PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 12 (1957)

GENERALIZACIJA NEKIH REZULTATA U PROBLEMU SUDARA TRIJU TELA

Dobrivoje Mihailović

1. UVOD

U ovoj raspravi autor proučava vezu između dva, do sada potpuno izolovana tretirana problema Nebeske mehanike. Jedan od njih je tzv. problem sudara triju tela, a drugi — pretstavlja jedan specijalni problem triju tela koji je definisao *M. Milanković* u svome radu: „*Osobina kretanja u jednom specijaliziranom problemu triju tela*“ i u ovome dokazao jednu značajnu osobinu kretanja [1].

Milankovićev specijalni slučaj problema triju tela, koji autor kratkoće radi naziva *problemom rasprskavanja*, tretira osobine kretanja težišta triju tela postalih rasprskavanjem jednog jedinog tela koje se kretalo uniformnim kretanjem — pod dejstvom unutrašnjih sila. Milanković pokazuje: 1) da je ovo kretanje ravno i 2) da je integraciona konstanta u integralu momenta kvantiteta kretanja jednaka nuli. Odavde on izvodi zaključak, da se pravci trenutnih relativnih kretanja (tangente na putanje triju masa) moraju seći u jednoj tački ravni njihovog kretanja. Što se tiče prirode sila koje dejstvuju na posmatrane tri materijalne tačke, Milanković pretpostavlja, da one mogu biti proizvoljne, ali holomorfne funkcije položaja, brzine i vremena.

Vezu između ova dva problema autor je uspostavio proučavajući kvantitativnu stranu problema tzv. trostrukog realnog sudara i analizirajući rezultate do kojih je u tom smislu došao *H. G. Blok* u svojim raspravama [3] i [4]. Osnovu za uspostavljanje ove veze čine sledeće činjenice. Ako se u Milankovićevom problemu rasprskavanja uvedu sile Newton-ove gravitacije, onda ovaj problem pretstavlja realizaciju onog slučaja problema triju tela koji odgovara tretiranju problema posle momenta sudara. Obrnuto, ako se u problemu sudara izvrši uopštenje karaktera sila, onda Milankovićev problem pretstavlja onaj specijalni slučaj problema sudara triju tela, pri kome, kada $t \to t_o$ (t_o — momenat rasprskavanja prvobitnog tela), težišta triju postalih tela polaze iz iste tačke prostora.

Autor u ovoj raspravi specificira Milankovićev problem, uvodeći sledeće pretpostavke:

1) da se uzajamni uticaji triju masa menjaju po potencijalnom zakonu $\varphi(x) = x^{\alpha}$, $(\alpha < -1)$;

2) ako se vektori položaja ovih masa s obzirom na težište sistema pretstave u obliku $\mathfrak{R}_i = (\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i)\,\delta$, $(i = 1, 2, 3)$, da, kad $t \to t_o$:

$$a) \quad \delta \to 0, \quad \mathfrak{r}_i \to 0, \quad \mathfrak{R}_i \to 0,$$

$$b) \quad \frac{d}{dt}(\mathfrak{r}_i\delta) : \frac{d\delta}{dt} \to 0,$$

tj. da projekcije vektora $\frac{d}{dt}(\mathfrak{r}_i\delta)$ na ose utvrdjenog koordinatnog sistema pretstavljaju infinitezimale višeg reda u poredjenju sa $\frac{d\delta}{dt}$ tako, da se za vrednosti od t dovoljno bliske momentu rasprskavanja $t = t_o$ može uzeti aproksimativno

$$\frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} \approx \mathfrak{A}_i \frac{d\delta}{dt}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ovim pretpostavkama ograničeni Milankovićev problem autor naziva *suženim problemom rasprskavanja.* Ako se u suženom problemu rasprskavanja uzme $\alpha = -2$, tada se iz njega problem sudara triju tela izvodi kao specijalni slučaj.

Uvodeći u svoja ispitivanja ovako definisani suženi problem rasprskavanja, autor je bio u mogućnosti da proširi i uopšti Blok-ove i neke svoje rezultate u vezi sa kvantitativnom analizom problema sudara triju tela.

