

**O JEDNOM PROBLEMU STRUJANJA FLUIDA  
KROZ POROZNU SREDINU**

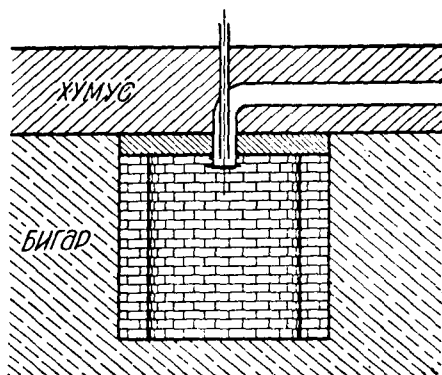
*Ing. Vlastimir M. Vučić i Momčilo Rekalic*

Prilikom izgradnje emanatoriuma za potrebe terapije u Niškoj Banji pokazala se mogućnost da se emanatorium može snabdevati radioaktivnim gasovima iz terena umesto uobičajenog načina dobivanja gasova iz radioaktivnih voda vrela. Dobivanje radioaktivnih gasova iz terena pružalo je daleko povoljnije mogućnosti. Dok su količine radioaktivnih gasova koje su se mogle dobiti iz vode bile ograničene i uslovljavale upotrebu maski za inhaliranje dotle su se iz terena mogle dobiti skoro neograničene količine gasova, sa kojima su se mogle ispuniti i veće prostorije, tako da se inhaliranje može vršiti jednostavnim zadržavanjem u prostorijama, umesto neprijatne upotrebe maski. Sem toga gasovi iz terena su imali oko deset puta veću koncentraciju radona nego oni iz vode. Jasno je da se izgradnja inhalatorijuma orijentisala u pravcu dobivanja gasova iz terena. No tada su se javili novi i specifični problemi oko pronalazanja najpovoljnijeg načina za ekonomično vađenje gasova iz zemlje. Pošto je to bio specifičan slučaj za koji nije postojalo iskustvo u literaturi preduzeta su eksperimentalna ispitivanja na terenu. Ubrzo je ustanovljeno da se radioaktivni gasovi mogu dobivati iz terena na veoma povoljan i jednostavan način zahvaljujući podesnom sastavu terena. Takvo rešenje, međutim, sadržalo je interesantan problem dinamike fluida koji ovde i želimo da iznesemo.

Radioaktivni teren Niške Banje sastoji se iz sedimentnih poroznih slojeva travertina (bigra). Preko ovih slojeva nalazi se površinski sloj humusa, čija je poroznost znatno manja a čija se debljina kreće od 0,5 do 1,5 m. Jako porozni slojevi travertina sadrže radium u koncentracijama koje se kreću do  $1,8 \cdot 10^{-10}$  g. Ra po gramu zemlje. Radioaktivnom transformacijom radiuma permanentno se obrazuje radon koji se kao inertan gas delom izdvaja iz čvrste supstance travertina i zadržava u slobodnom međuprostoru poroznog sloja koji je ispunjen vazduhom. Radon ima kratak period od 3,8 dana a njegovom radioaktivnom transformacijom obrazuju se dalji članovi radioaktivnog niza koji su čvrsta tela i ostaju u terenu kao takva. Radon se prema tome ne može u većoj meri akumulirati u terenu već se uspostavlja radioaktivna ravnoteža među radiumom i radonom kada se radioaktivnom transformacijom radiuma obrazuje u jedinici vremena isti broj atoma radona koliko se i gubi daljom transformacijom radona. Za ovakav slučaj ravnoteže koncentracija radona u vazduhu koji ispunjava porozni teren kreće se do 500 MJ. Ovakav radioaktivni vazduh se može izvla-

