PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTE D'ELECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITE A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 2 (1956)

TEORIJA KRETANJA NEUTRONA KROZ SMJEŠU ELEMENATA

Dragiša M. Ivanović

0. U v o d

0.1 — U nuklearnoj fizici i tehnici neutroni zauzimaju izuzetno važno mjesto zbog svoje prirode i zbog tehničkih primjena pri korišćenju nuklearne energije. Pri proučavanju kretanja velikog broja neutrona bilo bi suviše komplikovano, a uglavnom i nemogućno, tačnije uzeti u obzir mnoga otkrivena svojstva neutrona, koja se proučavaju kada se radi o manjem broju. Tu su prvenstveno magnetna i kvantna svojstva, kao i njihova talasna priroda. Danas je dovoljno efikasan metod proučavanja njihovog kretanja u većem broju na osnovu kinetičke teorije materije uzimajući u obzir „transportne" uslove. U teoriji kretanja neutrona proučavanje usporavanja je od osobitog značaja, jer se podesni rezultati mogu primijeniti u nauci o nuklearnim reaktorima na kretanje neutrona kroz moderator. Rezultati elementarne teorije zadovoljavaju osnovne praktične potrebe, ali za dalji razvoj neutronske fizike transportna teorija ima veliki značaj.

0.2 — Proces usporavanja neutrona proučavan je uglavnom za slučaj kretanja neutrona kroz jedan element. Usporavanje neutrona kroz smješu elemenata nije proučavano prema egzaktnijoj teoriji osim za specijalne slučajeve teških elemenata uz naročit vještački oblik varijacije srednje dužine slobodnog puta, kao i smješe vodonika sa zamišljenim elementom beskonačno velike mase (29), što ne pretstavlja rješenje problema kretanja, odnosno usporavanja neutrona kroz smješu elemenata pomoću transportne teorije. Pokušaji u radovima Wallera (41) da se dobiju rezultati za smješu nisu uspjeli zbog suviše grubih aproksimacija, dok za usporavanje kroz moderator od jednog elementa isti radovi daju dobre rezultate. Taj problem je tretirao i Bothe na manje precizan način još 1942 godine, kada se ova oblast nalazila tek u početnom stadijumu. U elementarnoj teoriji ovaj problem se rješava suviše grubo tako da se uzima u obzir vrlo malo elemenata procesa [napr. (14), (12)].

0.3 Cilj ovog rada je da tretira usporavanje neutrona kroz smješu od dva elementa konačnih masa, tj. ma kojih elemenata od kojih je sastavljen moderator, kao i raspodjelu neutrona na granici moderatora, gdje je glavno izračunavanje ekstrapolacione dužine. Dobiveni rezultati se mogu uopštiti i na više elemenata. Glavno je da se pri tome držimo uslova o konačnosti masa oba elementa, pa se specijalni slučajevi iz toga mogu lako dobiti.

Predmet ove teze izabrao sam u sporazumu sa prof. Murray-om (Raleigh, SAD). On se u toku izrade ove teze živo interesovao za dobijene rezultate i o njima sa mnom diskutovao.

Prof. Kašanin pružio mi je pomoć u poboljšanju definitivne redakcije teze, naročito ukoliko se to odnosilo na njenu matematičku stranu.

Obojici izražavam zahvalnost na pruženoj pomoći.

1. Osnovna jednačina za usporavanje neutrona

1.1 — Kretanje neutrona kroz neku sredinu danas se tretira uglavnom na dva načina: elementarnom teorijom difuzije i egzaktnijom transportnom teorijom. U ovom radu se polazi od transportne teorije.

Transportna teorija kretanja neutrona polazi od osnovne tzv. Boltzmannove jednačine (kinetičke, transportne), koja glasi:

$$\frac{\partial n\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} n\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right) + \frac{v}{\lambda} n\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right) = \int \frac{v'}{\lambda'_s} \cdot n\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right) w\left(\vec{v}', \vec{v}\right) dv' + q. \tag{1,1}$$

Ovdje je:

$\vec{r}$ vektor položaja neutrona,

$\vec{v}$ brzina neutrona poslije sudara,

$\vec{v}'$ brzina neutrona prije sudara,

n $(\vec{r}', \vec{v}, t)$ funkcija raspodjele neutrona po koordinatima i brzinama,

w $(\vec{v}', \vec{v})$ relativna vjerovatnoća da neutron usljed sudara pređe iz stanja sa brzinom $\vec{v}'$ u stanje sa brzinom $\vec{v}$,

λ totalna srednja dužina slobodnog puta neutrona energije E i brzine $\vec{v}$,

λ_s srednja dužina slobodnog puta neutrona u odnosu na elastično raštrkavanje,

λ_c srednja dužina slobodnog puta neutrona u odnosu na zahvat. (Iste veličine sa apostrofom odnose se na neutron energije E' i brzine $\vec{v}$'),

q broj neutrona koje izvor daje u jedinici vremena,

— $\vec{v}$. grad n promjena broja neutrona usljed slobodnog kretanja,

— $\frac{v}{\lambda}$ n broj neutrona koji u jedinici vremena iziđu iz stanja brzine $\vec{v}$, integral na desnoj strani pretstavlja broj neutrona koji uđu u to stanje usljed elastičnih sudara sa jezgrima.

Kako su efektivni makroskopski presjeci Σ recipročne vrijednosti odgovarajućih srednjih dužina slobodnog puta, biće

$$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_c$$

ili

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_s} + \frac{1}{\lambda_c}.$$

Veličine λ, λ_s i λ_c zavise od energije neutrona. U nekim intervalima mogu se smatrati konstantne.

U savremenoj literaturi usvojena je promjenljiva

$$u = \ln \frac{E_0}{E} \tag{1,2}$$

gdje je E_0 neka početna energija neutrona. Funkcija raspodjele neutrona izražena pomoću u ne zavisi znatno od te promjenljive za velike vrijednosti iste promjenljive, pa se zavisnost može zanemariti. Time se i opravdava njeno uvođenje. Naziva se i letargija. Pomoću u se i funkcija raspodjele efikasnije tretira.

Osim toga se uvodi $\vec{\Omega} = \frac{\vec{v}}{v}$. Tako će funkcija $n(\vec{r}, \vec{\Omega}, u, t)$ opet zadovoljavati transportnu jednačinu.

Uvodi se i funkcija

$$\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, u, t,) \frac{v}{\lambda(u)} \cdot n(\vec{r}, \vec{\Omega}\, u, t) \tag{1,3}$$

Tako je $\psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, u, t)\, d\vec{r}\, d\vec{\Omega}\, du$ ukupan broj sudara u jedinici vremena među $\vec{r}$ i $\vec{r} + d\vec{r}, \vec{\Omega}$ i $\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}, u$ i $u + du$.

Pretpostavlja se stalan izvor neutrona, pa je glavno pitanje proučavanja stacionarnog stanja.

Posmatrano u jednoj dimenziji, uz oznaku izvora Diracovom funkcijom $\delta(z)$, osnovna jednačina ima ovaj oblik

$$\lambda(u)\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi(z, \mu, u) = \int_0^u du' \int d\vec{\Omega}'\, \psi(z, \mu', u') f(\mu_0, u - u') + \\ + \frac{\delta(z)\,\delta(u)}{4\pi} \tag{1,4}$$

μ je kosinus ugla među $\vec{v}$ i $\vec{v}'$.

Funkcija $f(\mu_o, u - u')$ pretstavlja relativnu vjerovatnoću da jedan neutron ostane sa parametrima $(\vec{\Omega}', u)$ usljed sudara, prije kojeg je imao parametre $(\vec{\Omega}', u')$.

Ova integro-diferencijalna jednačina izvedena je iz Boltzmannove jednačine i može poslužiti kao glavna jednačina za proučavanje kretanja neutrona kroz mederator, bez obzira na njegov sastav ((29) str. 200). Služi za određivanje funkcije ψ.

1.2 — Jednačina (1,4) može se riješiti samo aproksimativno. Istina, jednačina je u principu riješena kada se izračunaju prostorni momenti gustine neutrona, ali u tome ima dosta teškoća, o kojima će kasnije biti riječi. Definicija prostornog momenta, recimo reda 2m, glasi (29)

$$\left[\overset{(2m)}{z}(u)\right]_{\text{srednje}} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^{2m}\, dz \int d\Omega\, \psi(z, \mu, u)}{\int\limits_{-8}^{\infty} dz \int d\Omega\, \psi(z, \mu, u)} . \tag{1,5}$$

Ovaj izraz pokazuje da se prilikom izračunavanja prostornih momenata nailazi na matematičke komplikacije, pa se ranije ili kasnije, a naročito pri njihovom sabiranju, mora pribjeći izvjesnim aproksimacijama.

Danas se smatra kao najpraktičniji metod nalaženja prostornih momenata u primjeni Fourierovih transformacija funkcije raspodjele. Poslije te primjene nailazi se na nešto jednostavnije izraze za prostorne momente. Primjena tog metoda data je pregledno u radu Marshaka (29) str. 200—201, pa ćemo u ovom radu taj metod prikazati detaljnije.

1.3 — Prema definiciji Fourierovih transformacija imamo:

$$\varphi(y, \mu, u) \equiv F[\Psi(z, \mu, u)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz.\, e^{iyz} \cdot \psi(z, \mu, u) \tag{1,6}$$

Primjena na (1,4) daje

$$\lambda(u)\mu \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot e^{iyz} \cdot dz + \varphi(y, \mu, u) =$$

$$= \int\limits_{0}^{u} du' \int d\vec{\Omega}'\, \varphi(y, \mu', u')\, f(\mu_o, u - u') + \frac{\delta(u)}{4\pi} \tag{1,7}$$

Na osnovu poznatih svojstava Fourierovih transformacija može se lijeva strana ove jednačine napisati u obliku

$$\lambda(u)\mu \int\limits_{\infty}^{\infty} e^{iyz} dz \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iyz} \cdot \varphi(y, \mu, u)\, dy + \varphi =$$

$$= \lambda (u) \mu (- i y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i y z} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i y z} \cdot \varphi (y, \mu, u) \, dy + \varphi .$$

Onda je

$$\varphi(y, \mu, u)\Big[1 - i \lambda (u) \mu y\Big] = \int_{0}^{u} du' \int d\vec{\Omega}' \varphi (y, \mu', u') f (\mu_0 u - u') + + \frac{\delta (u)}{4 \pi} \quad (1,8)$$

Funkcije φ i f zgodno je razviti po Legendre-ovim polinomima :

$$\varphi (y, \mu, u = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l (\mu) \quad (1,9)$$

$$f (\mu, u) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l P_l (\mu). \quad (1,10)$$

Konstante a_l i b_l nalaze se množenjem odgovarajućih jednačina sa $P_l (\mu) \, d\Omega$ integriranjem po μ :

$$a_l \frac{4 \pi}{2l + 1} = \int d\Omega \cdot \varphi (y, \mu, u) \cdot P_l (\mu) = \varphi_l (y, u) \quad (1,11)$$

$$b_l \cdot \frac{4 \pi}{2 l + 1} = \int d\Omega \cdot f (\mu, u) \cdot P_l (\mu) = f_l (u) \quad (1,12)$$

Na osnovu toga je

$$\varphi (y, \mu, u) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2 l + 1}{4 \pi} \cdot \varphi_l (y, u) \cdot P_l (\mu) \quad (1,13)$$

$$f (\mu, u) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2 l + 1}{4 \pi} \cdot f_l (u) \cdot P_l (\mu) \cdot \quad (1,14)$$

Ako se sada pomnoži (1,8) sa $P_l (\mu)$ i integrira po $d\vec{\Omega}$, dobiva se

$$\int d \vec{\Omega} \cdot \varphi(y, \mu, u), P_l (\mu) - i y \lambda (u) \int \mu \varphi (y, \mu, u) P (\mu) \, d \Omega =$$

$$= \int_{0}^{u} du' \int \int d \vec{\Omega}' \cdot \varphi (y, \mu', u') f \; \mu_o, u - u') \, d \Omega \, P (\mu) + \frac{\int P (\mu) \, \delta (u) d\Omega}{4 \pi} .$$

Koristeći notacije iz (1,11) i (1,12) nalazi se

$$\varphi_l(y,u) - iy\lambda(u)\int \mu\varphi(y,\mu,u)\,P_l(\mu)\,d\Omega = \int_0^u du'\cdot\varphi_l(y,u')\cdot f_l(u-u') + \gamma\,\delta(u).$$

Proizvod $\mu\, P_l(\mu)$ pod integralom u drugom članu može se zamijeniti prema sljedećoj relaciji za Legendre-ove funkcije (vidjeti na pr. (42) str. 308).

$$\mu P_l(\mu) = \frac{1}{2l+1}\left[(l+1)P_{l+1}(\mu) + l P_{l-1}(\mu)\right] \tag{1,15}$$

Dakle

$$\varphi_l(y,u) - \frac{iy\lambda(u)}{2l+1}\left[(l\varphi_{l-1}(y,u) + (l+1)\varphi_{l+1}(y,u)\right] =$$

$$= \int_0^u du'\varphi_l(y,u')\,f_l(u-u') + \gamma\,\delta(u), \tag{1,16}$$

gde je $\gamma = 0$ za $l \neq 0$, $\gamma = 1$ za $l = 0$.

Tako je specijalno za $l = 0$

$$\varphi_o(y,u) - iy\lambda(u)\varphi_1(y,u) = \int_0^u du'\varphi_o(y,u')\,f_o(u-u') + \delta(u) \tag{1,17}$$

Funkcije $\varphi_l(y,u)$ mogu se razviti u red i to kada je l parno red sadrži samo parne eksponente. Taj red ima oblik ((29) str. 201)

$$\varphi_l(y,u) = \sum_{k=l,\,l+2,\,l+4.}^{\infty} i^k \overset{(k)}{\varphi_l}(u)\frac{y^k}{k!}. \tag{1,18}$$

Sada smo u stanju da prostorni moment prikažemo pomoću novih funkcija ((29) str. 201).

$$\left[\overset{(2m)}{z}(u)\right]_{\text{srednje}} = \frac{\overset{(2m)}{\varphi_o}(u)}{\varphi_o^{\,o}(u)} \tag{1,19}$$

1.4 — Čak je i u elementarnoj teoriji kretanja neutrona kroz neku sredinu jedna od najvažnijih veličina koju treba računati *dužina usporavanja* L_s. Prema tome je glavni dio problema izračunavanje ove veličine a zatim gustine neutrona.

