promenljvu t supstitucijom

(54) $$t=\int[z(x)]^{\frac{n}{2}}\,dx$$

iz (53) se dolazi do jednačine

$$\Delta_1(y)\,\Delta_1\left[z^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}\Delta_1(y)\right]=y,$$

koja se za $n=-2$ reducira na integrabilnu jednačinu

$$\Delta_1'(y)=y,\quad \text{tj.}\quad yy''-y'^2=y^3,$$

čiji je opšti integral

(55) $$y=\frac{2c_1^2E}{(1-E)^2},\quad E=c_2\exp c_1 t$$

Jednačina (52) uz uslov $n=-2$ glasi

(56) $$\Delta_2(y)+\Delta_1(y)\Delta_1\left(\frac{z}{y}\right)=\frac{y}{z^2},$$

a njeno rešenje, oblika (3), se dobije iz (55) kad se uzme u obzir (54)

(57) $$y=\frac{2c_1^2E}{(1-E)^2},\quad E=c_2\exp c_1\int\frac{dx}{z}$$

(4.2) Ako se u (56) $z(x)$ smatra parametrom i uvede nova nepoznata funkcija ϑ smenom

(58) $$y=e^{\vartheta},$$

dobije se obična diferencijalna jednačina oblika (50)

(59) $$\vartheta''+\vartheta'\,\Delta_1(z)=\frac{e^{\vartheta}}{z^2},$$

čiji je opšti intengral

(60) $$\vartheta = \ln y,$$

gde je y dato relacijom (60).

Upoređujući koeficijente jednačina (50) i (59), i vodeći računa o (57) i (60), konačno se dolazi do sledećeg zaključka.

(4.2.1) Nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda

$$a_0 y'' + a_1 y' = b_0 e^y,$$

rešava se kvadraturama pri uslovu

$$a_1 = a_0 \Delta_1(z), \quad b_0 = \frac{a_0}{z^2}$$

gde je z proizvoljna funkcija promenljive x.

Njen opšti integral je u tom slučaju

$$y = \ln \eta$$

gde je η dato relacijom

$$\eta = \frac{2 c_1^2 E}{(1-E)^2}, \quad E = c_2 \exp c_1 \int \frac{dx}{z}$$

Primer. Za $z = x$ jednačina (50) glasi

$$x^2 y'' + x y' = e^y$$

Opšti integral ove jednačine je $y = \ln \eta$, gde je

$$\eta = \frac{2 c_1^2 E}{(1-E)^2}, \quad E = c_2 x^{c_1}$$

RÉSUMÉ

Dans le présent travail l'auteur traite le problème de la solution des équations indéfinies différentielles du premier et du deuxième ordres à deux fonctions inconnues, $y(x)$ et $z(x)$, en premier lieu de celles qui apparaissent dans la théorie de l'élasticité, dans l'hydrodynamique et l'électronique, ainsi que dans certains problèmes de technique.

Les solutions de ces équations sont exprimées, d'après la conception plus large adoptée dans les travaux de *D. Mitrinović* sous la forme

$$y = f_1(x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots), \quad z = f_2(x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots),$$

où λ_ν sont des fonctions arbitraires de la variable x et c_ν des constantes.

La méthode même de solution est fondée sur certaines propriétés des dérivées relatives de *M. Petrović*. Dans ce but on a formulé, dans le chapitre I, une suite de nouveaux rapports entre les dérivées relatives, dont

$$\Delta_2(y) - \Delta_2(z) = \Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\Delta_1\left[yz\,\Delta_1\left(\frac{y}{z}\right)\right]; \quad \frac{\Delta_k(y)}{\Delta_{k-1}(y)} + \Delta_1(y) = \Delta_1\left[yy^{(k-1)}\right]$$

sont le plus souvent appliqées dans la présent travail.

En même temps on a formulé un théorème sur l'équation linéaire récurrente de forme $\Delta_2(y) = f(x)$, que l'on applique plus tard en élargissant le cercle des équations non-linéaires intégrables.