čiti iz terena putem sonde. Usled smanjenog pritiska će atmosferski vazduh nadirati kroz porozne slojeve terena. Na taj način se radioaktivni slojevi ispiraju atmosferskim vazduhom odnoseći sobom radon koji se permanentno obrazuje. Ulaskom atmosferskog vazduha u porozne slojeve terena smanjiće se u izvesnoj meri koncentracija radona u vazduhu koji izvlači sonda. Ali to smanjivanje koncentracije može ići samo do izvesne granice jer se radon permanentno obrazuje u terenu tj. uvek pridolaze sve nove i nove količine radona. Pri dužem radu sonde obrazovaće se stacionarno stanje pri kome koncentracija radona u dobivenom vazduhu ostaje stalna te se pomenutim ispiranjem izvlači iz terena skoro sva količina oslobođenog radona. Količine radona koje se na taj način izvlače iz terena zavise od koncentracije radiuma u terenu i zapremine slojeva koji se ispiraju. Koncentracija radiuma u terenu ne prelazi označenu maksimalnu vrednost. Prema tome povećanje količina radona dobivenih sondom može se postići samo povećanjem zapremine koju ispira vazduh. Znači da je efikasnost sonde utoliko veća ukoliko ona ispira veće zapremine radioaktivnih slojeva.

Vrlo jednostavna sonda predstavljena je na sl. 1 daje u ovom pogledu veoma povoljne rezultate. Takva sonda se sastoji od cilindrične jame prečnika 1 m



Sl. 1

i dubine do 2.5 m. Jama je obložena običnim zidom od cigalja bez maltera i pokrivena betonskom pločom na dubini graničnog sloja među humusom i bigrom. Preko ploče je ponova stavljen i nabiven isti sloj humusa. Sonda je vezana cevovodom sa turbokompresorom koji radioaktivni vazduh iz sonde prebacuje u filtersko postrojenje odakle se dalje njime pune prostorije za inhaliranje. Pri radu turbokompresora u sondi se obrazuje sniženi pritisak koji je svega za 10 cm vodenog stuba manji od atmosferskog. Pod takvim uslovima sonda može da daje do 120 m<sup>3</sup> radioaktivnog vazduha na čas.

Radioaktivni sloj bigra je sunderastog sastava i veoma porozan tako da

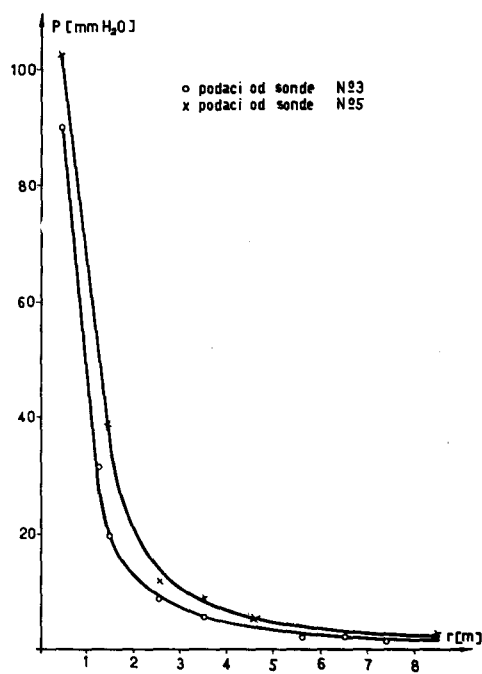
se vazduh kroz njega kreće sa srazmerno vrlo malim otporom. Površinski sloj humusa je daleko manje porozan pa je otpor pri prolasku atmosferskog vazduha kroz njega znatno veći. Pri radu sonde postoji razlika pritisaka među atmosferom i slojem bigra. Usled toga atmosferski vazduh prodire kroz sloj humusa ali zbog velikog otpora strujanje biva malom brzinom. Intenzitet strujanja kroz humus zavisi od površine ovog sloja i razlike pritisaka. Iako je razlika pritisaka među gornjom i donjom ivicom humusnog sloja najveća u okolini sonde ipak ovde prostruje relativno male količine atmosferskog vazduha usled male površine užeg područja sonde. I u poroznom sloju bigra mora se javiti izvesan pad pritiska usled otpora pri kretanju vazduha. Funkcija po kojoj se menja pritisak u bigru sa udaljenjem  $r$  od sonde nije poznata. Poznati su samo granični uslovi tj. pritisak u sondi i za  $r \rightarrow \infty$  kada se pritisak izjednačuje sa atmosferskim. Vratimo se opet na prolaz atmosferskog vazduha kroz površinski humusni sloj.