Prema definiciji dužine usporavanja imamo

$$L_s^2 = \frac{[z^2(u)]_{\text{srednje}}}{2} = \frac{[r^2(u)]_{\text{srednje}}}{6} \tag{1,20}$$

Ova relacija i identičnost se može dokazati i pomoću elementarne teorije.

2. O nekim matematičkim operatorima

Prilikom izračunavanja dužine usporavanja neutrona kroz smješu elemenata naišao sam na neke matematičke operatore, koje sam označio sa $\widehat{D}$, $\widehat{P}$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{Q}, = \Sigma \widehat{A}_y$, $\widehat{\Pi} = \Sigma \widehat{B}_y$.

2.1 — a) *Operator* $\widehat{D}$. Ovaj operator je definisan na sljedeći način:

$$\Phi_0(u) = \Phi(u)$$

$$\Phi_1(u) = e^{-u} \int_0^u e^{u'} \Phi_0(u')\,du' = e^{-u} \int_0^u e^{u'} \cdot \Phi(u')\,du',$$

$$\Phi_2(u) = e^{-u} \int_0^u e^{u''} \Phi_1(u'')\,du'' = e^{-u} \int_0^u e^{u''} \left[e^{-u''} + \int_0^{u''} e^{u'} \cdot \Phi(u')\,du' \right] du'' = = e^{-u} \int_0^u \left[\int_0^{u''} e^{u'} \Phi(u')\,du' \right] du'',$$

$$\Phi_3(u) = e^{-u} \int_0^u e^{u'''} \Phi_2(u''')\,du''' = e^{-u} \int_0^n e^{u'''} \left\{ e^{-u'''} \int_0^{u'''} \left[\int_0^{u''} e^{u'} \Phi(u')\,du' \right] du' \right\} du''' = e^{-u} \int_0^u \left\{ \int_0^{u'''} \left[\int_a^{u''} e^{u'} \Phi(u')\,du' \right] du'' \right\} du'''$$

. . . .

$$\Phi_n(u) = e^{-u} \int_0^u \left| \int_0^{\overset{(n)}{u}} \left[\int_0^{\overset{(n-1)}{u}} \cdots \left[\int_0^{u''} e^{u'} \Phi(u')\,du' \right] \cdots \right] du^{(n)} \right.$$

Odavde izlazi rekurzivna formula

$$\Phi_n(u) = e^{-u} \int_0^u e^{u^{(n)}} \Phi_{n-1}[u^{(n)}]\,du^{(n)} = e^{-u} \left(\int_0^n du' \right)^n e^{u'} \Phi(u'). \tag{2,1}$$

Uzme li se uopšte $u^{(n)}$ kao promjenljiva t, biće

$$\Phi_n(u) = e^{-u} \int_r^u e^t \Phi_{n-1}(t)\,dt.$$

Svojstva dobivenih funkcija pokazuju da na $\Phi\,(u)$ dejstvuje *operator* $\widehat{D}_\nu$ u obliku

$$\widehat{D}_\nu \cdot \Phi\,(u) = \Phi_0\,(u) + \Phi_1\,(u) + \Phi_2\,(u) + \ldots + \Phi_\nu\,(u) \tag{2,2}$$

Kako je

$$e^u\,[\Phi_1\,(u) + \Phi_2\,(u) + \ldots + \Phi_\nu\,(u)] = \int\limits_0^u \Big[e^t\,\Phi_0\,(t)\,dt + e^t\,\Phi_1\,(t)\,dt + \ldots +$$

$$+ e^t\,\Phi_{\nu-1}\,(t)\,dt \Big]\,du' = \int\limits_0^u e^t\,D_{\nu-1}\,\Phi\,(t)\,dt, \text{ ili}$$

$$\Phi_1\,(u) + \Phi_2\,(u) + \Phi_3\,(u) + \ldots + \Phi_\nu\,(u) =$$

$$= e^{-u} \int\limits_0^u e^t\,D_{\nu-1}\quad \Phi\,(t)\,dt,$$

biće

$$D_\nu\quad \Phi\,(u) = \Phi\,(u) + e^{-u} \int\limits_0^u e^t\,D_{\nu-1} \cdot \Phi\,(t)\,dt, \tag{2,3a}$$

ili

$$D_\nu \cdot \Phi\,(u) = D_{\nu-1} \cdot \Phi\,(u) + e^{-u} \cdot \int\limits_0^u du' \ldots \int\limits_0^{\overset{(\nu-1)}{u}} e^{\frac{u^{(\nu)}}{2}}\quad \Phi\,(u^{(\nu)})\,du^{(\nu)} \tag{2,3b}$$

Relacija (2,3) pokazuje vezu među funkcijom kada na nju dejstvuje operator $\widehat{D}_\nu$ i operator $\widehat{D}_{\nu-1}$. Ovo bi bila neka vrsta rekurzivne formule za operator D. Ona je podesna za snižavanje reda, koji pripada operatoru, što u principu olakšava eventualno numeričko izračunavanje.

2.2 — b) *Operator* $\widehat{P}$. Ovaj operator je definisan ovako:

$$\widehat{P}_0 \cdot \Phi\,(u) = \Phi\,(u)$$

$$\widehat{P}_1 \cdot \Phi\,(u) = \Phi\,(u) + e^{-\frac{3u}{2}} \cdot \int\limits_0^u e^{\frac{3u'}{2}} \cdot \Phi\,(u')\,du'$$

$$\widehat{P}_2 \cdot \Phi\,(u) = \Phi\,(u) + e^{-\frac{3u}{2}} \int^u e^{\frac{3u'}{2}} \cdot \Phi\,(u')\,du' +$$

$$e^{-\frac{3u}{2}}\int_0^u e^{\frac{3u'}{2}}\cdot e^{-\frac{3u'}{2}}\cdot du'\int_0^{u'} e^{\frac{3u''}{2}}\Phi(u'')\,du''=\Phi(u)$$

$$+e^{-\frac{3u}{2}}\int_0^u e^{\frac{3u'}{2}}\cdot\Phi(u')\,du'+e^{-\frac{3u}{2}}\cdot\int_0^u du'\int_0^{u'} e^{\frac{3u''}{2}}\Phi(u'')\,du''$$

. . . .

$$\widehat{P}_\nu\cdot\Phi(u)=\widehat{P}_{\nu-1}\cdot\Phi(u)+e^{-\frac{3u}{2}}\int_0^u du'\int_0^{u'} du''\cdots\int_0^{u^{(\nu-1)}}\Phi(u^\nu)\,du^{(\nu)} \tag{2,4}$$

2.3 — c) *Operatori* $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$. Ovi operatori su definisani ovako:

$$\widehat{A}_1\cdot\Phi(u)=e^{-\frac{3u}{2}}\cdot\int_0^u a(u')\,e^{\frac{3u'}{2}}\cdot\Phi(u')\,du',$$

$$\widehat{B}_1\cdot\Phi(u)=e^{-\frac{u}{2}}\cdot\int_0^u b(u')\,e^{\frac{u'}{2}}\,\Phi(u')\,du';$$

$$\widehat{A}_2\cdot\Phi(u)=e^{-\frac{3u}{2}}\cdot\int_0^u a(u')e^{\frac{3u'}{2}}du'\int_0^{u'} a(u'')\,e^{-\frac{3u'}{2}+\frac{3u''}{2}}\,\Phi(u'')\,du'',$$

$$\widehat{B}_2\cdot\Phi(u)=e^{-\frac{u}{2}}\int_0^u b(u')e^{\frac{u'}{2}}\,du'\int_0^{u'} b(u'')\,e^{-\frac{u'}{2}+\frac{u''}{2}}\cdot\Phi(u'')\,du'', \tag{2,5}$$

. . . .

2.4 — d) *Operatori* $\widehat{Q}$ *i* $\widehat{\Pi}$. Operator $\widehat{Q}$ definisan je ovako:

$$\widehat{Q}\cdot\Phi(u)=\Sigma\,\widehat{A}_\nu\cdot\Phi(u)\cdot \tag{2,6}$$

Njegov se oblik može izmijeniti i izračunati njegovo dejstvo na funkciju kao što sljeduje:

$$\widehat{Q}\cdot\Phi(u)=e^{-\frac{3u}{2}}\cdot\int_0^u a(u')e^{\frac{3u'}{2}}\,\Phi(u')\,du'+e^{-\frac{3u}{2}}\int_0^u a(u')e^{\frac{3u'}{2}}\,du'\cdot$$

$$\cdot\int_0^{u'} a(u'')\,e^{-\frac{3u'}{2}+\frac{3u''}{2}}\,\Phi(u'')\,du''+\cdots=e^{-\frac{3u}{2}}\cdot e^{\int_0^u a(u'')\,du''}\cdot$$

$$\int\limits^{u} e^{-\int\limits_{0}^{u'} a(u'')\,du''} \cdot e^{\frac{3u'}{2}} \cdot a(u')\,\Phi(u')\,du' = e^{-\frac{3u}{2}} \cdot \int\limits_{0}^{u} e^{\int\limits_{u}^{u'} a(u'')\,du''} \cdot e^{\frac{3u'}{2}} a(u')\,\Phi(u')\,du' \tag{2,7}$$

Analogno se definiše operator $\widehat{\Pi}$, odnosno

$$\widehat{\Pi}\cdot\Phi(u) = \Sigma\widehat{B}_\nu\cdot\Phi(u) = e^{-\frac{u}{2}}\cdot e^{\int\limits_{0}^{u} b(u'')\,du''} \cdot \int\limits_{0}^{u} e^{-\int\limits_{0}^{u'} b(u'')\,du''} \cdot e^{\frac{u'}{2}}\, b(u')\,\Phi_{du}{}''(u')' =$$

$$= e^{-\frac{u}{2}}\cdot\int\limits_{0}^{u} e^{\int\limits_{u'}^{u} b(u'')\,du''} \cdot e^{\frac{u'}{2}}\cdot b(u')\cdot\Phi(u')\,du' \tag{2,8}$$

2.5 — U toku izračunavanja naišao sam i na članove sa sukcesivnim dejstvom operatora $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$. Opštu teoremu za takve zbirove nije mogućno naći, pa je najbolje primijeniti numeričko neposredno izračunavanje za svaki slučaj. Inače se za opšti slučaj može postupiti kao što sljeduje.

Neka na primjer dejstvuje operator $\widehat{B}\,\widehat{Q}$ na funkciju F:

$$\widehat{B}\ \widehat{Q}\cdot F(u) = e^{-\frac{u}{2}}\cdot\int\limits_{0}^{u} b(u')\,e^{-u'}\,du'\cdot\int\limits_{0}^{u'} e^{\int\limits_{u''}^{u'} a(u''')\,du'''}\cdot e^{\frac{3u''}{2}}\cdot a(u'')\,du''\cdot F(u'').$$

Stavimo

$$\Phi(u) = \int\limits_{0}^{u} b(u')\,e^{-u'}\cdot du'\cdot\int\limits_{0}^{u'} e^{\int\limits_{u''}^{u'} a(u''')\,du''}\cdot e^{\frac{3u'}{2}}\cdot a(u''')\,du''\cdot \boldsymbol{F}(u'') \tag{2,9}$$

i

$$S(u') = b(u')\,e^{-\frac{3u'}{2}}\cdot du'\int\limits_{0}^{u'} e^{\int\limits_{u''}^{u'} a(u'')\,du''}\cdot e^{\frac{3u''}{2}}\cdot a(u'')\,du'', \tag{2,10}$$

pa će biti

$$\widehat{B}\ \widehat{Q}\cdot F(u) = \Phi(u)\cdot e^{-\frac{u}{2}}. \tag{2,11}$$

Prema tome je

$$\left(\widehat{B}\ \widehat{Q}\right)^{(2)}\cdot F(u) = e^{-\frac{u}{2}}\cdot\int\limits_{0}^{u} S(u')\,\Phi(u')\,du',$$

$$\left(\widehat{B}\ \widehat{Q}\right)^{(3)}\cdot F(u) = e^{-\frac{u}{2}}\cdot\int\limits_{0}^{u} S(u')\,du'\cdot\int\limits_{0}^{u'} S(u'')\,\Phi(u'')\,du''.$$

Prema postupku navedenom u (2,7) dobiva se sljedeća relacija za članove sa sukcesivnim dejstvom ovih operatora:

$$\sum \left(\widehat{B}\ \widehat{Q}\right)^{(n)} \cdot F(u) = e^{-\frac{u}{2}} \cdot \int\limits_0^u e^{\int_{u'}^{u} S(u'')\,du''} \cdot S(u')\,\Phi(u')\,du'. \tag{2,12}$$

Na sličan način se za obrnuti redoslijed ovih operatora dobiva

$$\sum \left(\widehat{Q}\ \widehat{B}\right)^{(n)} \cdot F(u) = e^{-\frac{3u}{2}} \cdot \int\limits_0^u e^{\int_{u'}^{u} K(u'')\,du''} \cdot K(u')\,\Phi(u')\,du' \tag{2,13}$$

gdje je

$$K(u') = e^{\int_{u'}^{u} a(u'')\,du''} \cdot e^{-\frac{u'}{2}} \cdot a(u') \cdot \int\limits_0^{u'} b(u'')\,e^{\frac{u''}{2}} \cdot du'', \tag{2,14}$$

Veličine a i b se u našem problemu mogu izračunati, kao što će se vidjeti. Kada se one znaju, onda se sve vrste navedenih dobivenih integrala mogu izračunati i numerički.