Pretstavljajući vektore položaja težišta triju tela u suženom problemu u obliku $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_i\, u$, $(i = 1, 2, 3)$, gde su $\mathfrak{R}_i$ konstantni vektori, autor pokazuje da se veličina u dobija u obliku jednog potencijalnog reda čiji je najniži stepen

$$\tau^2 = [(1-\alpha)\,\kappa]^{\frac{2}{1-\alpha}} \cdot (t - t_o)^{\frac{2}{1-\alpha}},$$

(k = konstanta). To znači da su u suženom problemu vektori položaja masa m_i proporcionalni veličini τ^2. Za $\alpha = -2$ dobija se poznati Sundman-ov rezultat:

$$\tau^2 = (3\kappa)^{2/3}. \ (t - t_o)^{2/3}$$

kao specijalni slučaj prethodnog [5].

Diferencijalne jednačine ovoga problema autor izvodi, uvodeći mesto vremena t- novu nezavisno promenljivu

$$\tau = [(1-\alpha)\,\kappa]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot (t - t_0)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Ove se jednačine za $\alpha = -2$ svode na onaj oblik, do koga je došao Sundman tretirajući problem sudara triju tela [5].

Autor je dalje pokazao da su partikularni integrali sistema diferencijalnih jednačina za suženi problem oblika

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{A}_i\,\tau^2, \quad (i = 1, 2, 3),$$

gde $\mathfrak{A}_i$ označuju konstantne vektore. Za položaje triju masa koji su prema težištu sistema odredjeni vektorima položaja $\mathfrak{A}_i$ autor nalazi za vrednosti rezultujućih sila:

$$\mathfrak{P}_i = 2\,\kappa^2 (1+\alpha)\, m_i \mathfrak{A}_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Odavde, primenom Milankovićevog stava o polu gravitacije [2], neposredno utvrdjuje, da konfiguracije odredjene vektorima $\mathfrak{A}_i$ pretstavljaju konfiguracije Lagrange-ovih egzaktnih rešenja za opšti problem triju tela. Odredjujući, dalje, ove konfiguracije, autor je pokazao da za nekolinearni raspored masa partikularna rešenja pretstavlja jedna odredjena konfiguracija ravnostranog trougla i to za sve vrednosti $\alpha < -1$, dok se kod kolinearnog rasporeda masa konfiguracija menja u zavisnosti od α. Svi odgovarajući Blok-ovi i raniji autorovi rezultati koji se odnose na problem sudara triju tela, izvode se iz napred navedenih kao specijalni slučajevi.

Najzad autor daje vektorske diferencijalne jednačine za varijaciju konstanata egzaktnih rešenja, polazeći od

$$\mathfrak{R}_i = (\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i)\,\tau^2, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

i iz ovih je izveo, kao specijalni slučaj Blok-ove diferencijalne jednačine za varijaciju konstanata u problemu sudara triju tela.

Uporedjujući osobine karakteristične za problem sudara triju tela i problem rasprskavanja, autor je došao do sledećih zaključaka. Pre svega osobina koju je u [1] pokazao Milanković, da se instantani relativni pravci kretanja seku u jednoj tački ravni kretanja, neposredno se prenosi i na problem sudara triju tela s obzirom na činjenicu da je i u ovome problemu integraciona konstanta u integralu momenta kvantiteta kretanja jednaka nuli. S ovim u vezi autor izvodi još i sledeće zaključke:

1) putanje težišta triju tela moraju imati svoje završne tačke u težištu sistema i

2) konfiguracija ravnostranog trougla pretstavlja ono partikularno rešenje problema, pri kome tangente na putanje prolaze kroz završnu tačku ovih putanja. Za pravolinisku konfiguraciju masa, tačka preseka instantanih relativnih pravaca kretanja je neodredjena.

Druga osobina karakteristična za obadva problema jeste ta, da su projekcije vektora $\mathfrak{r}_i$ na koordinatne ose, kojima se variraju vektorske integracione konstante $\mathfrak{A}_i$ konfiguracije Lagrange-ovih egzaktnih rešenja, vezane jednom linearnom relacijom. Ovde je karakteristično podvući, da, za konfiguraciju ravnostranog trougla, ova relacija vezuje sve projekcije vektora $\mathfrak{r}_i$, dok kod pravoliniske konfiguracije ona vezuje samo projekcije tih vektora na osu OY odabranog koordinatnog sistema. Dalje, u prvom slučaju autor utvrdjuje da linearna relacija ostaje ista za sve funkcije $\varphi(x) = x^{\alpha}$, jer je za sve $\alpha < -1$ konfiguracija ravnostranog trougla zajednička, dok se u drugom slučaju karakter same konfiguracije menja u zavisnosti od α, te se i ova linearna relacija menja za različito $\alpha \in (-\infty, -1)$. Sa teoriske tačke gledišta pomenute linearne relacije pretstavljaju prve integrale sistema diferencijalnih jednačina problema, te je autor ove iskoristio za redukciju Blok-ovog sistema diferencijalnih jednačina za varijaciju konstanata $\mathfrak{A}_i$ egzaktnih rešenja problema trostrukog sudara i njegovo rešenje u prvoj aproksimaciji, u jednoj dovoljno maloj okolini momenta sudara t_o [6].