Ukoliko se više udaljavamo od sonde razlika pritisaka opada ali površina sloja raste i to sa kvadratom odstojanja  $r$ . Postoje prema tome, dva faktora sa suprotnim dejstvom. Prvi faktor se ogleda u smanjivanju razlike pritisaka sa udaljenjem  $r$  što umanjuje u približnoj razmeri količinu proteklog vazduha kroz jedinicu površine humusnog sloja. Drugi faktor leži u pomenutom povećanju površine ovog sloja što ima za posledicu povećanje količina proteklog vazduha. Ova dva faktora se superponiraju te se obrazuje rezultujući režim strujanja koji i uslovljava pomenutu nepoznatu funkciju  $p=f(r)$  po kojoj se pritisak u bigru menja sa rastojanjem  $r$  od sonde. Može se lako zaključiti da će se prolaz atmosferskog vazduha raspodeliti na sve veću površinu humusnog sloja ukoliko je njegova poroznost manja tj. ukoliko je otpor pri kretanju vazduha kroz njega veći. To pak dalje znači da će onda i zapremina ispiranog bigra biti veća. Opiti su pokazali da ovakva jedna sonda ispira vrlo velike zapremine bigra koje se kreću do 2 000 m<sup>3</sup>.

Režim strujanja u ovakvim okolnostima se, međutim, ne može lako oceniti bez matematičke analize a za ovo je neophodno poznavanje pomenute funkcije  $p=f(r)$ . Prema izjavama stručnjaka ovakav problem nije obrađivan odnosno za ovo ne postoje podaci u literaturi. Ovakav problem je od interesa ne samo u dinamici fluida već može imati značaja i za slične okolnosti pri provođenju toplote i električne struje. Usled toga se i pristupilo studiji ovakvog slučaja.

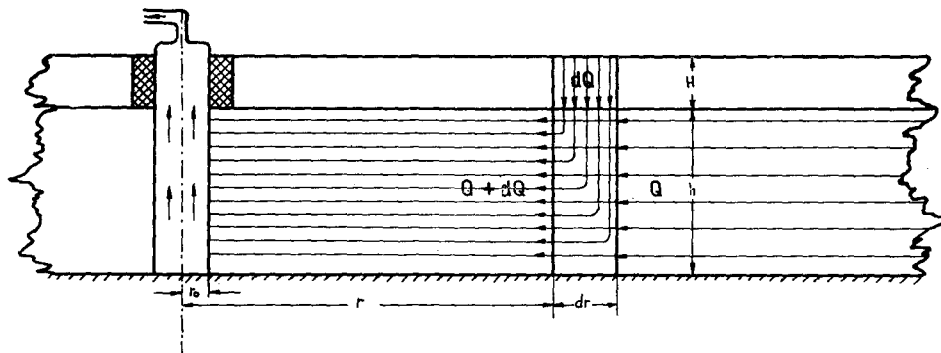
Prethodno je načinjen grafikon tražene funkcije na osnovu eksperimentalnih merenja na terenu. Sonda je puštena u rad i malom sondom vezanom sa mikromanometrom mereni pritisci na različitim odstojanjima od sonde. Dobivena kriva je predstavljena na sl. 2 za dve različite sonde. Razumljivo je da ovakva empiriska kriva dobivena na terenu ne može biti naročito merodavna za traženu funkciju, pošto su prilike na terenu često nehomogene a svojstva terenskih slojeva se ne mogu tačno odrediti. Dobivena kriva služi samo kao prethodna orijentacija sa kojom bi se eventualno mogla izvršiti i neka proveravanja.