2.6 — U izračunavanju sume u vezi sa navedenim operatorima naišao sam na rješenje jedne poznate diferencijalne jednačine; ona se nalazi u stručnoj literaturi primijenjene matematike. Kako to nije bez važnosti za matematička izračunavanja, navodim ta izračunavanja u opštijem obliku. Treba, naime, izračunati vrijednost izraza

$$F(z) = \sum_1^{\infty} \left(\int\limits_0^z g(x)\,dx \int\limits_0^x dy \right)^{(n)} \cdot f_1(y) \tag{2,15}$$

Neka je

$$\int_0^z g(x)\,h_j(x)\,dx = f_{j+1}(z), \qquad \int_0^x dy \cdot f_1(y) = h_j(x).$$

Tada je

$$F(z) = \sum_{j=2}^{\infty} f_j(z).$$

Diferencirajmo f i h:

$$g(z)\,h_j(z) = \frac{df_{j+1}(z)}{dz}, \qquad f_1(z) = \frac{dh_j(z)}{dz}.$$

Ali

$$\frac{dh_j \cdot (z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{g(z)} \cdot \frac{df_{j+1}(z)}{dz}\right) = f_j(z),$$

pa je

$$F(z) = \sum_2^\infty \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{g(z)}\frac{df_{j+1}(z)}{dz}\right) =$$

$$= \sum_2^\infty \frac{1}{g(z)}\frac{d^2}{dz^2}f_{j+1}(z) - \frac{1}{g^2(z)}\cdot\frac{df_{j+1}(z)}{dz}\cdot\frac{dg(z)}{dz};$$

$$\sum_2^\infty f_1(z) = \frac{1}{g(z)}\cdot\frac{d^2}{dz^2}\sum_{j=2}^\infty f_{j+1}(z) - \frac{1}{g^2(z)}\cdot\frac{d}{dz}\sum_{j=2}^\infty f_{j+1}(z)\frac{dg}{dz}.$$

Stavimo li

$$S = \sum_{j=3}^\infty f_1(z),$$

biće

$$f_2 + S = \frac{1}{g(z)}\cdot\frac{d^2S}{dz^2} - \frac{1}{g^2(z)}\cdot\frac{dS}{dz}\cdot\frac{dg}{dz}.$$

Poslije redukcije dobiva se diferencijalna jednačina

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{g}\cdot\frac{dS}{dz}\right) = f_2 + S. \tag{2,16}$$

Stavimo li dalje

$$\acute{A} = S + f_2,$$

biće

$$\frac{dS}{dz} = \frac{d\acute{A}}{dz} - \frac{df_2}{dz};\ \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{g}\frac{dS}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{g}\frac{d\acute{A}}{dz}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{g}\frac{df_2}{dz}\right),$$

ili

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{g}\cdot\frac{d\acute{A}}{dz}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{g}\frac{df_2}{dz}\right) = \acute{A};$$

$$f_2 = \int_0^z g(x)\,h(x)\,dx,$$

$$\frac{df_2}{dz} = g(z)\,h_1(z),\ \frac{dh_1}{dz} = f_1(z).$$

Prema tome je

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{g}\cdot\frac{d\acute{A}}{dz}\right) - \acute{A} = f_1(z).$$

Stavimo

$$g\,dz = dt,\ f_1(z) = \varphi(t);$$

tada je

$$g(t)\frac{d^2 A}{dt^2} - A = \varphi(t).$$

Tako se rješenje A dobiva iz slijedeće diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2 A}{dt^2} - k(t).\, A = m(t).$$

Ovo je poznata diferencijalna jednačina, koja je u literaturi često razmatrana (v. na pr. u knjizi: S. A. Scheljkunoff (Šeljkunov): Applied Mathematics for Engineers and Scientists, New York 1948, p. 227).

3. Određivanje dužine usporavanja L_S pri kretanju neutrona kroz smješu od dva elementa

3. 1 — Oblik funkcije f, tj. vjerovatnoće da neutron sudarom promijeni brzinu kao što je u početku navedeno dat je u literaturi, kao što je na pr naznačeno i u Marshakovam pregledu (29) str. 188). Ako se, naime, sa M označi masa jezgra sa kojim se sudara neutron mase m, biće

$$f(\mu, u) = \frac{(M+m)^2}{8\pi M m} \cdot e^{-u} \cdot \delta\left(\mu - \frac{M+m}{2m} \cdot e^{-\frac{u}{2}} + \frac{M-m}{2m} \cdot e^{\frac{u}{2}}\right). \quad (3,1)$$

Ovdje je δ Dirac-ova funkcija sa sljedećim osobinama:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1; \quad \delta(x) = 0 \text{ za } x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(o); \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a).$$

Ako se kao jedinica mase uzme masa neutrona, funkcija (3,1) će biti

$$f(\mu, u) = \frac{(M+1)^2}{8\pi M} \cdot e^{-u} \cdot \delta\left(\mu - \frac{M+1}{2} e^{-\frac{u}{2}} + \frac{M-1}{2} \cdot e^{-\frac{u}{2}}\right) \quad (3,1a)$$

Za slučaj smješe od dva elementa uzmimo da je masa jezgra jednog elementa M, a drugog N. Uvedimo oznake

$$\frac{(M+1)^2}{4M} = \alpha_M; \; \frac{(N+1)^2}{4N} = \alpha_N. \quad (3,1b)$$

Onda je prema (3,1 a)

$$f(\mu_0, u, u') = \frac{\alpha_M}{2\pi} C_M(u') \cdot e^{-(u-u')} \cdot \delta \cdot \left[\mu_0 - \left(\frac{M+1}{2} e^{-\frac{u-u'}{2}} - \frac{M-1}{2} e^{\frac{u-u'}{2}}\right)\right] +$$

$$+\frac{\alpha_N}{2\pi}\left(1-C_M\right)e^{-(u-u')}\delta\left[\mu_0-\left(\frac{N+1}{2}\cdot e^{-\frac{u-u'}{2}}-\frac{N-1}{2}\cdot e^{\frac{u-u'}{2}}\right)\right] \tag{3,2}$$

Pomoću ove funkcije izračunaćemo f_0 i f_1 koristeći navedene osobine Dirac-ove funkcije:

$$f_0(u,u')=\int 2\pi\, d\mu_0 f(\mu_0,u,u')=\alpha_M C_M(u')e^{-(u-u')}+\alpha_N(1-C_M)e^{-(u-u')} \tag{3,3}$$

$$f_1(u,u')=\int 2\pi\, d\mu_0\left[\frac{\alpha_M C}{2\pi}\cdot e^{-(u-u')}\delta(\mu_0-\mu_{1M})+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_N(1-C)}{2\pi}\cdot e^{-(u-u')}\delta(\mu_0-\mu_{1N})\right]=$$

$$=\alpha_M C_M(u')\cdot e^{-(u-u')}\left(\frac{M+1}{2}\cdot e^{-\frac{u-u'}{2}}-\frac{M-1}{2}e^{\frac{u-u'}{2}}\right)+$$

$$+\alpha_N[1-C_M(u')]\cdot e^{-(u-u')}\left(\frac{N+1}{2}\cdot e^{-\frac{u-u'}{2}}-\frac{N-1}{2}\cdot e^{\frac{u-u'}{2}}\right). \tag{3,4}$$

Navedene skraćenice jasne su iz same poslednje relacije.

3.2 — Za nalaženje dužine usporavanja poslužićemo se razvijanjem u red naznačen relacijom (1,16). Uzećemo vrijednosti za $l=0$ i $l=1$. Onda je

$$\varphi_0(y,u)-iy\lambda(u)\varphi_1(y,u)=\int_0^u du'\varphi_0(y,u')f_0(u-u')+\delta(u). \tag{3,5a}$$

$$\varphi_1(y,u)-\frac{iy\lambda(u)}{3}\cdot\varphi_0(y,u)=\int_0^u du'\varphi_1(y,u')f_1(u,u'), \tag{3,5b}$$

gdje uzimamo samo moment nultog i prvog reda.
Razvićemo φ_0 i φ_1 po stepenu od iy:

$$\begin{aligned}\varphi_0(y,u)&=\varphi_{00}(u)-\frac{y^2}{2}\varphi_{02}(u)+\cdots\\ \varphi_1(y,u)&=iy\,\varphi_{11}(u)+\cdots\end{aligned} \tag{3,6}$$

Funkcije $\varphi_{\alpha\beta}(u)$ mogu se razložiti (29) na članove bez i sa $\delta(u)$, odnosno

$$\varphi_{\alpha\beta}(u)=\xi_{\alpha\beta}(u)+G_{\alpha\beta}\delta(u) \tag{3,7}$$

gdje su $G_{\beta\alpha}$ konstante.

Uzećemo iz (3,6) samo navedene prve članove, pa će se (3,5a) i (3,5b) transformirati u

$$\varphi_{00}(u) - \frac{u^2}{2}\varphi_{02}(u) - iy\lambda(u)\cdot iy\varphi_{11}(u) = \int_0^u du' \left[\varphi_{00}(u') - \frac{y^2}{2}\varphi_{02}(u')\right] f_0(u-u') + \delta(u), \qquad (3{,}8)$$

$$iy\varphi_{11}(u) - \frac{iy\,\lambda(u)}{3}\left[\varphi_{00}(u) - \frac{y^2}{2}\varphi_{02}(u)\right] = \int_0^u du'\cdot iy\cdot\varphi_{11}(u) f_1(u,u') \qquad (3{,}9)$$

Izostavimo članove višeg reda u (3,8), pa ćemo imati

$$\varphi_{00}(u) = \int_0^u du'\cdot\varphi_{00}(u')\cdot\varphi_0(u,u') + \delta(u), \text{ ili}$$

$$\xi_{00} + G_{00}\,\delta(u) = \int_0^u du'\,\xi_{00}(u') f(u,u') + \int_0^u du'\,G_{00}\,\delta(u') f_0(u,u') + \delta(u) \qquad (3{,}10)$$

Ova relacija postaje

$$\xi_{00}(u) = \int_0^u du'\,\xi_{00}(u') f_0(u,u') + e^{-u}\left[2\pi\alpha_M\,C(0) + 2\pi\alpha_N(1 - C(0)\right] \qquad (3{,}11)$$

Stavimo li

$$2\pi\alpha_M\,C(u') + 2\pi\alpha_N[1 - C(u')] = A(u') \qquad (3{,}12)$$

dobićemo

$$\xi_{00}(u) = A_0\cdot e^{-u} + \int_0^u du'\cdot\xi_{00}(u')\cdot f_0(u,u') \qquad (3{,}13)$$

Diferenciraćemo jednačinu (3,13) prema poznatom pravilu za diferenciranje integrala:

$$\frac{d\xi_{00}(u)}{du} = -A(o)\,e^{-u} - \int_0^u du'\cdot\xi_{00}(u') f_0(u,u') + \xi_{00}(u) A(u) =$$

$$= -\xi_{00}(u) + \xi_{00}(u)\cdot A(u);$$

$$\frac{\xi'_{00}(u)}{\xi_0(u)} = A(u) - 1\,.$$

Prema tome rješenje naše jednačine ima oblik

$$\xi_{00}(u) = A(0)\cdot e^{q(u)}, \qquad (3{,}16)$$

gdje je

$$q(u)=\int_{o}^{u} 2\pi\Big[\ \alpha_M C(u')+\alpha_N(1-C(u'))-1\Big]du' \tag{3,17}$$

Iz relacije (3,8) nalazi se

$$-\varphi_{02}(u)+2\lambda(u)\cdot\varphi_{11}(u)=-\int_{o}^{u} du'\,\varphi_{02}(u')f\ (u,u'), \tag{3,18}$$

a u vezi sa (3,7) ovo postaje

$$\xi_{02}(u)+G_{02}\,\delta(u)-2\lambda(u)\,\xi_{11}(u)-2\cdot(u)\,G_{11}\delta(u)=$$

$$=\int_{o}^{u} du'\,\xi_{02}(u')f_0(u,u')+\int_{o}^{u} du'\,G_{02}\,\delta(u')f_0(u,u').$$

Na sličan način se dobiva prema (3,9)

$$\varphi_{11}(u)-\frac{\lambda(u)}{3}\varphi_{00}(u)+\frac{\lambda(u)}{3}\frac{y^2}{2}\cdot\varphi_{02}(u)=\int_{o}^{u} du'\,\varphi_{11}(u')f_1(u,u')$$

ili

$$\xi_{11}(u)+G_{11}\delta(u)-\frac{\lambda(u)}{3}\varphi_{00}(u)-\frac{\lambda(u)}{3}G_{00}\,\delta(u)+\frac{\lambda(u)}{3}\xi_{02}(u)+$$

$$+\frac{\lambda(u)}{3}\cdot\frac{y^2}{2}G_{02}\,\delta(u)=\int_{o}^{u} du'\cdot\xi_{11}(u')f_1(u,u')+\int_{o}^{u} du'G_{11}\delta(u')f_1(u,u') \tag{3,19}$$

Upoređenje članova bez i sa Dirac-ovom funkcijom daje

$$\xi_{11}(u)-\frac{\lambda(u)}{3}\xi_{00}(u)=\int_{o}^{u} du'\,\xi_{11}(u')f_1(u,u')+s(u) \tag{3,20}$$

$$\text{i}\qquad G_{11}=\frac{\lambda(o)}{3},\qquad \text{gdje je}$$

$$s(u)=G_{11}\Big\{2\pi\alpha_M C(o)\,e^{-u}\Big[\frac{M+1}{2}\cdot e^{-\frac{u}{2}}-\frac{M-1}{2}\cdot e^{\frac{u}{2}}\Big]+$$

$$+2\pi\alpha_N(1-C(o))\cdot e^{-u}\Big[\frac{N+1}{2}\cdot e^{-\frac{u}{2}}-\frac{N-1}{2}\cdot e^{\frac{u}{2}}\Big]. \tag{3,21}$$

Ovaj izraz se može napisati skraćeno u obliku

$$s(u) = a\, e^{-\frac{3u}{2}} + b\, e^{-\frac{u}{2}}. \tag{3,21'}$$

Relacija (3,20) može se napisati i u obliku

$$\xi_{11}(u) = \frac{\lambda(u)}{3} \cdot e^{q(u)} + s(u) + \int_0^u du'\, \xi_{11}(u')\, f_1(u, u').$$

Stavljajući

$$\frac{\lambda(u)}{3} \cdot e^{q(u)} + s(u) = t(u), \tag{3,22}$$

dobivamo

$$\xi_{11}(u) = t(u) + \int_0^u du'\, \xi_{11}(u')\, f_1(u, u') =$$

$$= t(u) + \int_0^u du' \cdot t(u')\, f_1(u, u') + \int_0^u f_1(u, u')\, du' \int_0^{u'} f_1(u', u'')\, t(u'')\, du'' + \cdots$$

$$= t(u) + \sum_0^{\infty} \int_0^u f_1\, du' \ldots \int_0^{u^{(k-1)}} f_1\left(u, u^{(k)}\right) \cdot t\left(u^{(k)}\right) du^{(k)} \tag{3,23}$$

