PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 17 (1958)

SOLUTION DU PROBLEME DE LA PENETRATION A TRAVERS DES BARRIERES DE POTENTIEL AU MOYEN D'UNE NOUVELLE GRANDEUR QUE L'ON PEUT APPELER IMPEDANCE DEBROGLIENNE

Dragiša M. Ivanović

1. *Impédance cinétique ou impédance debroglienne*

Etant donnée l'unité et l'association de la particule et du milieu physique il est indiqué d'introduire une grandeur physique qui caractériserait en même temps la particule et l'espace physique. On peut considerer la perméabilité magnétique μ_0 comme caractérisant l'espace au point de vue de l'inertie de »l'espace libre«. (Le professeur P. Milianitch dans son cours d'électromagnetique théorique introduit la grandeur $\frac{\mu_0}{2}$ sous le nom de constante universelle d'inertie).

D'autre part, la vitesse de la particule est une des grandeurs qui caractérise le mouvement de la particule.

Introduisons la grandeur physique

$$X = \mu_0 v \qquad \cdots\cdots \quad (1)$$

Cette grandeur représente en même temps l'inertie de l'espace et la vitesse de la particule. Les dimensions de cette grandeur sont celles de la résistance électrique, ou de l'impédance.

Mais, comme cette grandeur représente simultanément toutes les propriétés, ce n'est pas une impédance »passive«, qui caractériserait exclusivement le milieu dans lequel la particule se meut. Pour cette raison nous pouvons la nommer *impédance debroglienne ou impédance cinétique.*

C'est par sa nature une grandeur vectorielle et elle dépend de l'état du mouvement de la particule, c'est à dire:

$$\vec{X} = \mu_0 \vec{v} \qquad \cdots\cdots \quad (1')$$

Employant la relation de de Broglie pour la nature dualistique de la particule, nous pouvons écrire cette impédance de cette manière:

$$\vec{X} = \mu_0 \vec{p} = \mu_0 \frac{\hbar \vec{k}}{m} \qquad \cdots\cdots \quad (2)$$

ou m représente la masse d'inertie de la particule, $\vec{k}$ le vecteur d'onde de de Broglie. Cette grandeur, proportionnelle à la quantité de mouvement, rapportée à la masse, peut être aussi nommée quantité de mouvement caractéristique.

2. — L'impédance debroglienne peut être employée efficacement dans le problème de la pénétration à travers des barrières de potentiel.

Il est important qu'on ne perde pas de vue l'unité particule-milieu. C'est à dire que, quand la particule arrive dans un milieu d'un potentiel déterminé, le problème peut être traité de la même façon dont on traite le problème de la passage des ondes électromagnétiques ou des ondes acoustiques, dans la physique classique, d'un milieu dans un autre ou, de façon générale, à travers diverses couches.

Adoptant le procédé proposé on facilite beaucoup la solution de ces problèmes.

Nous allons le montrer, tout d'abord, en considérant le cas de la pénétration à travers de la barrière de potentiel représentée par la figure 1a.

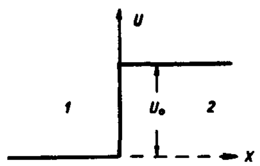

FIG 1a

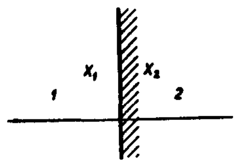

FIG 1b

Introduisant l'impédance debroglienne, ce cas se rédùit à la pénétration des ondes-corpuscules de de Broglie du milieu 1 dans le milieu 2, dont les impédances respectives sont X_1 et X_2 (Fig. 1b).

Dans le milieu 1 on a

$$X_1 = \mu_0 v_1 = \mu_0 \frac{\hbar k}{m} \qquad \cdots\cdots \quad (3)$$

et dans le milieu 2

$$X_2 = \mu_0 v_2 = \mu_0 \frac{\hbar k}{m} \qquad \cdots\cdots \quad (4)$$

où k_1 et k_2 représentent les valeurs respectives des vecteurs d'onde.

Maintenant tout le problème de la détermination du coefficient de transparence par les énergies est identique au prodlème connu de la physique classique, où pour les ondes électromagnétiques figure l'impédance caractéristique $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c$, et pour les ondes acoustiques la grandeur dite impédance acoustique $Z = \rho c$. Ces impédances, qui caractérisent le milieu, peuvent être exprimées au moyen de la vitesse de la propagation des ondes »classiques«.

L'impédance debroglienne caractérise le milieu et la particule qui est de nature dualistique. Pour cette raison son introduction est fout à fait logique et justifiée.