Dans le chapitre II on a établi d'abord une classification élémentaire des équations indéfinies du premier et du deuxième ordre en introduisant la notion des équations-W dans lesquelles les fonctions inconnues ne figurent pas explicitement et leurs dérivées n'y apparaissent que sous forme de dérivées relatives.

Après cela on a exposé la méthode de solution de l'équation-W linéaire, homogène et quasi-homogène du premier et du deuxième ordres, où la forme générale de l'équations-W linéaire du premier, resp. du deuxième ordre est représentée par

$$\Delta_1(y) + a_0\,\Delta_1(z) = a_1; \quad \Delta_2(y) + a_0\,\Delta_2(z) + a_1\,\Delta_1(y) + a_2\,\Delta_1(z) = a_3 \quad (a_\nu = a_\nu(x))$$

tandis que la porme générale de l'équation-W quasi-homogène du premier et du deuxième ordre est donnée par

$$P(x, \Delta_1(y), \Delta_1(z)) = Q(x, \Delta_1(y), \Delta_1(z));$$

$$P(x, \Delta_1(y), \Delta_2(y), \Delta_1(z), \Delta_2(z)) = Q(x, \Delta_1(y), \Delta_2(y), \Delta_1(z), \Delta_2(z))$$

où P et Q sont des fonctions homogènes par rapport aux dérivées relatives qui y figurent, à savoir, dans le cas général P du m-tième et Q du n-tième degré.

Ces équations se réduisent, pour $Q \equiv 0$, aux équations-W homogènes.

Les methodes appliquées dans la solution des équations-W ont été utilisées, ensuite, dans la solution des équations indéfinies plus générales, dans lesquelles figurent explicitement $y(x)$ aussi bien que $z(x)$ de forme

$$\Delta_2(y) + a_0\,\Delta_2(z) + a_1\,\Delta_1(y) + a_2\,\Delta_1(z) = f(x, y, z)$$

où la fonctions $f(x, y, z)$ satisfait certaines conditions.

Les résultats auxquels on a abouti sont appliqués dans la solution des équations indéfinies appartenant aux types susmentionnés de la théorie de l'élasticité

$$\Delta_2(y) + (n^2 - 1)\,\Delta_2(z) = 0; \quad \Delta_1(y)\,\Delta_2(x) - \Delta_2(y)\,\Delta_1(x) = \frac{n^2 - 1}{z}\,\Delta_2(x), \quad (n = \text{const.});$$

de l'hydrodynamique

$$\Delta_2(y) - \Delta_2(z) = h, \quad (h = \text{const.}); \quad \Delta_2(y) - \Delta_2(z) = \frac{a}{z^2} + b, \quad (a = \text{const.}, \quad b = \text{const.});$$

de la technique

$$\Delta_2(y) - \Delta_2(z) + 2a\,\Delta_1(y) = 0, \quad (a = \text{const.})$$

A la fin de ce chapitre on a effectué la solution de l'équation-*W* du troisième ordre

$$\Delta_2(y) - \left[\frac{\Delta_3(z)}{\Delta_2(z)} + \Delta_1(z)\right]\Delta_1(y) + n^2\,\Delta_2(z) = 0,$$

laquelle apparaît dans un problème important de la théorie de l'élasticité.

Dans le chapitre III on a exposé l'application des méthodes, dont traite le chapitre II, dans l'établissement du critère d'intégrabilité d'importantes équations simples non-linéaires différentielles suivantes:

de l'équation différentielle

$$yy'' + y^2 f(x) = \varphi(x),$$

qui apparaît dans l'électronique;

de l'équations généralisée d'*Emden*

$$y'' + f(x)\,y' = \varphi(x)\,y^n,$$

connue dans la physique théorique;

de l'équation généralisée d'*Emden* des sphères isothermes des gaz

$$y'' + f(x)\,y' = \varphi(x)\,e^y$$

LITERATURA

[1] G. MONGE

Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinair pour lesquelles les conditions d'intéglabilité ne sont pas satisfaites sous susceptibles d'une véritables integration, etc., Mem. Ac. Sc., p. 502-576, 1784