Stavimo li

$$\sigma(u) = \frac{3\, s(u)}{\lambda(0)}, \tag{3,24}$$

dobićemo za funkciju $t(u)$ sljedeći izraz

$$t(u) = \frac{\lambda(u)}{3} \cdot e^{q(u)} + \frac{\lambda(0)}{3}\, \sigma(u). \tag{3,25}$$

Ako je

$$\xi(u) = 2\, \lambda(u)\, \xi_{11}(u) + \frac{2}{3}\, \lambda^2(0)\, f_0(u) =$$

$$= 2\, \lambda(u)\, \xi_{11}(u) + \frac{2}{3}\, \lambda^2(0) \sum_{j=1}^{m} C_j \cdot (0)\, \alpha_j \cdot e^{-u} =$$

$$= 2\, \lambda(u)\, \xi_{11}(u) + \frac{2}{3}\, \lambda^2(0) \sum_{j=1}^{m} A(0)_j\, e^{-u} =$$

$$= 2\, \lambda(u)\, \xi_{11}(u) + \frac{2}{3}\, \lambda^2(0)\, B, \tag{3,26}$$

gdje je

$$B = \sum_{j=1}^{m} A(o)_j,$$

onda se može izračunati ξ_{02} navedenim zamjenama. Poslije izvršenih algebarskih operacija i uvođenja ranije navedenih operatora (§2), dobiva se

$$\frac{3}{2}\xi_{02}(u) = \lambda^2(u)\, A(o)\, e^{q(u)} + T_2 + \lambda(o)\lambda(u) \sum_{n=o}^{\infty} (\widehat{A}+\widehat{B})^{(n)} \sigma\binom{(u)}{u} +$$
$$+ \lambda(o)\Big[\sum \widehat{D}\cdot\lambda(u)\,\sigma(u) + \sum \widehat{D}\lambda(u) \sum \Big(\widehat{A}+\widehat{B}\Big)^{(n)} \sigma(u)\Big] +$$
$$+ \frac{\lambda(u)}{A(o)} \sum \Big(\widehat{A}+\widehat{B}\Big)^{(n)} \cdot \lambda(u)\, e^{q(u)} + \frac{1}{A(o)} \cdot \sum \widehat{D}\lambda^2(u)\, e^{q(u)} +$$
$$+ \frac{1}{A(o)} \sum \widehat{D}\lambda(u) \cdot \sum \Big(\widehat{A}+\widehat{B}\Big)^{(n)} \cdot \lambda(u)\, e^{q(u)}, \tag{3,27}$$

gdje je

$$T_2 = \lambda^2(0)\, B\Big[e^{-u} + \sum_{n=0}^{k} \int_0^u f_0(u,u')\,du' \ldots \int_0^{u^{(k-1)}} fo(u, u^k)\, e^{-u^{(k)}}\, du^{(k)} \tag{3,28}$$

3.3 — Član T_2 se izračunava ovako:

$$T_2 = \lambda^2(0) B\Big[e^{-u} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^u \sum_{j=1}^{n} c_j(u')\,\alpha_j\, e^{-(u-u')}\cdot du' \ldots$$
$$\ldots \int_0^{u^{(k-1)}} \sum_{j=1}^{n} c_j(u^{(k)}\,\alpha_j\, e^{(u^{(k-1)} - u^{(k)})} e^{-u^{(k)}} \cdot du^{(k)}\Big] =$$
$$= \lambda^2(0) B\Big[e^{-u} + \int_0^u C(u')\, e^{-u}\cdot du' + \int_0^u C(u')\, e^{-(u-u)}\cdot du' \int_0^{u'} C(u'')\, e^{-u'}\, du'' +$$
$$+ \int_0^u C(u')\, e^{-(u-u')}\cdot du' \int_0^{u'} C(u'')\cdot e^{-(u'-u'')}\cdot du'' \int_0^{u''} C(u''')\, e^{-u''}\cdot du''' + \ldots \tag{3,29}$$

gdje je

$$C(u') = \sum_{i=1}^{n} c_j(u')\,\alpha_j \tag{3,30}$$

Relacija (3,29) može se dalje transformirati kao što sljeduje

$$T_2 = \lambda^2(o)\,B\cdot e^{-u}\left[1+\int_0^u C(u')\,du' + \int_0^u C(u')\,du'\cdot\int_0^{u'} C(u'')\,du'' + \right.$$

$$\left. + \int_0^u C(u')\,du' \int_0^u C(u'')\,du'' \int_0^{u''} C(u''')\,du''' + \ldots\right] \tag{3,31}$$

Izraz u uglastoj zagradi iznosi

$$1+\int_0^u C(u')\,du' + \int_0^u C(u')\,du' \int_0^{u'} C(u'')\,du'' + \ldots = e^{\int_0^u C(u')\,du'}, \tag{3,32}$$

što se može dokazati razvijanjem u red, Prema tome je

$$T_2 = \lambda^2(_o)\cdot B\cdot e^{-u}\cdot e^{\int_0^u \sum_{j=1}^n c_j(u')\,\alpha_j\,du'}, \tag{3,33a}$$

gdje je notacijom pod integralom obuhvaćeno više elemenata smješe, što bi pretstavljalo dalje uopštenje našeg slučaja od dva elementa. Vidi se da je principijelno rezultat sasvim sličan. Za naš slučaj je

$$T_2 = \lambda^2(0)\cdot B\cdot e^{-u}\cdot e^{\int_0^u C(u')\,du'}\,. \tag{3,33b}$$

3.4 — Koristeći relaciju (3,27) i izraz za dužinu usporavanja, dobiva se trostruka vrijednost kvadrata dužine usporavanja u obliku

$$3L_s^2 = \lambda^2(u) + \lambda^2(o)\frac{B}{A(o)}\cdot e^{-q(u)}\cdot e^{-u}\cdot e^{\int_o^u C(u')\,du'} +$$

$$+\frac{\lambda(o\;\lambda(u)}{A(o)}\cdot e^{-q(u)}\sum_{n=o}^{\infty}\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)^{(n)}\sigma(u^{(n)}) +$$

$$+\frac{\lambda(o)}{A(o)}\cdot e^{-q(u)}\left[\sum \widehat{D}_\nu\,\lambda(u)\,\sigma(u) + \sum \widehat{D}_\nu\lambda(u)\sum\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{(n)}\cdot\sigma(u)\right] +$$

$$+\lambda(u)\cdot e^{-q(u)}\sum\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)^{(n)}\cdot\lambda(u)\,e^{q(u)} +$$

$$+e^{-q(u)}\sum\hat{D}_\nu\lambda^2(u)\,e^{q(u)}+e^{-q(u)}\sum\hat{D}_\nu\lambda(u)\sum\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{(n)}\lambda(u)\,e^{q(u)} \tag{3,34}$$

Drugi član se može i dalje transformirati, pa dobiva vrijednost

$$\lambda^2(o)\frac{B}{A(o)}\cdot e^{u-\int_o^u C(u')\,du'}\cdot e^{-u+\int_o^u C(u')\,du'}=\lambda^2(o).$$

Tada se dobiva definitivni oblik relacije za dužinu usporavanja :

$$3L_s^2=\lambda^2(u)+\lambda^2(o)+\frac{\lambda(o)\,\lambda(u)}{A(o)}\cdot e^{-q(u)}\sum_{n=o}^{\infty}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{(n)}\sigma(u^n)+$$

$$+\frac{\lambda(o)}{A(o)}\cdot e^{-q(u)}\left[\sum\hat{D}_\nu\lambda(u)\sigma(u)+\sum D_\nu\,\lambda(u)\sum\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^n\sigma(u)\right]+$$

$$+\lambda(u)\cdot e^{-q(u)}\sum\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^n\lambda(u)\,e^{q(u)}+$$

$$+e^{-q(u)}\sum\hat{D}_\nu\,\lambda^2(u)\,e^{q(u)}+e^{-q(u)}\sum\hat{D}_\nu\,\lambda(u)\sum\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^n\cdot\lambda(u)\,e^{q(u)} \tag{3,35}$$

4. Numeričko izračunavanje L_s za vodu

4.1 — Za numeričko izračunavanje dužine usporavanja neutrona kroz smješu elemenata prema dobivenoj formuli može se postupiti na dva načina saobrazno uobičajenom postupku sa formulama za druge slučajeve. Prvi je da se za L_s odmah uzmu aproksimacije redom, pa vidi kolika su poboljšanja i kakvi su rezultati u upoređenju sa postojećim približnim metodima. Drugi je, pak, da se redom uzmu aproksimacije za navedene operatore, ili čak i aproksimativne sume, takođe računajući poboljšanje, odnosno razliku u rezultatu. Tako će se opravdati primjenljivost dobivenih redova.

Napominjemo da su dosad objavljene aproksimacije po ovom pitanju grublje. Navodimo samo onu iz Marshakovog pregleda, gdje se za slučaj vode uzima da je masa jezgra kiseonika beskonačno velika, a varijacija srednje dužine slobodnog puta eksponencijalna, pri čemu je za eksponencijalnost analitički izraz uzet zgodno da bi se mogao integraliti komplikovani izraz, koji se u definitivnoj formuli dobiva. To ipak ne smeta da tamo dobiveni rezultati služe kao brojevi za upoređivanje.

Poći ćemo i mi od nekog stanovišta za usvajanje varijacije srednje dužine slobodnog puta. Kasnije ćemo vidjeti da je za interval energije koji nas interesuje u teoriji usporenja neutrona kod heterogenih nuklearnih reaktora najprostija promjena baš ustvari najbliža realnosti, pa ćemo prosto i matematički sada od nje poći. Vidjećemo i drugu varijaciju. Uzmimo, naime, da je srednja dužina slobodnog puta konstantna i da je naše C konstantno. Kod nas je $u = ln \frac{E_0}{E}$ gdje je E_0 energija fisije (oko $2\,MeV$), a E posmatrana energija. Mi ne uzimamo E promjenljivo, jer bi to važilo za neutrone izvan fisije i njihovog usporavanja.

Prema tome izvršićemo, uz konstantno λ i C, prvu i drugu aproksimuciju za L_s.

4.2 — Posmatraćemo slučaj vode. Osnovne konstante i neke grafičke podatke uzimamo iz publikacije (1).

Potrebne osnovne i izračunate podatke za vodu iznosimo u tablici sa numeričkim vrijednostima (str. 22 i 23) za vrijednosti promjenljive u od 0,693 do 14,14, odnosno za vrijednosti energije od 1 MeV do 0,6119 eV. U tablici su dati i izračunati mikroskopski i makroskopski efektivni presjeci za elemente i za smješu, odnosno za vodonik, kiseonik i za vodu (u početku ovog rada je navedeno da se hemiski spojevi zanemaruju).

Računanja su izvršena prema poznatim stavovima iz nuklearne fizike. Tako se za funkciju a i b dobilo:

$$a(u') = C_H(u') + 38{,}25 \cdot C_0(u'), \quad b(u') = -33{,}75 \cdot C_0(u'). \qquad (4{,}1)$$

Onda je

$$f_0(u, u') = C \cdot e^{-(u-u')} + 4{,}515\,(1 - C) \cdot e^{-(u-u')} =$$

$$= (4{,}515 - 3{,}515\,C)\, e^{-(u-u')}$$

Stavimo

$$4{,}515 - 3{,}515\,C = k, \qquad (4{,}2)$$

pa je

$$f_0(u, u') = k\, e^{-(u-u')} \qquad (4{,}3)$$

Relacija (4,3) služiće nam za sve vrijednosti od u, koje smo naveli u tablici. Zatim nalazimo

$$f_1(u, u') = C \cdot e^{-(u-u')} \cdot e^{-\frac{u-u'}{2}} + 4{,}515\,(1 - C) \cdot e^{-(u-u')} \cdot \left(\frac{17}{2} \cdot e^{-\frac{u-u'}{2}} - \frac{15}{2} \cdot e^{\frac{u-u'}{2}}\right) =$$

$$= e^{-\frac{3}{2}(u-a')} \cdot (4{,}515 - 37{,}38\,C) - (1 - C) \cdot 33{,}86 \cdot e^{-\frac{u-u'}{2}} \cdot$$

TABLICA SA

$u = ln \frac{E_0}{E}$	E	σ_H (barni)	σ_O	$\Sigma_H = N_H \sigma_H$	$\Sigma_O = N_O \sigma_O$
0,693	1 MeV	4,5	8,0	0,30	0,267
1	0,73576 „	5,00	2,8	0,334	0,093
1,47	0,46 „	6,95	14,0	0,33	0,467
2	0,2707	8,6	3,8	0,574	0,127
3	0,09958	12,9	3,5	0,862	0,117
4	0,03663	16,8	3,5	1,122	0,117
5	0,01335	18,0	3,5	1,202	0,117
6	$4{,}951 . 10^3$ eV	20,0	3,8	1,336	0,127
7	$1{,}824 . 10^3$ „	20,0	3,8	1,336	0,127
8	$0{,}671 . 10^3$	20,5	3,8	1,369	0,127
9	$0{,}2468 . 10^3$	20,5	3,8	1,369	0,127
10	90,80 eV	20,6	3,8	1,376	0,127
11	33,41	20,4	3,8	1,363	0,127
12	12,29	20,0	3,78	1,336	0,126
13	4,521	20,0	3,78	1,336	0,126
14	1,663	20,3	3,8	1,356	0,127
14,14	1,44	20,6	3,8	1,376	0,127
15	0,6119	21,8	3,8	1,456	0,127

Stavimo

$$\left.\begin{aligned} 4{,}515 - 37{,}38\,C &= \beta \\ (1 - C)\,33{,}86 &= \gamma \end{aligned}\right\}, \tag{4,4}$$

pa će važna funkcija f_1 biti

$$f_1(u, u') = \beta \cdot e^{-\frac{3}{2}(u-u')} - \gamma \cdot e^{-\frac{u-u'}{2}} . \tag{4,5}$$

Dalje je

$$q(u) = \int_0^u 2\pi \{\alpha_M C(u) + \alpha_N [1 - C(u)] - 1\}\, du = pu, \tag{4,6}$$

gdje je

$$2\pi \cdot 3{,}515\,(1 - C) = p . \tag{4,7}$$

Na sličan način se dobiva

$$\sigma(u) = \sum_{j=1}^{n} \left[a_j \cdot (0) \cdot e^{-\frac{3}{2}u} + b_j(0)\, e^{-\frac{u}{2}} \right] = a\, e^{-\frac{3}{2}u} - b^{-\frac{u}{2}}, \tag{4,8}$$

gdje je

$$a = 2\pi\,[C + 8{,}5 \cdot 4{,}515\,(1 - C)] = 2\pi\,(38{,}38 - 37{,}38\,C),$$
$$b = 33{,}86 \cdot 2\pi .$$