Pour les ondes électromagnétiques et acoustiques le coefficient de transparence d'un milieu dans un autre est donné par la formule bien connue:

$$T=\frac{4\,Z_1 Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} \qquad \qquad (5)$$

et le coeffcient de la réflexion

$$R=\frac{(Z_1-Z_2)^2}{(Z_1+Z_2)^2}. \qquad \qquad (6)$$

(voir par ex. [1], § 5).

L'introduction de l'impédance debroglienne nous permet analogiquement d'évaluer ce coefficient pour le cas de l'arrivée de microparticules à la barrière de potentiel représentée sur la figure 1, mais il ne faut pas perdre de vue que cette impédance représente une propriété commune au milieu et à la vitesse de la particule.

De cette façon on obtient immédiatement:

$$T=\frac{4\,X_1 X_2}{(X_1+X_2)^2}=\frac{4\,k_1 k_2}{(k_1+k_2)^2}=\frac{4\,p_1 p_2}{(p_1+p_2)^2} \qquad (7)$$

$$R=\left(\frac{X_1-X_2}{X_1+X_2}\right)^2=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2=\left(\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\right)^2 \qquad (8)$$

C'est le résultat connu en mécanique ondulatoire qu'on obtient à l'aide de l'équation de Schrödinger, de la fonction ondulatoire et de »la densité du courant de probabilité«.

Dans le cas de la pénétration de la particule à travers de la barrière de potentiel représentée sur la figure 2 on arrive, par notre procédé, au même

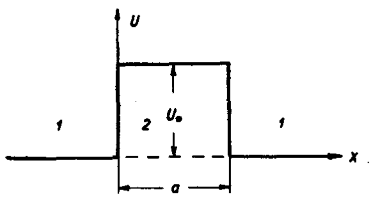

FIG 2a

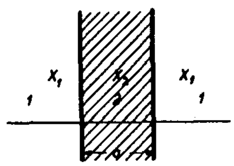

FIG 2b

problème comme dans l'étude du passage des ondes électromagnétiques ou acoustiques du milieu 1 au milieu 3 à travers le milieu 2. Les milieux 1 et 3 sont supposés de même nature. D'après cela, les milieux respectifs peuvent être traités ensemble avec la particule de la même façon dont on considère dans la physique classique, les couches dans lesquelles les ondes arrivent et à travers desquelles elles passent.

Pour les ondes électromagnétiques et acoustiques, on obtient, dans le cas envisagé, l'expression suivante du coefficient de transparence et de réflexion:

$$D = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 \cdot e^{-ik_2 a} - (Z_1 - Z_2)^2 \cdot e^{ik_2 a}} \quad \ldots (9)$$

$$V = \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{Z_1^2 + Z_2^2 + 2iZ_1Z_2 \cdot \cot k_2 a} \quad \ldots (10)$$

Les coefficients respectifs paı énergies sont

$$T = |D|^2 = \frac{4 Z_1^2 \cdot Z_2^2}{4 Z_1^2 Z_2^2 + (Z_1^2 - Z_2^2)^2 \cdot \sin^2 k_2 a} \quad \ldots (11)$$

$$R = |V|^2 = \frac{(Z_1^2 - Z_2^2)^2 \cdot \sin^2 k_2 a}{4 Z_1^2 Z_2^2 + (Z_1^2 - Z_2^2)^2 \sin^2 k_2 a} \quad \ldots (12)$$

(Voir par ex. [1] § 5, ou [2] p. 515, ou [3]).

De la même manière au moyen de l'impédance debroglienne on obtient dans le cas de la pénétration de la barrière de potentiel:

$$T = \frac{4 X_1^2 X_2^2}{4 X_1^2 X_2^2 + (X_1^2 - X_2^2)^2 \sin^2 k_2 a} = \frac{4 k_1^2 k_2^2}{4 k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_2 a} \quad \ldots (13)$$

$$R = \frac{(X_1^2 - X_2^2)^2 \sin^2 k_2 a}{4 X_1^2 X_2^2 + (X_1^2 - X_2^2)^2 \sin^2 k_2 a} = \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_2 a}{4 k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_2 a} \quad \ldots (14)$$

Ces résultats sont aussi identiques avec les résultats qu'on peut obtenir à l'aide de l'equation de Schrödinger, de la fonction ondulatoire et de „la densité du courant de probabilité" (voir [4]).

Dans le cas où l'énergie E de la particule serait plus petite que l'énergie potentielle dans le milieu 2, on prend simplement iX au lieu de X, et on obtient le résultat connu en mécanique quantique (ondulatoire):

$$T = \frac{4 X_1^2 X_2^2}{(X_1^2 + X_2^2)^2 sh^2 k_2 a + 4 X_1^2 X_2^2} = \frac{4 k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2 sh^2 k_2 a + 4 k_1^2 k_2^2} \quad \ldots (15)$$

Ces expressions montrent qu'on peut traiter „l'effet de tunel" comme dans les cas analogues d'ondes électromagnétiques et acoustiques avec la méthode ici adoptée de l'impédance debroglienne pour les ondes de la mécanique ondulatoire.