[2] J. SERRET

Sur l'intégration de l'équation $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$, Journal Math. pures et appl., I^e série, t. 13, p. 353-368, 1848

[3] G. DARBOUX

Sur la résolution de l'équation $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$ *et de quelques équations nalogues,* Journal de Math. pures et appl., IV^e série, t. 3, p. 305-325, 1887

[4] J. HADAMARD

Sur l'équilibre de plaques élastiques circulaires libres ou appuyées et celui de la sphère isotrope, Ann Éc. Norm., III^e série, t. 18, 1901

[5] E. GOURSAT

Recherches sur les systèmes en involution d'équations du second ordre, Journ. Éc. Polytech., II^e série, 3^e cahier, p. 75-130, 1897

[6] D. HILBERT

Ueber den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen, Mathemati che Annalen, Bd. 73, s. 95-108, 1912

[7] P. ZERVOS

Sur l'intégration de certaines systemes indéterminées d'équations différentielles, Jorn. für reine und angewandte Mathematik, t. 143, p. 300-312, 1913

[8] MITRINOVITCH

Sur une équation différentielle indéterminée du second ordre. Bulletin de l'Académie royale de Belgique, classe des sciences, V^e série, t. 37, p. 227-228, 1951

D. MITRINOVITCH

On an equation on Neményi et Truesdell, Journal of the Washington Academy of Sciences, Vol. 41, p. 129, 1951

D. MITRINOVITCH

Sur une procédé d'intégration d'une équation de Monge, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 232, p. 1334-1336, 1951

[9] D. MITRINOVITCH

Sur l'équation différentielle d'un problème d'hydrodinamique, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 241, p. 1708-1710, 1955

[10] D. MITRINOVITCH

Mise en correspondence d'un problème non résolu de la théorie d'Élasticité avec un problème résolu par Darboux et Drach, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 231, p. 327-328, 1950

D. MITRINOVIĆ

O diferencijalnoj jednačini jednog važnog problema teorije elasticiteta, Годишњи зборник на филозофскиот на Универзитет во Скопје, Природно-математички оддел, књига 3, № 5, 1950

[11] M. PETROVIĆ

Jedan diferencijalni algoritam i njegove primene, Posebna izdanja SAN, knjiga CXI, Beograd, 1936

[12] M. PETROVITCH

Théoreme sur l'équation de Riccati, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. 4, p. 169-180, 1935

[13] G. DARBOUX

Sur une proposition relative aux équations linéaires, Comptes rendus de l'Académi des Sciences, t. 94, p. 1956/9, 1882

[14] D. MITRINOVIĆ

Nekoliko stavova o Riccati-jevoj diferencijalnoj jednačini, Glas SAN, CLXXXI. Prvi razred, br. 90, Beograd, 1939

[15] C. TRUESDELL

Solowsky's „momentless shells", Transactions of the American Mathematical Society, Vol 61, № 1, pp 128-133, 1947

P. NEMÉNYI and C. TRUESDELL

A stress Funktion for the membrane theorie of shells of revolution, Procedings of the National Academy of Sciences, vol. 29, № 5, pp 159-162, 1943

[16] E. HÖILAND

On two — dimensional perturbation of linear flow, Geofys. Publ. Norske Vid. — Akad. Oslo, 18, № 9, 1953 pp 12

E. HÖILAND

Et matematisk problem fra den hydrodynamske perturbasjonsteori, Comptes rendus du Dousième Congrés des Mathématiciens Scandinaves, Lund, 1953, p. 101-104

[17] C. TRUESDELL

The membrane Theory of Shells of Revolution, Transactions of the American Mathematical Society, 58, p. 96-166, 1945

[18] D. MITRINOVITCH

Sur une équation différentielle indéterminée intervenant dans un problème important de l'Élasticité, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 232, p. 681-683, 1951

[19] M. R. GRAN OLSSON

Ingenieur — Archiv, 1934

[20] D. MITRINOVITCH

Sur l'équation différentielle d'un problème de technique étudié par M. R. Gran Olsson, Kgl. norske vid. selskals forhandl, 1956, 28, № 31, 171-175