NUMERIČKIM VRIJEDNOSTIMA

$\Sigma_{tot.}$	$\lambda(u)$	$C_H(u) = \frac{\Sigma_H}{\Sigma} = \frac{\lambda(u)}{\lambda_H(u)}$	$C_0(u) = \frac{\Sigma_0}{\Sigma}$	$a(u') = C_H(u') + 38{,}25\, C_0(u')$	$b(u') = -33{,}75\, C_0(u')$
0,567	1,764	0,529	0,471	22,28	— 19,777
0,427	2,342	0,782	0,218	18,016	— 15,886
0,797	1,255	0,414	0,586	9,120	— 7,357
0,701	1,427	0,819	0,181	7,742	— 6,109
0,979	1,021	0,881	0,119	5,433	— 4,016
1,239	0,807	0,906	0,094	4,501	— 3,172
1,319	0,758	0,9113	0,089	4,315	— 3,004
1,463	0,6835	0,913	0,087	4,241	— 2,936
1,463	0,6835	0,913	0,087	4,241	— 2,936
1,496	0,6684	0,915	0,087	4,243	— 2,936
1,496	0,6684	0,915	0,087	4,243	— 2,936
1,503	0,665	0,915	0,085	4,166	— 2,869
1,490	0,671	0,914	0,086	4,203	— 2,902
1,462	0,684	0,914	0,086	4,203	— 2,902
1,462	0,684	0,914	0,086	4,203	— 2,902
1,483	0,674	0,914	0,086	4,203	— 2,902
1,503	0,665	0,915	0,085	4,166	— 2,869
1,583	0,632	0,920	0,080	3,980	— 2,700

Uzimajući prvu aproksimaciju za trostruki kvadrat dužine usporavanja prema dobivenoj formuli i uvrštavajući navedene veličine i izraze, dobiva sa relacija u kojoj figuriraju sljedeći integrali:

$$J_1 = \int_0^u \left(\beta e^{-\frac{3}{2}(u-u')} - \gamma e^{-\frac{u-u'}{2}}\right)\left(a e^{-\frac{3u'}{2}} - b e^{-\frac{u'}{2}}\right) du',$$

$$J_2 = \int_0^u k \cdot e^{-(u-u')} \cdot \lambda(u') \cdot \left(a e^{-\frac{3u'}{2}} - b e^{-\frac{u'}{2}}\right) du',$$

$$J_3 = \int_0^u k \cdot e^{-(u-u')} \cdot \lambda \, du' \int_0^{u'} \left[\beta e^{-\frac{3}{2}(u'-u'')} - \gamma \cdot e^{-\frac{u'-u''}{2}}\right] \cdot \left[a e^{-\frac{3u''}{2}} - b \cdot e^{-\frac{u''}{2}}\right] du'',$$

$$J_4 = \int_0^u \left[\beta \cdot e^{-\frac{3}{2}(u-u')} - \gamma \cdot e^{-\frac{u-u'}{2}}\right] \lambda(u') \cdot e^{pu'} \cdot du', \tag{4,9}$$

$$J_5 = \int_0^u k \cdot e^{-(u-u')} \cdot \lambda^2(u') \cdot e^{pu'} \cdot du',$$

$$J_6 = \int_0^u k \cdot e^{-(u-u')} \cdot \lambda(u') du' \cdot \int_0^{u'} \left[\beta \cdot e^{-\frac{3}{2}(u'-u'')} - \gamma \cdot e^{-\frac{u'-u''}{2}}\right] \cdot \lambda(u'') e^{pu''} du''.$$

Izračunavanje ovih integrala ne pretstavlja teškoće, a numeričku primjenu smo uzeli samo za $u = 14{,}14$, tj. za enregiju rezonancije indijuma, a to je uobičajena energija detekcije. Odgovarajuća energija ovome u iznosi 1,44 eV. Postupak je i za ostale vrijednosti isti, ali u to zbog velike računske opširnosti nećemo ulaziti. I onako ne donosi neke uticajne podatke. Za konstantnu vrijednost srednje dužine slobodnog puta prema navedenim numeričkim vrijednostima i odgovarajućim dijagramima iz (1) usvajamo $\overline{\lambda}_{H_2O} = 0{,}670$ cm.

Na taj način se poslije svih numeričkih zamjena i računanja za dužinu usporavanja neutrona kroz vodu sa odabranim konstantnim λ dobiva 5,9 cm.

Ovaj rezultat je nešto veći od rezultata datog u (29) (tamo je 5,3 cm. prema teoriji intervala, str. 238).

Još ne možemo sasvim tvrditi koji je rezultat bolji. Naša formula je bolja, ali smo mi za $3L_s^2$ uzeli samo prvu aproksimaciju i konstantno λ, a tamo je jezgro kiseonika uzeto beskonačuo veliko i upotrebljena eksponencijalna zavisnost za λ. Eksponencijalni oblik je podesan i zbog lakšeg integriranja dobivenih izraza. Svakako, rezultati nisu mnogo različiti.

4.3. — Druga aproksimacija za L_s dobiva se prema našoj formuli na sličan način kao prva uz uzimanje narednih štrihovanih članova i zamjenom navedenih izraza.

Zamjenom navedenih izraza i numeričkim izračunavanjem sa istom tačnošću kao kod prve aproksimacije dobiva se za dužinu usporavanja neutrona u vodi oko 5,93 cm. Vidi se da popravka prve aproksimacije nije velika, te se dobiveni izrazi za slučaj pretpostavke konstantne srednje dužine slobodnog puta (odnosno konstantnog C) mogu sasvim uspješno primijeniti. Naravno, numerička izračunavanja su prilično glomazna, ali ne više nego prema ranije postojećim meni poznatim formulama i za jedan element, gdje se upotrebljavaju drugi operatori i transformacije. No, pri izračunavanju druge i aproksimacije višeg reda može se pribjeći neposrednoj zamjeni već izračunatog integrala u sljedećem članu dotičnog reda, sa tom razlikom što se u narednom članu dometne jedan apostrof više na promjenljivu u.

4.4 — Posmatrajući dijagrame efektivnih presjeka i srednjih dužina slobodnog puta u funkciji energije za razne elemente (na pr. u pomenutoj publikaciji) vidi se da bi linearna varijacija dosta dobro odgovarala, samo je za svaki slučaj treba podesno izabrati. Naročito se uočava mogućnost takvog aproksimiranja u intervalu koji nas interesuje u teoriji nuklearnih reaktora, Imajući u vidu smješu uopšte, uzetu proizvoljno, reklo bi se da će se naići na velike teškoće prilikom integriranja, te bi se eventualno moralo pribjegavati daljim aproksimacijama. Međutim, za one smješe koje nas interesuju najlakše je i najbrže izračunati odgovarajuća C, odnosno prema datim u, odnosno E, pa iz dijagrama vidjeti varijaciju i najbolju aproksimaciju. Glavno je da se nađe adekvatan analitički izraz prema postojećem dijagramu. Za veće intervale energije pribjegava se eksponencijalnom obliku, koji je ponekad u literaturi skoro proizvoljan, pa to naravno utiče i na tačnost rezultata.

Nas ovdje prvenstveno interesuje voda. Ako pogledamo numeričke vrijednosti za $C_H(u)$, odnosno za $C_0(u)$ odmah uočavamo da već od $u = 4$, pa sve do $u = 15$ tj. od $E = 30\,keV$, pa do termičke energije, te veličine pretstavljaju konstante i to prilično precizno. Slično tome važi i za λ. A za nas je taj interval dosta velik. To znači da naša prva pretpostavka, da su sve to konstantne vrijednosti, koja je mogla doći i zbog prvobitne matematičke simplifikacije, nije daleko od preciznosti postojećeg nivoa teorije u ovoj oblasti, zuzev pri visokim energijama reda od nekoliko *MeV*.

Za slučaj rezonantnih oblasti energije, koje su uglavnom izvan intervala koji nas kod moderatora interesuje, najefikasnije je postojeću varijaciju opet zamijeniti pravoliniskom poslije grafičkog integriranja, kako bi se špicevi kompenzirali različitim otsjecima i nagibom prave, koja zamjenjuje postojeći oblik. Isto tako bi se mogao uzeti parabolički oblik varijacije iako bi se unekoliko komplikovali postojeći izrazi pod iitegralima, ali se načelno takvi integrali mogu izračunati. Kaptažu neutrona pritom ne uzimamo u obzir, ali ni pretenzije naše formule nisu takve da ona važi za sve intervale bez ikakvih popravki, poboljšanja i dopuna.

Posmatrajući vrijednost varijacije srednje dužine slobodnog puta kod vode u funkciji od u odmah se uočava i jedna „grba" pri 0,8 — 1 *MeV*, ali nju nećemo uzimati u obzir. Bilo bi interesantno izračunati uticaj te grbe na krajnji rezultat. To bi nas interesovalo kad bismo imali šire energetske intervale i neki specijalni problem u oblasti nuklearnih reaktora, što nije cilj ovog rada. Svakako ta popravka ne bi bila prevelika ni u tom slučaju širih intervala. Onda bi se moralo pribjeći i eksponencijalnom obliku prikazivanja. Taj oblik je uobičajen u literaturi za šire intervale, pa ćemo ga ovdje samo uzgred upotrijebiti, jer dobro potvrđuje primjenljivost naše formule za dužinu usporavanja. Napomijnemo, međutim, da je linearni oblik, kada se dobro izabere, ipak bolji od eksponencijalnog, ali je, kao što je rečeno, sa ovim poslednjim lakse integrirati.

Dakle, linearnost se svodi na najprostiji slučaj konstantnosti λ, odnosno C. U svakom slučaju, kakva god se forma analitičkog izraza uzela, postupak je uglavnom isti kao navedeni, samo se integrali razlikuju, ali se u principu mogu izračunati. Ako uzmemo nešto manju vrijednost za λ, na pr. 0,65 cm, poslije zamjene i izračunavanja dobićemo za dužinu usporavanja 5,4 cm, što znači da nije uzet dovoljno u obzir gornji dio našeg intervala, pa se dobila znatno niža vrijednost, što je potpuno razumljivo, jer se i prema formuli vidi osjetljivost dužine usporavanja na promjene srednje dužine slobodnog puta. Ovo takođe potvrđuje pravilnost naše formule.

4.5 — Eksponencijalna aproksimacija daje prema postojećim dijagramima kao na pr. ((29) str. 236 i 238) (što je opšte poznato) za kiseonik gustine 1 g/cm^3 relaciju

$$\lambda(u) = 6{,}50 + 40{,}3 \cdot e^{-2{,}68\,u} \text{ pri } E_0 = 3\,MeV,$$

a za vodonik

$$\lambda(u) = 0{,}655 + 10{,}25 \cdot e^{-0{,}64\,u} \text{ pri } E_0 = 5\,MeV.$$

Pri prvoj aproksimaciji dobiva se $L_s = 6{,}2$ cm, a pri drugoj $L_s = 6{,}26$ cm Ovi rezultati pokazuju neznatnu razliku među prvom i drugom aproksimacijom u našoj formuli, a s druge strane korišćenjem naše formule dobivaju se nešto veće vrijednosti za L_s od vrijednosti dobivenih ranije prema pretpostavci da je masa jezgra kiseonika beskonačno velika. Treba imati u vidu i veći energetski interval, koji se uglavnom iznosi u literaturi opšte nuklearne fizike.

To opet potvrđuje bolju efikasnost naše formule od ranijih makar sa uzimanjem malog broja prvih članova u dva reda sa naznačenim integralima. Numerički bi se moglo izvesti da s druge strane T_7 i T_3 pretstavljaju male veličine u odnosu na dominirajuće članove u izrazu za L_s.

Mišljenja smo da je u čitavoj ovoj teoriji ponajgrublja aproksimacija bila u relacijama (2,6), koju čine uglavnom svi današnji teoretičari. Ali, jasno je na kakve se komplikacije nailazi uzimanjem daljih članova tamo dobivenih redova.

5. Prostorni momenti višeg reda i gustina neutrona

5.1 — Iz osnovne modifikacije jednačine (1,4) vidi se da se prostorna raspodjela neutrona, odnosno gustina neutrona, može izračunati kada se znaju prostorni momenti. Kao što je u početku navedeno, problem je principijelno potpuno riješen kada se znaju izrazi za te momente. U prethodnom izlaganju smo se zadržali uglavnom na drugom prostornom momentu, jer je on najvažniji za određivanje dužine usporavanja i ostalih veličina koje su sa njom povezane.

Izračunavanje prostornih momenata višeg reda za razne sredine, bez naznačenja sastava, osim nekih svojstava povezanih sa stepenom apsorpcije, uglavnom su se najviše bavili Placzek i njegovi saradnici (Placzek G., Manhattan Project Report A-25) za kretanje neutrona kroz jedan element i uz konstantnu dužinu slobodnog puta. Njegov rad citiram prema drugoj literaturi, jer mi sam rad nije bio pristupačan, ali su rezultati tog rada objavljeni u „Reviews of Modern Physics". Za smješu je izračunavao momente višeg reda I. Waller (I. Waller, Arkiv for Mat. Astr. o. Fys. 34A, 5/1946). I on u svojem radu pretpostavlja konstantnu srednju dužinu slobodnog puta za sve elemente smješe. Takođe je i Marshak izračunavao momente višeg reda, od kojih mu je formula za moment četvrtog reda, uz eksponencijalnu varijaciju srednje dužine slobodnog puta, toliko duga da je nije naveo u pomenutom radu. Waller je prišao problemu sa manjom strogošću i preciznošću, nego što je pokazao osnovnom jednačinom, pa su mu i rezultati dosta grubi. On je izvršio upočetku izvjesne simplifikacije jednačine, kako bi mu matematički rad bio jednostavniji. Naravno, treba imati u vidu da je Wallerov rad objavljen 1946 godine, dok je detaljna informacija o ovoj oblasti, pristupačna u cjelini opštoj javnosti, data kasnije a naročito u (29).

Mi smo našli opštu relaciju za moment reda $2n$ slično postupku navedenom pri dobivanju L_s.