Cette méthode est aussi efficace pour le cas plus général quand le milieu en-deça (milieu 3) de la barrière de potentiel a un potentiel différent de celui dans le milieu 1 (fig. 3a et 3b).

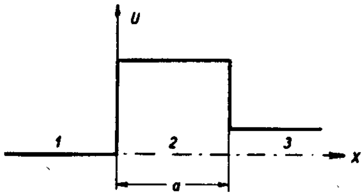

FIG 3a

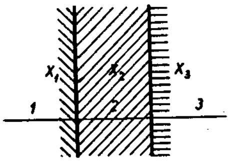

FIG 3b

Pour un tel cas on obtient d'après la théorie connue des ondes électromagnétiques et acoustiques et, également, des ondes debrogliennes

$$D = \frac{4X_1X_2 \cdot e^{-ik_3a}}{(X_1-X_2)(X_2-X_3) \cdot e^{ik_2a} + (X_1+X_2)(X_2+X_3) \cdot e^{-ik_2a}} \quad \cdots (16)$$

(Voir [1] §5),
où nous avons pris, comme impédance, celle de de Broglie.

Cette relation donne immédiatement la relation connue dans le traitement de la pénétration de la particule à travers une telle barrière au moyen de l'équation de Schrödinger, sous les conditions respectives.

La simplicité de notre procédé est évidente. On peut de suite analyser les résultats que $T=1$ pour $a=n \cdot \frac{\lambda}{2}$, où λ est la longueur d'onde de de Broglie.

3. — Il faut avoir en vue qu'avec cette manière de traiter ce problème il n'est pas necessaire d'évaluer „la densité du courant de probabilité" d'aprés la relation de la mécanique quantique (ondulatoire)

$$j = \frac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi) \quad \cdots (17)$$

où Ψ est la fonction ondulatoire avec toute ses propriétés adoptées et imposées.

L'impédance debroglienne ou cinétique peut être appliquée aussi à d'autres cas et formes des barrières de potentiel. La vitesse de la particule dans le milieu respectif peut être évaluée d'après la méthode connue de l'énergie.

4. — L'impédance debroglienne donne la possibilité de l'application d'une seule théorie et d'une seule méthode unique pour toutes les ondes avec des expressions différentes pour les trois impédances, dont les deux premières sont „passives" et la dernière, cinétique, est „active".

Semblablement au terme proposé — impédance debroglienne — pour la grandeur $X=\mu_0 v$ on pourrait denommer l'impédance caracteristique de „l'espace libre" $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c$, introduite par Shelkunoff: impédance maxwellienne.

L'analogie est évidente, la théorie unique, les résultats semblables.

RÉFÉRENCES

[1] L. M. Brehovskih: Volni v sloistih sredah. (Les ondes dans les couches) (en russe), Académie des Sciences URSS, Moscou 1957

[2] J. A. Stratton: Electromagnetic Theory, New York, 1941.

[3] J. B. Birks: Dielectric Housings for Centimetre-wave Antennae J. I. E. E. Vol. 93, Part IIIA p. 649.

[4] L. Landau & E. Lifchitz: Kvantovaya mehanika (La Mécanique quantique) (en russe), Moscou, 1948

RÉSUMÉ

RJEŠENJE PROBLEMA PENETRACIJE POTENCIJALNIH PREPREKA POMOĆU NOVE VELIČINE KOJA SE MOŽE NAZVATI DE BROGLIE-OVA IMPEDANCA

U klasičnoj fizici postoji zajednička teorija prostiranja zvučnih i elektromagnetshih talasa kroz različite slojeve i sredine, u kojoj se koristi akustična i karakteristična impedanca. U kvantnoj fizici slične veličine u tim problemima ne postoje, pa se tretiranje vrši odvojeno.

U ovom radu učinjen je pokušaj da se problem tretira pomoću veličine koja *karakteriše i česticu i okolinu.* Predlaže se da se ta veličina nazove *de Broglie-ova ili kinetička impendanca,* $X = \mu_0 v$, jer karakteriše česticu i okolinu, odnosno de Broglie-ove talase, kao što impendanca $Z = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ karakteriše elektromagnetske talase, odnosno fizički prostor kroz koji se prostiru (pa bi se i ona mogla nazvati Maxwell-ova impendanca).

Ovakve i slične nove veličine omogućile bi da se mnogi problemi de Broglie-ovih talasa uspješno i jednostavnije rješavaju pomoću zajedničke teorije svih talasnih kretanja.