Matematička teoriska obrada ovog problema se, međutim, pokazala znatno složenija i teža nego što se to na prvi pogled moglo očekivati, makar se i pretpostavila homogenost pomenutih slojeva humusa i bigra. Smatrajući da se do najboljeg teoriskog rešenja ovog problema može doći postupnim prilaganjem, izloženo je ovce prvo aproksimativno rešenje. Usvojena aproksimacija u velikoj



Sl. 2

meri odgovara okolnostima na terenu a isto tako i važnijim slučajevima provođenja toplote i električne struje. Sloj poroznog bigra na terenu nema veliku debljinu i često ona ne prelazi 1,5 m. Sem toga na nekim mestima terena donji slojevi bigra su ispunjeni vodom te gasovi tuda ne mogu da prolaze. Pomenuta aproksimacija je postavljena na ovim osnovama pretstavljenim na sl. 3. Slojevi su homogeni, horizontalni, sa konstantnom debljinom i prostiru se neograničeno. Donji sloj je potpuno nepropustljiv. Iznad njega se nalazi jako propustljiv sloj koji odgovara bigru. Površinski sloj je znatno manje propustljiv od onog iznad njega i odgovara sloju humusa. Iznad površine se nalazi sloj fluida (vazduha) pod konstantnim pritiskom, u našem slučaju atmosferski pritisak. Fluid se smatra nestišljivim, pošto su razlike pritisaka male. Cilindrična sonda ide do nepropustljivog sloja. Na slici su pretstavljene srujnice koji se mogu donekle rezonovanjem naslutiti. Ako je srednji jako porozan sloj srazmerno male debljine



Sl. 3

onda se vertikalne komponente brzine strujanja sa dobrom aproksimacijom mogu zanemariti i pretpostaviti da se fluid kroz ovaj sloj kreće samo horizontalno odnosno radijalno. Za takav slučaj se na osnovu poznatih zakona strujanja fluida kroz po oznu sredinu mogu postaviti sledeće diferencijalne jednačine.

Prema zaključcima izvedenim na osnovu Darcy-evih merenja brzina fluida koji prolazi kroz poroznu sredinu, promena pritiska fluida između dva sloja kroz koje prolazi fluid srazmerna je rastojanju slojeva i brzini fluida. U našem slučaju promena pritisaka  $dp$  između cilindrične površine na rastojanju  $r$  i površine na rastojanju  $r + dr$  biće srazmerna debljini cilindričnog prstena  $dr$ , protoku  $Q$ , a obrnuto srazmerna površini omotača cilindra  $2r\pi h$ , gde je  $h$  debljina srednjeg sloja:

$$dp = B \frac{dr}{2r\pi h} Q \quad (1)$$

ili ako mesto promenljive  $p$  uvedemo promenljivu  $P$  koja prestavlja razliku pritisaka u atmosferi i u srednjem sloju:  $P = b - p$ , dobijamo:

$$dP = -B \frac{dr}{2r\pi h} Q \quad (1)$$

Konstanta  $B$  predstavlja razliku pritiska između slojeva na rastojanju 1 m. kroz koje prolazi fluid brzinom 1 m/sec.

$$\left( |B| = \frac{1}{m} \frac{N}{m^2} \frac{\text{sec}}{m} \right)$$

Iz atmosfere prodire vazduh u srednji sloj kroz površinski sloj debljine  $H$ . Razlika pritiska u atmosferi i u srednjem sloju je  $P$ , protok kroz površinu prstena je  $dQ$ , pa je kao i u prvom slučaju:

$$P = -A \frac{H}{2r\pi dr} dQ \quad (2)$$

Konstanta  $A$  ima isti fizički smisao i jedinice kao i konstanta  $B$ .