5.2 — Prostorni moment reda $2n$ definisan je poznatom relacijom

$$\left[\overline{z^{(2n)}(u)}\right] = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^{2n} \cdot dz \int d\Omega\, \psi(z, \mu, u)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int d\Omega\, \psi(z, \mu, u)} \qquad (5,1)$$

koja se prema navedenim Fourierovim transformacijama svodi na relaciju

$$\left[\overline{z^{(2n)}(u)}\right] = \frac{\varphi_0^{(2n)}(u)}{\varphi_0^{0}(u)}. \tag{5,2}$$

Ove jednačine su identične sa (1,5) i (1,19).

Za dobivanje opšteg izraza za prostorni moment reda $2n$ poći ćemo od ranije dobivenog sistema integralnih jednačina (1,16). Opšta integralna jednačina za funkciju φ_l data je relacijom (1,16), odnosno φ_o relacijom (1,17).

Zamjena

$$\varphi_l(y, u) = \sum_{k=l,\ l+2,\ l+4 \dots}^{\infty} \frac{i^{(k)} \varphi_l^{(k)}(u) \cdot y^k}{k!} \tag{5,3}$$

daje

$$\Sigma \frac{i^k \varphi_l^{(k)}(u) y^k}{k!} - \frac{i y \lambda(u)}{2l+1} \left[l \Sigma \frac{i \cdot \varphi_{l-1}^{(k-1)}(u) y^{k-1}}{(k-l)!} + (l+1) \Sigma i \cdot \varphi_{l+1}^{(k+1)}(u) \frac{y^{k+1}}{(k+l)!} \right] =$$

$$= \int_0^u du' \cdot \Sigma \frac{i^k \cdot \varphi_l^{(k)}(u) \cdot y^k}{k!} f_l(u, u') \tag{5,4}$$

Funkcije $\varphi_l^{(k)}$ možemo prikazati u obliku

$$\varphi_l^{(k)} = \xi_l^{(k)} + G_{lk} \cdot \delta(u) \tag{5,5}$$

Tada (5.4) postaje

$$\sum \frac{[\xi_l^{(k)}(u) + G_{lk}\, \delta(u)]\, y^k}{k!} - \frac{y \lambda(u)}{2l+1} \left[l \sum \frac{\xi_{l-1}^{(k)}(u) + G_{(l-1)(k-1)}\, \delta(u)}{(k-1)!} \cdot y^{k-1} - \right.$$

$$\left. -(l+1) \sum \frac{\xi_{l+1}^{(k+1)}(u)\, G_{(l+1)(k+1)}\, \delta(u)}{(k+1)!} \right] y^{k+1} =$$

$$= \int_0^u du' \sum \frac{\xi_l^{(k)}(u) + G_{lk}\, \delta(u)}{k!}\, y^k \cdot f_l(u, u') \tag{5,6}$$

Upoređenje koeficijenata uz iste stepene y^k i bez δ daje

$$\sum \frac{\xi_l^{(k)}(u)}{k!} - \frac{\lambda(u)}{2l+1} \left[l \sum \frac{\xi_{l-1}^{(k-1)}(u)}{(k-1)!} \right] = \int_0^u du' \sum \frac{\xi_l^{(k)}(u)}{k!} f_l(u, u') + S(u) \tag{5,7}$$

gdje je

$$S(u) = \int_0^u du' \cdot \sum \frac{G_{lk}\, \delta(u)}{k!} f_l(u, u'), \tag{5,8}$$

što se uz dati izraz $f_1(u, u')$ može izračunati.

Stavljajući $l = 0, k = 2n$, izlazi

$$\sum_0^\infty \frac{\xi_o^{(2n)}(u)}{(2n)!} = \int_o^u du' \sum \frac{\xi_0^{(2n)}(u')}{(2m)!} f_0(u, u') + S(u). \tag{5,9}$$

Prema ranije navedenom postupku dobiva se

$$\xi_{00} = e^{q(u)} \tag{5,10}$$

Uzmemo li da je

$$\sum_0^\infty \frac{\xi_o^{(2n)}(u)}{(2m)!} = X(u), \quad \text{ili} \quad x(u) = \frac{\xi_0^{(2u)}(u)}{(2n)!}, \tag{5,11}$$

ostaće

$$x(u) = \int_o^u du' \cdot x(u') f_0(u, u') + s(u) \tag{5,12}$$

gdje se $s(u)$ odnosi ne na sumu, nego na $2n$-ti član u (5,8).

Rješenje integralne jednačine (5,12) glasi

$$x(u) = s(u) + \int_o^u f_0(u, u') s(u') du' + \int_o^u f_0(u, u') du' \cdot \int_o^{u'} f_0(u', u'') s(u'') du'' + \dots \tag{5,13}$$

Prema tome je srednja vrijednost traženog prostornog momenta reda **$2n$**:

$$\left[\overline{z^{(2n)}(u)}\right] = e^{-q(u)} \cdot \left[s(u) + \int_0^u f_0(u, u') s(u') du' + \int_0^u f_0(u, u') du' \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^u f_0(u', u'') s(u'') du'' + \dots \right] \tag{5,14a}$$

ili

$$\left[\overline{z^{(2n)}(u)}\right] = e^{-q(u)} \cdot \sum_{k=0}^\infty \int_o^{u^{(k)}} f_0\left((u. u^{(k)(k+l)}\right) s\left(u^{(k+l)} \right) du^{(k+l)} \tag{5,14b}$$

Oblik funkcije s (u) može biti komplikovan, pa se može naići na integrale koje je teško izračunavati, ali se uglavnom i onda može pribjeći aproksimativnim metodima.

5.3 — Kada se znaju prostorni momenti može se izračunati i funkcija raspodjele neutrona $\psi_0(z, u)$ prema stavovima iz teorije vjerovatnoće. Na tim pitanjima je u teoriji vjerovatnoće radio Pirson. Tako se prema dobivenim opštim relacijama za momente može dobiti izraz za gustinu neutrona u posma-

tranom mjestu sredine koja je ispunjena smješom elemenata, a što se odražava naročito na oblik funkcije $f_0(u, u')$ i $s(u)$.

Zbog glomaznosti formula nećemo ulaziti u ta računanja, jer nas taj problem ovdje ne interesuje s obzirom da je uopšte za sredinu bez apsorpcije i sa apsorpcijom aproksimativno izračunat. Utoliko prije je taj postupak opravdan, što se sve te raspodjele uglavnom nalaze blizu jedna drugoj, a sve zajedno blizu Gaussove raspodjele.

Gustina neutrona se može izračunati sa dovoljnom aproksimacijom uzimajući momente oko $\overline{z}$ kao početka, tako da je $\overline{z} = 0$, $\overline{z^2} = \sigma^2$ itd., gdje je σ^2 disperzija raspodjele ψ, odnosno σ standardna devijacija. Tada se može primijeniti relacija koju je dao F. Zernike (43). Ta relacija glasi uz naše notacije

$$\psi_0(z, u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{c_k}{k!} H_k\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right] \tag{5,15}$$

gdje su H_k Hermite-ovi polinomi. Konstante c_k imaju vrijednosti (43.):

$$c_3 = \frac{\overline{z^3}}{\sigma^3},\ c_4 = \frac{\overline{z^4}}{\sigma^4} - 3,\ c_5 = \frac{\overline{z^5}}{\sigma^5} - 10,\ c_6 = \frac{\overline{z^6}}{\sigma^6} - 15\frac{\overline{z^4}}{\sigma^4} + 30. \tag{5,16}$$

Ovdje $\overline{z^k}$ pretstavlja odgovarajuće srednje vrijednosti, koje su ranije navedene

6. Dužina ekstrapolacije u sfernoj šupljini

6.1 — Pri proučavanju varijacije gustine neutrona važno je znati odnos među gustinama u raznim tačkama. Opštost izlaganja se ne gubi kada se pribjegne slučajevima sa sfernom simetrijom. Tako se gustina ψ izračunava u funkciji radijus-vektora $\vec{r}$. U literaturi (6a, str. 5) je poznata sljedeća integralna jednačina koja prikazuje vezu među gustinom u tačkama sa $\vec{r}$ i $\vec{r}'$.

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{V_{r'}(r)} \psi_0(\vec{r}') \frac{e^{-\rho}}{\rho^2} \, dV_{r'}, \tag{6,1}$$

gdje je $\rho = |\vec{r} - \vec{r}^1|$.

U slučaju sredine koja pomalo apsorbuje, integralna jednačina će glasiti (7a, str. 3)

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{1-\alpha}{4\pi} \iiint\limits_{V_{r'}} \psi_0(\vec{r}') \frac{e^{-\rho}}{\rho^2} \, dV_{r'} \tag{6,2}$$

gdje je α odnos efektivnog presjeka zahvata (kaptiranja) i totalnog efektivnog presjeka. Integralna jednačina (6,1) važi i za slučaj neke sredine u kojoj se nalazi „crna“ lopta, tj. lopta koja apsorbuje sve neutrone koji uđu u tu šupljinu.

Vrlo aktuelan problem je raspodjela neutrona na graničnim površinama među sredinom koja samo raštrkava ili i pomalo apsorbuje i „crnom" sredinom koja inače potpuno apsorbuje neutrone. Nas interesuje sredina koja samo raštrkava, a u slučaju male apsorpcije treba se služiti integralnom jednačinom (6,2), što ne pretstavlja veliku razliku u postupku.

Poznato je da je dužina ekstrapolacije ono rastojanje na kojem se gustina neutrona pri graničnoj površini smanji do nule. Označimo je sa d. Onda je prema definiciji (10, str. 2).

$$d = \left.\frac{\psi}{\psi'}\right)_{\text{na gran. površini}} \tag{6,3}$$

Odmah se vidi da su i u brojiocu i u imeniocu granične vrijednosti funkcija, pa njih treba i izračunavati.

Za ravnu graničnu površinu problem je detaljno proučen. To je tzvi Milne-ov problem u astrofizicici. Rješenje je dato još u Hopfovoj monografij. (16). Daljom razradom i primjenom bavili su se astrofizičari, fizičari i matematičari. Chandrasekar je Hopfovo rješenje primijenio u astrofizici naročito u poslednje vrijeme (od 1945). Na transportnu teoriju neutrona primijenili su ga Placzek, Seidel, Mark, Le Caine i Davison naročito u radovima (33a), (32), (28), (21). Davison (Devison) je svoje radove o tom problemu većinom objavljivao u obliku specijalnih publikacija Komisije za atomsku energiju.

Numerička vrijednost dužine ekstrapolacije izračunata je još u navedenoj Hopfovoj monografiji. Ona iznosi

$$d = 0{,}710446 \tag{6,4}$$

u jedinicama srednje dužine slobodnog puta. Danas se smatra da je to najtačnija numerička vrijednost ekstrapolacione dužine, tj. da je gustina neutrona jednaka nuli na razdaljini $d = 0{,}71\,\lambda_t$, gdje je λ_t srednja dužina slobodnog puta računata u transportnoj teoriji. To se naravno odnosi na ravne granične površine.

6.2 — Međutim, izračunavanju u navedenoj literaturi može se primijetiti da se zasniva na uzimanju samo po dva ili uopšte vrlo malog broja članova u redovima za neke funkcije poslije primjene Laplace-ovih transformacija na osnovu integralnih jednačina. I Loranov i ostali redovi uzeti su samo sa neznatnim brojem prvih članova, a nije se dokazalo da takav postupak ne utiče na vrijednost rezultata u osjetnoj mjeri. Prema tome, ipak se ne može sa velikom odlučnošću tvrditi da je (6,4) najtačnija vrijednost. Ako se, naime, uzme jednostavno prema jednoj od navedenih distribucija bliskih normalnoj asimptotska vrijednost funkcije i njenog izvoda, pa izračuna d, dobiće se vrijednost bliska $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$, što opet nije daleko od vrijednosti (6,4), koja je izračunata na komplikovan način. Prema elementarnoj teoriji difuzije (12) dobiva se $d = \frac{2}{3} = 0{,}67$, što opet nije daleko od vrijednosti (6,4). Dakle, za dužinu ekstrapolacije pri ravnoj graničnoj površini nijedan metod računanja nije bez primjedbe, iako se rezultat (6,4) smatra najtačnijim.

Za druge oblike granične površine među sredinom koja raštrkava i potpunim apsorbentom rezultate je uglavnom dao Davison u svojim radovima, koje navodimo. Rezultati su dati za sferne i cilindrične „crne" šupljine.

Za crnu sfernu šupljinu velikog poluprečnika R u odnosu na srednju dužinu slobodnog puta Davison je u radu (7) dobio red

$$d = 0{,}7104 + 0{,}5047 \cdot \frac{1}{R} + 0{,}2336 \cdot \frac{1}{R^2} - \frac{1}{4R^3} \ln R - 0{,}1704 \frac{1}{R^3} + O\left(\frac{\ln^2 R}{R^4}\right) \quad (6{,}5)$$

Za crnu sfernu šupljinu malog poluprečnika u odnosu na srednju dužinu slobodnog puta dobio je u radu (6) red

$$d = \frac{4}{3} - \frac{5}{9} R - \frac{2}{3}\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) R^2 \ln R - 1{,}4002\, R^2 + O\left(R^3 \ln^2 R\right). \quad (6{,}6)$$

Za beskonačno dugi cilindar velikog poluprečnika u odnosu na srednju dužinu slobodnog puta dobio je u radu (9) red

$$d = 0{,}7104 + 0{,}2524 \cdot \frac{1}{R} + 0{,}0949 \cdot \frac{1}{R^2} - \frac{5}{64} \cdot \frac{\ln R}{R^3} - 0{,}02561 \cdot \frac{1}{R^3} + \quad (6{,}7)$$

$$+ O\left(\frac{\ln^2 R}{R^4}\right)$$

Za beskonačno dugi crni cilindar malog poluprečnika R dobio je zajedno sa Seidelom i Kushneriukom u radu MT-207 red

$$d = \frac{4}{3} + \left(1 - \frac{16}{3\pi^2}\right) R \ln R - 0{,}2164\, R + O\left(R^2 \ln^2 R\right) \quad (6{,}8)$$

Pri svim izračunavanjima primijenili su metod perturbacije, što se jasno vidi prema prvim članovima, koji važe za ravan odnosno za vrlo malu šupljinu. Naravno, član 0,7104 se apriori uzima kao tačan prema Hopfovom rezultatu i utvrđenoj vrijednosti pomoću Laplace-ovih transformacija, bez obzira na umjesnost primjedbe čitavom tom izračunavanju.