Iz ovih rezultata sleduje još i to, da su u problemu rasprskavanja projekcije sila koje dejstvuju na tri posmatrane tačke vezane takodje jednom linearnom relacijom. U specijalnom slučaju, za problem sudara triju tela, ova se svodi na linearnu relaciju izmedju projekcija parcijalnih gradijenata skalarne funkcije V po vektorima $\mathfrak{r}_i$. Naposletku autor je naglasio značaj poslednjih rezultata u pogledu mogućnosti redukcije sistema diferencijalnih jednačina problema i izvesne modifikacije Blok-ovih rezultata koji se odnose na efektivno rešenje problema sudara triju tela.

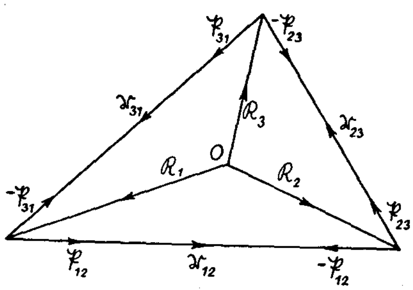
2. DEFINICIJA POLA GRAVITACIJE (CENTRA ATRAKCIJE) I STAV O USLOVIMA ZA EGZISTENCIJU EGZAKTNIH REŠENJA

S obzirom na značaj pola gravitacije (centra atrakcije) za razradu i modifikaciju koju vrši autor u Sundman-ovim i Blok-ovim rezultatima u problemu sudara triju tela [6], u ovome paragrafu je ponovljena u najvažnijim potezima definicija pojma *pola gravitacije* (*centra atrakcije*), kao i stav s ovim u vezi koji fiksira potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju egzaktnih rešenja u opštem problemu triju *tela* Nebeske mehanike.

Pojam pola gravitacije uvodi *Milanković* u svome radu: *O opštim integralima problema n tela* [2], zamenivši taj termin kasnije — novim terminom: *centar atrakcije*.

Polom gravitacije (centrom atrakcije) Milanković naziva tačku preseka pravaca sila koje dejstvuju na tri materijalne tačke m_1, m_2 i m_3 i koji leži u ravni trougla koga obrazuju ove tri tačke. Za slučaj pravoliniske konfiguracije triju masa, pol gravitacije (centar atrakcije) se definiše kao granični položaj pola gravitacije trougla $m_1\ m_2\ m_3$ pri čemu temena ovog trougla teže da zauzmu raspored po jednoj pravoj liniji.

Ako nam na sl. 1 tačka O pretstavlja težište sistema materijalnih tačaka m_1, m_2, m_3, a $\mathfrak{R}_i$ označuju vektore položaja ovih tačaka s obzirom na tačku O, tada je



Sl. 1

$$m_1\,\mathfrak{R}_1 + m_2\,\mathfrak{R}_2 + m_3\,\mathfrak{R}_3 = 0. \tag{1}$$

Prema oznakama na sl. 1 vektori $\mathfrak{r}_{ij}$ imaju vrednosti:

$$\mathfrak{r}_{12} = \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1,\quad \mathfrak{r}_{23} = \mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_2,\quad \mathfrak{r}_{31} = \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3. \tag{2}$$

Označimo skalarne veličine ovih vektora sa r_{ij}, tj.

$$\begin{gathered} r_{12} = |\mathfrak{r}_{12}| = |\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1|,\quad r_{23} = |\mathfrak{r}_{23}| = |\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_2|, \\ r_{13} = |\mathfrak{r}_{31}| = |\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2|. \end{gathered} \tag{3}$$

Vektorske vrednosti sila $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ i $\mathfrak{P}_3$ koje dejstvuju respektivno na materijalne tačke m_1, m_2 i m_3 date su relacijama:

(4) $$\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}_{12}-\mathfrak{P}_{31},\quad \mathfrak{P}_2=\mathfrak{P}_{23}-\mathfrak{P}_{12},\quad \mathfrak{P}_3=\mathfrak{P}_{31}-\mathfrak{P}_{23}.$$

Milanković tretira slučaj kada su privlačne sile $\mathfrak{P}_{ij}$ funkcije $\varphi(r_{ij})$ njihovih uzajamnih rastojanja ti. imaju oblik:

(5) $$\mathfrak{P}_{12}=m_1\,m_2\,\frac{\varphi(r_{12})}{r_{12}}\,\mathfrak{r}_{12},\quad \mathfrak{P}_{23}=m_2\,m_3\,\frac{\varphi(r_{23})}{r_{23}}\,\mathfrak{r}_{23},\quad \mathfrak{P}_{31}=m_3\,m_1\,\frac{\varphi(r_{13})}{r_{13}}\,\mathfrak{r}_{31}.$$

Ako se pol gravitacije poklapa sa težištem sistema, tada rezultujuće sile $\mathfrak{P}_i$ moraju biti kolinearne sa vektorima položaja $\mathfrak{R}_i$ tj. one moraju biti oblika:

(6) $$\mathfrak{P}_i=-\kappa'\,m_i\,\mathfrak{R}_i,\quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

U slučaju *nekolinearnog rasporeda* materijalnih tačaka, uslovi za poklapanje pola gravitacije i težišta izraženi su relacijama:

(7) $$\frac{\varphi(r_{12})}{r_{12}}=\frac{\kappa'}{M},\qquad \frac{\varphi(r_{23})}{r_{23}}=\frac{\kappa'}{M},\qquad \frac{\varphi(r_{13})}{r_{13}}=\frac{\kappa'}{M},$$

gde je

$$M=m_1+m_2+m_3,$$

ili

(8) $$\frac{\varphi(r_{12})}{r_{12}}=\frac{\varphi(r_{23})}{r_{23}}=\frac{\varphi(r_{13})}{r_{13}}.$$

Za *kolinearnu konfiguraciju* masa, pri čemu je poredak masa $m_1-m_2-m_3$, a težište leži izmedju masa m_1 i m_2, ovaj uslov je izražen relacijom:

(9) $$\begin{aligned} m_1\,[r_{12}\,\varphi(r_{23}+r_{12})-(r_{23}+r_{12})\,\varphi(r_{12})]+m_2\,[r_{12}\,\varphi(r_{23})-r_{23}\,\varphi(r_{12})]+\\ +m_3\,[(r_{23}+r_{12})\,\varphi(r_{23})-r_{23}\,\varphi(r_{23}+r_{12})]=0. \end{aligned}$$

Za slučaj kad je $\varphi(x)$ stepena funkcija oblika $\varphi(x)=x^n$, uslovi (8) postaju

(10) $$r_{12}^{n-1}=r_{23}^{n-1}=r_{13}^{n-1}$$

tj.

(10′) $$r_{12}=r_{23}=r_{13};$$

tačke m_1, m_2, m_3 leže u temenima ravnostranog trougla.

Relacija (9), posle deobe sa r_{12}^{n+1} i zamene $r_{12}/r_{23}=z$, postaje:

(11) $$m_1\,[(1+z)^n-(1+z)]+m_2\,(z^n-z)+m_3\,[(1+z)\,z^n-z\,(1+z)^n]=0.$$

Za $n=-2$ imamo slučaj Newton-ovih sila, pa relacije (10) i (11) dobijaju respektivno oblike:

(10″) $$r_{12}=r_{23}=r_{13},$$

odnosno

(11′) $$m_1\,z^2\,[1-(1+z)^3]+m_2\,(1+z)^2\,(1-z^3)+m_3\,[(1+z)^3-z^3]=0.$$

i izražavaju uslove za Lagrange-ovu konfiguraciju ravnostranog trougla, odnosno za pravolinisku konfiguraciju triju masa.

Milankovićev stav se može formulisati ovako:

Za egzaktno rešenje opšteg problema triju tela potreban i dovoljan uslov je izražen time, da tri materijalne tačke sistema obrazuju jednu od navedenih konfiguracija, pri čemu će pol gravitacije (centar atrakcije) pasti u zajedničko težište sistema.