[21] F. MERTENS

Akademie der Wissenschaften in Wien, 126, 1917

[22[W. WIRTINGER

Akademie der Wissenschaften in Wien, 135, 1919

[23] J. J. MÜLLER

Oscilations éléctroniques dans le magnétron, Revue Éléctricité, 42, Paris, 1937

[24] T. LEKO

Uber die Integration der Differentialgleichung $yy'' + y^2 f(x) = \varphi(x)$ Glasnik matematičko-fizički i astronomski, T. 10, № 1, 1955, Zagreb

[25] I. BANDITCH

Sur l'intégration d'une équation différentielle non linéaire du deuxieme ordre Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije Beograd, 1958

[26] D. MITRINOVITCH

Sur l'équation différentielle d'Emden généralisée, Comptes rendus de l'Academi des Sciences, 241, № 12, p. 724-726 1955

№ 15 (1957)
B. Perović — I. Ševarac Karakteristike jednog magnetskog jonskog izvora za čvrsta tela.
Les caractéristiques d'une source d'ions pour corps solides.

№ 16 (1958)
A. Kirhenmajer Prilozi kinetici nuklearnog reaktora sa moderatorom koji ključa.
Contributions to the kinetics of the boiling water reactors.

№ 17 (1958)
D. M. Ivanović Solution du problème de la pénétration à travers des barriers de potentiel au moyen d'une nouvelle grandeur que l'on peut appeler impedance debroglienne.
Rješenje problema pentracije potencijalnih prepreka pomoću nove veličine koja se može nazvati de Broglie-ova impedanca

№ 18 (1958)
S. Fempl O amplitudama normalnih eliptičkih integrala III vrste za koje se takvi integrali redukuju na normalne eliptičke integrale I i II vrste.
Über die Amplituden der elliptischen Normalintegralen III Gattung für welche sich solche Integrale auf elliptische Normalintegrale I u. II Gattung reduziren.

№ 19 (1958)
V. M. Vučić — M. Rekalić O jednom problemu strujanja fluida kroz poroznu sredinu.
On the problem of the fluid flow through the porous medium.

№ 20 (1958)
V. M. Vučić Prilog problemu spontane akumulacije radioaktivnih supstancija na terenu.
A contribution to the problem of spontaneous accumulation of radioactive matters on the ground.

№ 21 (1958)
S. Milević Merenje nekih fizičkih veličina promenom kapaciteta.
The measurements of some physical quantities by the change of a capacity

№ 22 (1958)
V. M. Vučić — G. Dimić Jedan tip jonizacione komore sa elektronskim uređajem za merenje slabih koncentracija radona u prostorijama.
A type of ionisation chamber with electronic device for measuering very low radon concentrations in rooms.

№ 23 (1959)
D. S. Mitrinović O Stirling-ovim brojevima prve vrste i Stirling-ovim polinomima.
Sur les nombres de Stirling de première espèce et les polynomes de Stirling.

№ 24 (1959)
I. Bandić Metode rešavanja neodređenih diferencijalnih jednačina koje se javljaju u teoriji elasticiteta, hidrodinamici i elektronici.
Méthodes de résolution d'équatons différentielles indéterminées qui apparaissent dans la théoric de l'élasticité, dans l'hydrodynamigne et électronique.

№ 25 (1959)
D. S. Mitrinović O MacMillan-ovoj modifikaciji Gauss-Chiò-ovog postupka za izračunavanje determinanata.
Sur une modification de MacMillan du procédé de Gauss-Chiò pour l'évaluation des déterminants.

№ 26 (1959)
S. V. Pavlović Une proposition sur les déterminants circulants d'ordre pair.
O jednom stavu za cirkulante parnog reda.

№ 27 (1959)
D. S. Mitrinović Compléments au traité de kamke
Dopune Kamkeovom delu, Nota VI

Tehnički urednik i korektor
DRAGOSLAV ALEKSIĆ

Slagač
ZORICA JOVANOVIĆ

Tiraž: 600 primeraka

Štampanje završeno jula 1959 godine u Beogradskom grafičkom zavodu — Beograd, Bulevar Vojvode Mišića 17.