6.3 — Za cilindričnu šupljinu nismo našli novi metod i rezultat, ali za crnu loptu smo našli nov rezultat za jednu tačku lakšim načinom izračunavanja. Za slučaj lopte poluprečnika reda srednje dužine slobodnog puta (aproksimativno) dobili smo dosta dobar rezultat.

Proučićemo baš taj slučaj kada je poluprečnik reda veličine srednje dužine slobodnog puta, pa ih matematički možemo izjednačiti. Onda integralna jednačina za odnos među gustinama neutrona glasi prema (6,1)

$$\psi_0(r) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{r'}{r} \psi_0(r')\, dr' \int_{|r-r'|}^{\sqrt{r^2-1}+\sqrt{r'^2-1}} \frac{e^{-\rho}\, d\rho}{\rho}, \quad (6{,}9)$$

gdje se kao zapremina $V_{r'}$ u (6,1) uzima sva zapremina, koju ne zagrađuje crna lopta kada se računa od pojedinih tačaka prema vrhu konusa. Odavde je kao tamo u navedenoj publikaciji

$$r\psi_0(r) = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} r'\psi_0(r')\,dr' \int_{|r-r'|}^{\sqrt{r^2-1}+\sqrt{r'^2-1}} \frac{e^{-\rho}\cdot d\rho}{\rho} \qquad (6,10)$$

U slučaju proizvoljnog poluprečnika šupljine biće (6a)

$$r\psi_0(r) = \frac{1}{2}\int_R^{\infty} r'\psi_0(r')\,dr' \int_{|r-r'|}^{\sqrt{r^2-a^2}+\sqrt{r'^2-a^2}} \frac{e^{-\rho}d\rho}{\rho}. \qquad (6,10)$$

Relacija (6,10) može se napisati u obliku sličnom onom u (6a)

$$r\psi_0(r) = \int_1^{\infty} r'\psi_0(r')\,dr'\left[E(|r-r'|) - E\left(\sqrt{r^2-1}+\sqrt{r'^2-1}\right)\right], \qquad (6,11)$$

gdje E pretstavlja specijalnu funkciju, koja je uopšte definisana relacijom

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xt},\ t^{-n}\cdot dt. \qquad (6,12)$$

Kada ne bi bilo šupljine, onda bi $\psi_0(r)$ težilo konstatnoj vrijednosti. Da bi se imalo jezgro integralne jednačine simetrično u odnosu na r i r' treba tu konstantnu vrijednost izabrati u zgodnom obliku. Uvrštenjem funkcije q (r) može se staviti

$$\psi_0(r) = \psi_0(\infty) + \frac{q(r)}{r}\,\psi_0(\infty) = \frac{\psi_0(\infty)}{r}[r+q(r)]. \qquad (6,13)$$

Zamjena daje

$$\psi_0(\infty)\,[r+q(r)] = \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\psi_0(\infty)\,[t+q(t)]\,dt\left[E(r-t) - E\left(\sqrt{r^2-1}+\sqrt{t^2-1}\right)\right],$$

$$r+q(r) = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} t\,dt\left[E(r-t) - E\left(\sqrt{r^2-1}+\sqrt{t^2-1}\right)\right] + \qquad (6,14)$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^{\infty} q(t)\,dt\left[E(r-t) - E\left(\sqrt{r^2-1}+\sqrt{t^2-1}\right)\right],$$

gdje je umjesto r' uzeta promjenljiva t zbog lakšeg pisanja.
Dalje je:

$$q(r)=\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}q(t)\,dt\left[E(|r-t|)-E\sqrt{r^2-1}+\sqrt{t^2-1})\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}t\,E(r-t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}t\,E(\sqrt{r^2-1}+\sqrt{t^2-1})\,dt.$$

Primjenjujući dalje definiciju funkcije E dobiva se

$$q(r)=\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}q(t)\,dt\,[E(|r-t|)-E(\sqrt{r^2-1}+\sqrt{t^2-1})-$$

$$-\frac{1}{2}\left[E_3(r-1)-E_2(r-1)\right]+\frac{1}{2}E_3\sqrt{r^2-1}). \tag{6,15}$$

Za R = 0 poslednja dva člana se poništavaju. Isti takav rezultat dobio bi se i u slučaju vazdušne šupljine umjesto crne šupljine, jer sferna šupljina u materijalu ne izaziva promjene u gustini neutrona ako je ta gustina konstantna kada nema te šupljine.
Za funkciju

$$q(r)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}q(t)\left[E\ r-t)-E(r+t)\right]dt+f\ r), \tag{6,16}$$

biće u beskonačnosti

$$q(\infty)=3\int_{0}^{\infty}r\,f\,(r)\,dr. \tag{6,17}$$

To je dokazano na više mjesta, kao na pr. u radu (6). To se može izvesti i elementarnim posmatranjima. Naime, gustina neutrona na rastojanju r od izvora iznosi $\frac{f(r)}{r}$. Svi izvori ravnomjerno raspoređeni davaće količinu

$$Q=\int_{0}^{\infty}\frac{f(r)}{r}\cdot 4\pi r^2 dr=4\pi\int_{0}^{\infty}r\,f(r)\,dr.$$

S druge strane se može uzeti da je

$$q(\infty)=\frac{3Q}{4\pi}=3\int_{0}^{\infty}r\,f\,(r\ dr, \tag{6,18}$$

(vidjeti na pr. (12), (pa se ova relacija može slobodno upotrebljavati. Onda je

$$q(r) = \frac{1}{2}\int_0^\infty q(t)\,dt\,[E(r-t) - E(\sqrt{r^2-1} + \sqrt{t^2-1})] + \varphi_3(r)$$

gdje je

$$\varphi_3(r) = \frac{1}{2}\Big[E_3(r-1) - E_2(r-1) - E_3(\sqrt{r^2-1})\Big].$$

Međutim, granice integrala u našem slučaju su 1 i ∞ (u opštem slučaju bile bi R i ∞), a mi imamo relaciju (6,16) za granice 0 i ∞. Transformiraćemo izraz (6,19) u izraz sa granicama u relaciji za E funkciju (6,12). Rezultat je u drugom obliku dat u radu (6), ali bez izvođenja. Ovdje ćemo navesti izvođenje. Prema (6,19) ima se

$$q\,r) = \frac{1}{2}\int_0^\infty q(t)\,dt\,E(r-t) - \frac{1}{2}\int_0^1 q(t)\,dt\,E(r-t) - \frac{1}{2}\int_1^\infty q(t)\,dtE(\sqrt{r^2-1} +$$

$$+\sqrt{t^2-1}) + \varphi_3 = \frac{1}{2}\int_0^\infty q(t)\,dt\Big[E(r-t) - E(r+t)\Big] + \frac{1}{2}\int_0^\infty q(t)\,dt\,E(r+t) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)\,dtE(r-t) - \frac{1}{2}\int_1^\infty q(t)\,dtE(\sqrt{r^2-1} + \sqrt{t^2-1}) + \varphi_3 = \frac{1}{2}\int_0^\infty q(t\,dt$$

$$\Big[E(r-t) - E(r+t)\Big] + \frac{1}{2}\int_1^\infty q\,t)\,dt\,E(r+t) - \frac{1}{2}\int_1^\infty q(t)\,dtE(\sqrt{r^2-1} +$$

$$+\sqrt{t^2-1}) + \varphi_3 = \frac{1}{2}\int_0^\infty q(t)\,dt\Big[E(r-t) - E(r+t)\Big] + \varphi_3 - \frac{1}{2}\Big\{\int_0 q(t)\,dt\Big[E(r-t)$$

$$-E(r+t)\Big] + \int_1^\infty q(t)\,dt\Big[E(\sqrt{r^2-1} + \sqrt{t^2-1}) - E(r+t)\Big]\Big\} \times$$

$$\times\frac{1}{2}\int_0^\infty q(t)\,dt\Big[E(r-t) - E(r+t)\Big] = \varphi_1 \qquad (6,21)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)\,dt\Big[E(r-t) - E(r+t)\Big] + \frac{1}{2}\int_1^\infty q(t)\,dt\Big[E(\sqrt{r^2-1} + \sqrt{t^2-1}) - E(r+t)\Big] = \varphi_2$$

(6,22)

gdje važi cio izraz za φ_2 za slučaj $r > 1$, a sa prvim integralom za $0 < r < 1$. Uzmimo da je

$$\varphi_3 - \varphi_2 = f(r), \tag{6,23}$$

pa ćemo dobiti sistem simultanih integralnih jednačina

$$q(r) = \frac{1}{2}\int_0^\infty q(t)\,dt\,[E(r-t) - E(r+t)] + f(r) \tag{6,24}$$
$$f(r) = \varphi_3 - \varphi_2$$

U sličnom obliku dobili su na drugi način ove jednačine Davison i Marshak.

6.4 — Rješavanje ovog sistema u opštem obliku komplikovan je posao i obavezno sa grubom aproksimacijom. Svi meni poznati metodi su sasvim neprecizni bez obzira na komplikovanost primijenjenog matematičkog aparata.

Mi ovdje dajemo približan metod sličan navedenim u citiranim radovima, ali sa jednostavnijim matematičkim operacijama. Dobiven je rezultat sa manjim brojem prvih članova reda za dužinu ekstrapolacije, no je i taj broj dovoljan pri izračunavanjima.
Primijenićemo relaciju za $q(\infty)$.

$$\begin{aligned} q(\infty) &= 3\int_0^\infty r\,f(r)\,dr = 3\int_0^\infty r(\varphi_3 - \varphi_2)\,dr = \\ &= 3\int_0^\infty r\,dr\,\varphi_3 - 3\int_0^\infty r\,dr\,\varphi_2 = J_1 - J_2 \end{aligned} \tag{6,25}$$

Izračunajmo integral J_1.

$$J_1 = 3\int_0^\infty r\,dr\,\varphi_3 = \frac{3}{2}\int_0^\infty r\,dr\left\{\left[E_3(r-1) - E_2(r-1)\right] - E_3(\sqrt{r^2-1})\right\}.$$

Za funkciju $E_n(t)$ postoji relacija momenata (33):

$$\int_0^\infty t^m E_n(t)\,dt = \frac{m!}{(n+m)}, \tag{6,26}$$

ili za $m = 1$

$$\int_0^\infty t\,E_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}. \tag{6,27}$$

Primijenimo ovu relaciju na J_1.

$$J_1 = \frac{3}{2}\int_0^\infty r\,dr\,E_3(r-1) - \frac{3}{2}\int_0^\infty r\,dr\,E_2(r-1) - \frac{3}{2}\int_0^\infty r\,dr\,E_3(\sqrt{r^2-1}).$$

Stavimo za prva dva člana r — 1 = x, pa je

$$J_1 = \frac{3}{2}\int_0^\infty (1+x)\,dx\,E_3(x) - \frac{3}{2}a\int_0^\infty (1+x)\,dx\,E_2(x) - \frac{3}{2}\int_0^\infty r\,dr\,E_3\,(\sqrt{r^2-1}) =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^\infty dx\,E_3(x) + \frac{3}{2}\int x\,dx\,E_3(x) - \frac{3}{2}\int dx\,E_2(x) - \frac{3}{2}\int x\,dx\,E_2(x) -$$

$$-\frac{3}{2}\int r\,dr E_3(\sqrt{r^2-1}) = \frac{3}{8} - \frac{3}{2}\int_0^\infty r\,dr\,E_3\,(\sqrt{r^2-1}).$$

Da bi se poslednji integral sveo na prostiji oblik, stavimo $\sqrt{r^2-1} = y$, pa taj integral iznosi 3/8.
Tada će se dobiti

$$J_1 = -\frac{3}{4}. \tag{6,28}$$

Tako se za $q(\infty)$ u slučaju „crne“ lopte dobiva

$$q(\infty) = -\frac{3}{4} - 3\int_0^\infty r\,dr\cdot\varphi_2. \tag{6,29}$$

Poslije zamjene i transformacije φ_2 izraz (6,29) dobiva oblik

$$q(\infty) \;\; -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\int_1^\infty \frac{dr}{(r+\sqrt{r^2-1})^2} + O \tag{6,30}$$

gdje 0 pretstavlja članove sa višim stepenima poluprečnika, koji je u ovom slučaju jednak jedinici. Ti članovi se mogu zanemariti, jer nas interesuje samo nekoliko prvih članova za $q(\infty)$.

Integral

$$\int_1^\infty \frac{dr}{(r+\sqrt{r^2-1})^2}$$

može se izračunati elementarnim metodom, recimo zamjenom $r+\sqrt{r^2-1} = u$
Vrijednost toga integrala je 1/3.
Tako je

$$q(\infty) \approx -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + O \qquad (6,31$$

Ekstrapolaciona dužina je za ovaj slučaj

$$d = \frac{\psi_{0as}(R)}{\psi'_{0as}(R)} = \left. \frac{\psi_0(\infty)\left(1 + \frac{q(\infty)}{r}\right)}{\psi_0(\infty)\left(1 - \frac{q(\infty)}{r^2}\right)} \right|_{r=1} = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} - 1 + O \approx \frac{7}{9} = 0{,}77. \tag{6,32}$$

6. 5 — Ovaj rezultat je dobiven na jednostavniji način od dosadašnjih, a slažc se sa Davisonovim i Marshakovim u nekim prvim članovima. Ovdje je za jedinicu uzeta srednja dužina slobodnog puta, kao i poluprečnik crne lopte. Sve promjene za smješu su u gustini neutrona, pa dobiveni rezultat važi za smješu, koja se smatra kao poznata. Vjerovatno se ovaj rezultat može proširiti na crnu loptu poluprečnika u širim granicama oko jedinice.

Iz relacije (6,5) i (6,6) vidi se da su vrijednosti veličine d za veliko R i malo R sasvim različite. Za vrlo veliko R dobiva se 0,7104, a za $R \to 0$ biće $d = 4/3$ To takođe znači da se za vrijednosti R oko srednje dužine slobodnog puta ne može uspješno primijeniti ni jedna od ovih relacija; čak se ne mogu primijeniti ni za čitav jedan interval većih i manjih vrijednosti oko jedinice, odnosno λ. Prema tome postoji izvjestan interval u veličinama R oko srednje dužine slobodnog puta za koji nema podesne relacije. U ovom radu je rezultatom (6,32) nađena jedna vrijednost, koja bi odgovarala jednoj tački toga intervala.