To znači, poklapanje pola gravitacije sa težištem uslovljava mogućnost egzaktnog rešenja problema triju tela. Pri tome su vektorske vrednosti sila $\mathfrak{P}_i$ koje dejstvuju na mase m_i date relacijama (6) tj. ove su proporcionalne vektorima položaja tih masa. Obrnuto, ako su sile koje dejstvuju na mase m_i proporcionalne vektorima $\mathfrak{R}_i$, pol gravitacije će pasti u težište sistema i odgovarajuća konfiguracija triju masa pretstavljaće jednu od konfiguracija za slučaj egzaktnih rešenja.

3. DEFINICIJA MILANKOVIĆEVOG PROBLEMA RASPRSKAVANJA I OSOBINA KRETANJA TAKO POSTALIH TRIJU TELA

Za uopštenje Blok-ovih rezultata u problemu sudara triju tela i za dopunu i razradu kvantitativne analize problema sudara triju tela, autor polazi od jednog specijalnog problema koji je formulisao *Milanković* u svojoj raspravi: „*Osobina kretanja u jednom specijaliziranom problemu triju tela*" [*1*].

Milanković posmatra kretanje triju tela postalih rasprskavanjem jednog jedinog tela u tri; ili rasprskavanjem prvobitnog tela najpre u dva — sekunderna, od kojih se jedno rasprskava još u dva, tako da postanu tri posmatrana tela.

Što se tiče prirode sila u ovome problemu, Milanković pretpostavlja:

1. da, sem medjusobnih uticaja, na tri tercijerna tela ne dejstvuju nikakve druge sile i da se ti uticaji pokoravaju principu akcije i reakcije;

2. da su te sile proizvoljne, ali neprekidne funkcije položaja, brzine i vremena i utvrdjuje

3. da će se tri postala tela kretati u jednoj ravni koja je definisana težištem prvobitnog tela koje se kretalo pravoliniski s konstantnom brzinom i pravcima vektora brzina dvaju sekundernih tela.

Težište prvobitnog tela ostaće i težište sistema tri postala tela, te uzimajući ga za početak koordinatnog sistema, a za ravan xy — ravan kretanja triju tela i označujući sa $\mathfrak{R}_i$ vektore položaja masa m_i s obzirom na ovaj početak, imaćemo jednačine:

$$m_1 \mathfrak{R}_1 + m_2 \mathfrak{R}_2 + m_3 \mathfrak{R}_3 = 0, \tag{12}$$

odakle

$$m_1 \dot{\mathfrak{R}}_1 + m_2 \dot{\mathfrak{R}}_2 + m_3 \dot{\mathfrak{R}}_3 = 0, \tag{13}$$

gde je $\dot{\mathfrak{R}}_i = \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt}$, $(i = 1, 2, 3)$. Iz (13), diferenciranjem po vremenu dobijamo:

$$m_1 \ddot{\mathfrak{R}}_1 + m_2 \ddot{\mathfrak{R}}_2 + m_3 \ddot{\mathfrak{R}}_3 = 0. \tag{14}$$

Koristeći oznake na sl. 1, možemo diferencijalne jednačine kretanja težišta triju tela napisati u ovom obliku:

$$
(15) \qquad
\begin{aligned}
m_1 \ddot{\mathfrak{R}}_1 &= \mathfrak{P}_{12} - \mathfrak{P}_{31}, \\
m_2 \ddot{\mathfrak{R}}_2 &= \mathfrak{P}_{23} - \mathfrak{P}_{12}, \\
m_3 \ddot{\mathfrak{R}}_3 &= \mathfrak{P}_{31} - \mathfrak{P}_{23},
\end{aligned}
$$

Množeći redom ove jednačine vektorski sa $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ i $\mathfrak{R}_3$ i sabirajući dobijene vektorske proizvode, nalazimo

$$\sum_{i=1}^{3} m_i [\mathfrak{R}_i \ddot{\mathfrak{R}}_i] = [\mathfrak{R}_1 (\mathfrak{P}_{12} - \mathfrak{P}_{31})] + [\mathfrak{R}_2 (\mathfrak{P}_{23} - \mathfrak{P}_{12})] + [\mathfrak{R}_3 (\mathfrak{P}_{31} - \mathfrak{P}_{23})].$$

Pošto je

$$[\mathfrak{R}_1 (\mathfrak{P}_{12} - \mathfrak{P}_{31})] = [\mathfrak{R}_2 (\mathfrak{P}_{23} - \mathfrak{P}_{12})] + [\mathfrak{R}_3 (\mathfrak{P}_{31} - \mathfrak{P}_{23})] = 0,$$

to prethodna jednačina postaje:

$$(16) \qquad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3} m_i [\mathfrak{R}_i \dot{\mathfrak{R}}_i] = 0.$$