Iz ovih dveju diferencijalnih ječ načina eliminišemo promenljivu  $Q$  i dobijemo sledeću diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{d^2P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} - \frac{B}{AHh} P = 0 \quad (3)$$

Smenom:  $\rho = r \sqrt{\frac{B}{AHh}}$  dobijamo jednačinu u sasvim prostom obliku:

$$\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} - P = 0 \quad (4)$$

Rešenje ove jednačine dato je Bessel-ovom funkcijom:

$$P = Z_0(i\rho) = C_1 J_0(i\rho) - C_2 N_0(i\rho)$$

Pošto je:  $N_0(i\rho) = iJ_0(i\rho) - iH_0^{(1)}(i\rho)$

možemo napisati da je:  $P = (c_1 - ic_2) J_0(i\rho) + C_2 i H_0^{(1)}(i\rho)$

Iz uslova da za vrlo velika rastojanja razlika pritiska treba da bude jednaka nuli mora konstanta uz funkciju  $J_0(i\rho)$  da bude nula, pošto navedena funkcija raste sa povećanjem poluprečnika. Stoga je konačno rešenje:

$$P = C_2 i H_0^{(1)}(i\rho) \quad (5)$$

Konstanta  $C_2$  se odredi iz uslova da je na rastojanju  $r_0$ , koje predstavlja poluprečnik sonde, razlika pritiska  $P_0$ .

Iz poznatog rasporeda pritiska u srednjem sloju i ovog rešenja može se odrediti odnos propustljivosti zemljišta za gasove u površinskom i dubinskom sloju ukoliko su poznate debljine tih slojeva.

Vrlo prosta analiza se može izvesti ako se u diferencijalnoj jednačini (3) mesto promenljive  $r$  uz prvi izvod promenljive  $P$  uzme jedna konstantna vrednost  $L$  koja bi predstavljala srednju dužinu rastojanja između tačaka u kojima funkcija  $P$  počinje da se ponaša po eksponencijalnom zakonu i tačke u kojoj

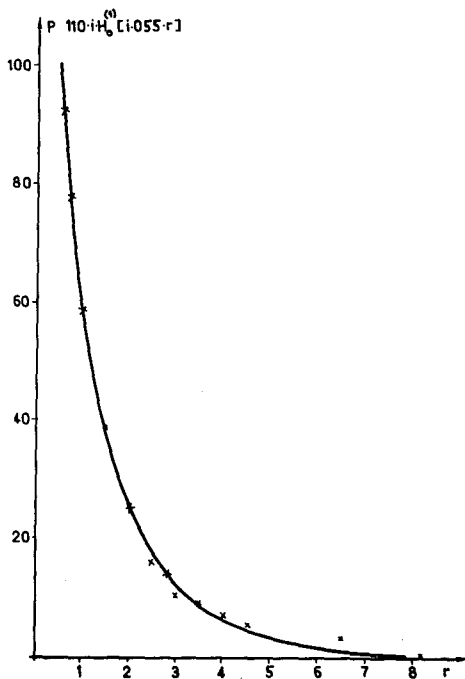
se ne može više eksperimentalno odrediti pritisak  $P$ , tj. za isti se u granicama fluktuacija dobije vrednost nula. Tada će jedn. (3) preći u homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{L} \frac{dP}{dr} - \frac{B}{AHh} P = 0$$

Njeno rešenje je:

$$P = C \exp \left[ - \left( \frac{1}{2L} + \sqrt{\frac{1}{4L^2} + K} \right) r \right] \quad (6)$$

pošto druga integraciona konstanta mora biti jednaka nuli da bi se zadovoljio uslov da za vrlo veliko  $r$  treba  $P$  da bude jednako nuli.