L I T E R A T U R A

1. AECU 20—40, 1952
2. BERNŠTEJN: Teorija vjerojatnostej, 1946 (na ruskom)
3. BOTHE, W.: Zur Theorie der Bremsung von Neutronen, Zeitschrift für Physik, 125, 210 (1948)
4. BARI, N. K.: Teorija rjadov, Moskva 1938
5. CHAPMAN, S. & T. G. COWLING: The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Cambridge, 1952
6. DAVISON, B.: MT-88 (1944, 1947): Influence of a small black sphere upon the Neutron Density in an Infinite Non-capturing Medium

6a. DAVISON, B.: MT-232 (1946): Influence of an Air Gap surrounding a small Black Sphere upon the linear Extrapolation of the Neutron Density in the Surrounding Medium.

7. DAVISON, B.: MT-93 (1944): Influence of a Large Black Sphere upon the Neutron Density in an infinite Non-capturing Medium.

7a. DAVISON, B.: MT-124 (1945) Large Spherical Hole in a slightly Capturing Medium.

8. DAVISON, B.: MT-207 (1946, 1948): Influence of a Small Black Cylinder upon the Neutron Density in an infinite Non-capturing Medium.
9. DAVISON, B.: MT-135 (1945, 1947): Influence of a Large Black Cylinder upon the Neutron Density in an infinite Non-capturing Medium.
10. DAVISON, B. and KUSHNERIUK, S.: MT-214 (1946, 1949): Linear Extrapolation Length for a Black Sphere and a Black Cylinder.
11. FELLER WILLIAM: An Introduction to Probability Theory and its Applacations, New York, 1950.
12. GLASSTONE, S. & EDLUND, M.: The Elements of Nuclear Reactor Theory, New York, 1952.
13. GOODMAN, & COL.: The Science and Engineering of Nuclear Power I & II, Cambridge, Mass. 1949.
14. GROSJEAN CARL, C.: On the Slowing Down of Neutrons (Izdanje Belgiske akademije nauka, 1949, No 13, XI).
15. HARDY, G. H.: Divergent Series, Oxford, 1949.
16. HOPF, E.: Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge Tracts 31 (1934).
17. JEANS, J.: The Dynimical Theory of Gases, Cambridge, 1921.
18. KAŠANIN, R.: Viša matematika II-1, II-2, 1950, Beograd.
19. KENNARD, E. H.: Kinetic Theory of Gases, New York, 1938.
20. LANDAU, L. i LIFŠIC, E.: Kvantovaja Mehanika, Moskva 1948.
21. Le CAINE: Application of a Variational Method to the Milne's Problem, Phys. Rev. 72. 564 (1947).

22. Le CAINE: MT-131: A Table of Integrals involving the Function $E_n(x)$.
23. LEVY, P.: Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris 1948.
24. LOEB, L. B.: The Kinetic Theory of Gases, New York, 1934.
25. LOVITT: Integral Equations, New York, Dover.
26. LYONS, D.: Ueber die Theorie der Diffusion thermischer Neutronen in einer wasserschtoffhaltigen Substanz, Ann. d. Phys. 4, 379 (1949).
27. LYONS, D.: Diffusion thermischer Neutronen, Ann. d. Phys. 8, 156 (1951).
28. MARK, C.: The Neutron Density Near a Plane Surface, Phys. Rev. 72, 558 (1947).
29. MARSHAK, R. E.: Theory of the Slowing down of Neutrons by Elastic Collision with Atomic Nuclei, Rev. of Mod. Phys. 19, 185—238 (1947).
30. MARGENAU, H. & MURPHY, G. M.: The Mathematics of Physics and Chemistry, New York, 1949.
1. MOTT N. F. & MASSEY, H. S. W.: The Theory of Atomic Collisions, Oxford 1950.
32. PLACZEK, G.: The Angular Distribution of Neutrons emerging from a Plane Surface, Phys. Rev. 72, 556 (1947).
33. PLACZEK, G.: MT-1 (1946): The Functions $En(x)$.
33a. PLACZEK & SEIDEL, W.: Milne's Problem in Transport Theory, Phys. Rev. 72, 7, 550 (1947).
34. POMERANČUK, I. i AHIEZER, A.: Nekatorie vaprosi teorii jadra, Moskva, 1950.
35. SMIRNOV, V. I.: Kurs viššei matematiki, Tom III, čast 2, Moskva, 1949.
36. SCHELKUNOFF, S. A.: Applied Mathematics for Engineers and Scientists New York, 1948.
37. SCHMEIDLER, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Leipzig, 1950.
38. SNEDDON, I. N.: Fourier Transforms, New York, 1951.
39. TITCHMARSH, E. C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals Oxford, 1948.
40. USPENSKY, J. V.: Introduction to Mathematical Probability, New York, 1937.
41. WALLER I.: On the Theory of Diffusion and Slowing down of Neutrons, Archiv for Mat. Astr. o. Fys. 34A, 5 (1948).
42. WHITTAKER, E. T. and WATSON, G. N.: A Course of Modern Analysis, 1950.
43. ZERNIKE, F.: Handbuch der Physik, Vol. III, 1928 (prema (29)).

Summary

THEORY OF MOTION OF NEUTRONS THROUGH THE MIXTURE OF ELEMENTS

Dragiša M. Ivanović

This paper treats the problem of slowing down the neutrons through the mixture of two elements of any finite masses and neutrons'distribution at the end of the moderator with a spherical „black" hole. A formula is found for slowing down lenght through the elements of any mass, and the extrapolation length for a special case of black sphere too.

The problem of slowing down of neutrons through one element was successfully treated before (Bothe, Waller and others). The papers in the field of the theory of neutrons were almost unavailable during World war II, and that for many reasons. Marshak's very extensive paper [**29**] had a prominent role for scientific information; a splendid review of results obtained in that field is given there, although a number of names of contributors has not been mentioned.

In the main the cases of heavy elements with special variations of mean free path were treated. The slowing down of neutrons through the mixture of elements is not treated with more exact theory except in special cases; that is through the mixture of hydrogen and an element of indefinite large mass [**29**]. Waller [**41**] treated that problem with less rigorousness and he obtained good results for slowing down through the one element moderator. For the mixture of two or more elements with finite arbitrary masses a formula for slowing down length did not exist.

Using methods given in those papers the author obtained the formula (3,35) for slowing down length of neutrons through the mixture of elements with finite masses.

The author uses the known Boltzmann equation (1,1), which is often used in more exact theory, when it is modified by the introduction of the function (1,3) and finily written in the form (1,4). This relation is used as fundamental for further performance and calculations [**29**].

This equation can be solved in principle if the spatial moments are obtained. It is clear that by their summation one meets very many mathematical complications, and one must have recourse to the approximations.

A suitable method of treating and calculating is the known method of Fourier's transforms, which is given in [**29**]. That method is given in more detail in this paper in section 1.3.

One of the most important quantities in the treatment of slowing down of neutrons is the slowing down length. Its general form is given by the known relation (1,20), which can be also derived according to the elementary theory.

If one takes the mass of neutron as mass unity, M for the mass of the nucleus mass of one element, and N for the mass of the nucleus of the second element, then the function f in our case of arbitrary masses gets the form (3,2), while f_0 and f_1 get the form (3,3) and (3,4). Developping in the series, as is given in (3,2), and introducing the functions s and t one obtains (3,27) where new mathematical operators are given and explained in § 2.

The term T_2 is calculated as given there. Probably, it can be useful in mathematics because of its special form and effectiveness. The relation (3,33a) shows the possibility of its application in the mixture of more elements.

By definite calculation of slowing down length according to the new special forms of functions, the author obtained mathematical operators $\widehat{D}$, $\widehat{P}$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{Q}$, $\widehat{F}$ for which reccursion formulae (2,1), (2,3), (2,4) are given. They can be usefully used in mathematics.The general theorem for sums of the successive effects of operators A and B is not found, but according to the author's opinion the best way is to apply direct numerical calculation for various cases, which is proved to be justified and successful in one practical example. On the other hand the obtained relations (2,12) and (2,14) are useful in the general case. In this paper the general procedure to obtain the spatial moments of higher order (section 5.2) is also given. One uses the system of integral equations (1,16) given in the beginning. After the procedure of substitution and calculation for mean value of spatial moment of degree 2n the relations (5,14a) and (5,14b) are obtained.

The form of function s(u) can be complicated and can cause the integrals which are difficult to calculate, in which case one can take approximations also, which are more precise than usual in special cases of mixture.

If the spatial moments are known, one can calculate the distribution function of neutrons ψ_0 (z, u) according to the theory of probability and that is reflected on functions f_0 and s. The formulae are cumbersome; therefore the author does not give them in this paper.

The form of formula for the slowing down length, which the author obtained, shows that one cannot treat the summability according to customary methods, because of the terms with successive effect of various operators. In the meantime, the numerical calculation shows good applicability of this formula.

The numerical calculation of the slowing down length according to our obtained formula is achieved for water. The form of variation of mean free path is adopted. For the energy interval which is interesting in the reactor theory the best form is a constant. In the table are given respective values of necessary magnitudes. which are in the expression for L_s for varions forms of the variable u. The fundamental constants and some grafical data for water are taken from [1]. In the first approximation after the substitution of respective values the integrals (4,10) are obtained. The value of u is taken for the resonance energy of indium, which is customary energy of detection. It is adopted λ_{H_2O} = 0,670 cm according to [1]. After all substitutions and adopting the constant one obtained 5,9 cm for slowing down length. This result is higher than that given in [29] where 5,3 cm was obtained according to the theory of intervals. But the applicability of this formula is obvious because one obtains the same order of magnitude. The second approximation shown in (4,3) gives 5,93 cm. That shows a near result. The calculations are incontestably cumbersome, but the case is similar with the calculations according all formulae for one element which are known to the author, where other operators and transforms are used.

Analysing the variation of the mean free path one comes to the conclusion that the best way is to find c and after that to look the form of diagram, and according to that to compose an analytical expression. In the case of water one sees that these magnitudes are constant already from u = 4 to u = 15, i. e. from E = 30keV to the thermal energy. The same holds for λ. So the linearity gets constancy, excluding the „hump" in diagram for water. That justifies the adoption of the constant mean free path.

Otherwise, the mathematical operations would be more cumbersome.

In the case of adoption of other variation forms, the procedure is similar, but one meets various integrals. The calculations are performed also for the exponential variation taken from [29] . After laborious numerical calculations the author obtained the values near to the previous for both approximations.

The obtained formula is obviously lengthy as the before known formulae for one element, but it can be successfully applied to various cases.

In proved cases it is numerically shown that T_7 and T_3 are small quantities compared to the dominant terms in the expression for L_s.

In the whole of this theory the roughest approximation is in the relations (2,6), which make, in the main, all theoreticians. It is clear what difficult mathematical complications would arise if further terms in those series were taken.

The author gives also the value for the length of extrapolation at the end of the moderator with „black" spherical hole for a special case when the radius of sphere is of order of magnitude of the mean free path. The method known from the papers of Davison, Placzek, Seidel, Mark, Le Caine and Kushneriuk [7], [6], [9] is used. The author proceides from integral equations these authors have given for various forms and cases. Some results with E function are given particularly in papers [6] and [12] The author gave incidentally the derivation which in these papers was not given; that because of better survey.

In the special case of the same order of magnitude of radius and mean free path, according to methods of these authors, here is obtained d = 0,77 (6,32). The procedure of calculation is more simple than the previous, and the result is in some terms similar to the Davison's and energy of indium, which is customary energy of detection. It is adopted λ_{H_2O} = 0,670 cm according to [1]. After all substitutions and adopting the constant one obtained 5,9 cm for slowing down length. This result is higher than that given in [29] where 5,3 cm was obtained according to the theory of intervals. But the applicability of this formula is obvious because one obtains the same order of magnitude. The second approximation shown in (4,3) gives 5,93 cm. That shows a near result. The calculations are incontestably cumbersome, but the case is similar with the calculations according all formulae for one element which are known to the author, where other operators and transforms are used.

Analysing the variation of the mean free path one comes to the conclusion that the best way is to find c and after that to look the form of diagram, and according to that to compose an analytical expression. In the case of water one sees that these magnitudes are constant already from u = 4 to u = 15, i. e. from E = 30keV to the thermal energy. The same holds for λ. So the linearity gets constancy, excluding the „hump" in diagram for water. That justifies the adoption of the constant mean free path.

Otherwise, the mathematical operations would be more cumbersome.

In the case of adoption of other variation forms, the procedure is similar, but one meets various integrals. The calculations are performed also for the exponential variation taken from [29] . After laborious numerical calculations the author obtained the values near to the previous for both approximations.

The obtained formula is obviously lengthy as the before known formulae for one element, but it can be successfully applied to various cases.

In proved cases it is numerically shown that T_7 and T_3 are small quantities compared to the dominant terms in the expression for L_s.

In the whole of this theory the roughest approximation is in the relations (2,6), which make, in the main, all theoreticians. It is clear what difficult mathematical complications would arise if further terms in those series were taken.

The author gives also the value for the length of extrapolation at the end of the moderator with „black" spherical hole for a special case when the radius of sphere is of order of magnitude of the mean free path. The method known from the papers of Davison, Placzek, Seidel, Mark, Le Caine and Kushneriuk [7], [6], [9] is used. The author proceides from integral equations these authors have given for various forms and cases. Some results with E function are given particularly in papers [6] and [12] The author gave incidentally the derivation which in these papers was not given; that because of better survey.

In the special case of the same order of magnitude of radius and mean free path, according to methods of these authors, here is obtained d = 0,77 (6,32). The procedure of calculation is more simple than the previous, and the result is in some terms similar to the Davison's and

Marshak's. According to (6,5) and (6,6) one sees that the expressions for d are quite different in the case of very large and very small radius of black sphere with respect to the mean free path (0,7104) and (4/3). That means inapplicability of these both these formulae for values of R around mean free path, except with many mathematical difficulties, and that was not attempted according to the author's information. An interval exists around $R = \lambda$ for which there does not exist a good formula. In this paper, with the result (6,32), a value is found, which corresponds to one point of that interval. The possible general formula for a larger interval is not considered.