Sl. 4

Da bi dobili protok kroz cilindričnu površinu koncentričnu sa sondom, na rastojanju  $r$  od centra sonde, treba z jedn. (1) i (2) da eliminišemo pritisak. Tada dobijamo:

$$\frac{d^2 Q}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dQ}{dr} - \frac{B}{AHh} Q = 0$$

Na sl. (4) data je kriva dobijena gornjim razmatranjem, jed. (5) i eksperimentalni podaci dobijeni merenjem na terenu. Sa iste se vidi da rezultati me enja dobro slažu sa teorskom krivom. Ako se odnos  $\frac{B}{AHh}$

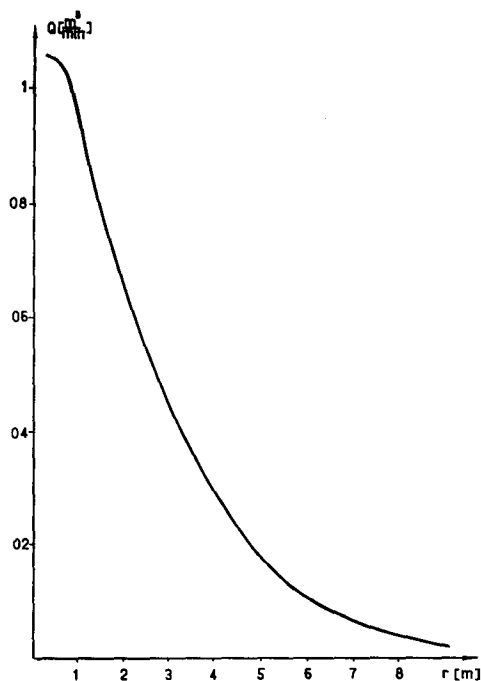
smanjuje dobiće se druga kriva koja će ležati iznad one kod koje je taj odnos veći, tj. pritisak će mnogo sporije opadati i na većem udaljenju od sonde razlika pritisaka atmosferskog i onog u zemljištu će biti mnogo veća, tj. atmosferski vazduh će prolaziti kroz veći kompleks terena i ispirati veću zapreminu zemljišta.

Na terenu na kome su postavljene sonde oko kojih je meren pritisak, debljina površinskog sloja je bila oko 0,4 m. a debljina srednjeg sloja oko 1,5 m. (na dubini oko 1,8 m. do 2 m. nađena je voda). Iz tih podataka i dobivene krive vidi se da je odnos otpora poroznih sredina u površinskom i dubinskom sloju oko 0,15 tj. dubinski sloj oko 6,5 puta bolje propušta vazduh nego površinski sloj.

odnosno za:

$$r = \rho \sqrt{\frac{B}{AHh}} : \frac{d^2 Q}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dQ}{d\rho} - Q = 0$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine ako se uzme u obzir uslov da protok na vrlo velikom rastojanju od sonde treba da bude jednak nuli biće:



Sl. 5

$$Q = C r H_1^{(1)} \left( i \sqrt{\frac{B}{AHh}} r \right)$$

Ova funkcija predstavljena je krivom datom na sl. (5). Pošto je protok izražen u obliku proizvoda rastojanja  $r$  i funkcije  $H$  ona će sporije opadati nego razlika pritisaka koja dosta brzo opadne do nemerljivih vrednosti. S obzirom da ne postoji mogućnost da se u poroznom terenu određuje protok vazduha pod ovakvim uslovima eksperimentalno to ovo tretiranje predstavlja jedinu mogućnost da se dođe do podataka o protoku vazduha u poroznom terenu koji su važni radi daljih ispitivanja količina radona koje vazduh ispira iz zemljišta.

## SUMMARY

### ON THE PROBLEM OF THE FLUID FLOW THROUGH THE POROUS MEDIUM

A flow of the air through the porous soil consisting of three layers was considered. The first superficial layer is less porous than the layer under it. The third layer below them is not porous.

To obtain the function of pressure distribution in the second layer, it was assumed that the depth of the first and second layer is small compared with the length in the horizontal directino, and that air is an incompressible fluid. The last assumption is real because the pressure differences are small.

It was obtained that the pressure distribution follows the Bessel function of the distance from the sink.