U vezi sa integracijom ove jednačine Milanković čini sledeću napomenu: »Integracija ove jednačine daje zakon o održanju momenta kvantiteta kretanja. Ovaj momenat je za interval vremena pre no što se je prvobitno telo rasprslo ravan nuli, a ne menja se ni posle rasprštenja, jer su promene kvantiteta kretanja jednake impulsijama, a impulsije, koje su se pri rasprštenju pojavile, uvek su dve i dve jednake, protivnog pravca, a leže na istoj pravoj. Zato će i integral gornje jednačine biti ravan nuli, pa će da postoji jednačina:

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{3} m_i [\mathfrak{R}_i \dot{\mathfrak{R}}_i] = 0.''$$

Znači. prvi Milankovićev rezultat, koji ćemo kasnije primeniti, izražava činjenicu, da je *intergraciona konstanta u integralu momenta kvantiteta kretanja — za problem rasprskavanja — jednaka nuli.*

Drugi Milankovićev rezultat se odnosi na jednu osobinu momentanih relativnih pravaca kretanja u ovome problemu. Jednačine tih pravaca imaju oblik:

$$(18) \qquad \xi\, dy_i - \eta\, dx_i + (y_i dx_i - x_i dy_i) = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Ako se prva od ovih jednačina pomnoži sa m_1, druga sa m_2 i treća sa m_3, pa se zatim saberu dobijeni proizvodi, dobiće se

$$(19) \qquad \xi \cdot \sum_{i=1}^{3} m_i dy_i - \eta \cdot \sum_{i=1}^{3} m_i dx_i - \sum_{i=1}^{3} m_i (x_i dy_i - y_i dx_i) = 0.$$

Iz jednačine (13) i (17) proizilazi:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i\,dx_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} m_i\,dy_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} m_i\,(x_i\,dy_i - y_i\,dx_i) = 0. \tag{20}$$

S obzirom na (20) relacija (19) je identički zadovoljena. Na taj način je Milanković dokazao ovu osobinu u problemu koji je definisao:

Pravci instantanih relativnih kretanja tj. pravci vektora brzina (tangenata na putanje) seku se u jednoj tački ravni kretanja triju tela.

Ovaj rezultat nalazi takodje primenu u daljoj razradi problema sudara triju tela, koju je u [6] izvršio autor ove rasprave. U daljem izlaganju, kratkoće radi, zvaćemo napred definisani Milankovićev problem triju tela — *problemom rasprskavanja*.

4. PROBLEM RASPRSKAVANJA I PROBLEM SUDARA TRIJU TELA

Problem sudara triju tela, kao što je to u uvodu podvučeno, rešava u kvantitativnom pogledu pitanje kretanja triju materijalnih tačaka koje se privlače ili odbijaju silama Njutnove gravitacije i u jednom momentu vremena $t = t_o$ dolaze u istu tačku ravni njihovog kretanja (težište sistema) ili polaze od ove. Pri tome, kako Blok pretpostavlja, kad $t \to t_o$, projekcije vektora položaja ovih tačaka teže nuli. Blok je u svojoj raspravi [3] istakao dva slučaja koji mogu nastupiti u problemu sudara. Uvodeći u sistem diferencijalnih jednačina kretanja, mesto vremena t novu nezavisno promenljivu τ definisanu sa:

$$\tau = c \cdot (t_0 - t)^{1/3}, \tag{21}$$

gde c označuje izvesnu konstantu, Blok u vezi sa ovom konstantom kaže: »Ici, c est une constante que nous laissons pour le moment indéterminée. S'il s'agit d'un choc futur, nous supposons c positif; au contraire, s'il est question d'un choc passé, c'est à dire si le trois corps viennent d'être lancés du même point, c est négatif. Alors nous aurons à considerer la solution pour de petites valeurs positives de τ«. Sam znak ove konstante nije uopšte od značaja za ispitivanje i rešenje problema. S tim u vezi Blok podvlači: »D'ailleurs, c n'entrera dans nos calculs que par son carré, de manière que son signe n'aura aucune influence sur les résultats. Ceux-ci peuvent s'appliquer aussi bien aux chocs passés qu'aux chocs futurs.« [1].

Milankovićev problem rasprskavanja, definisan u 3. tretira osobine u ravnom kretanju triju materijalnih tačaka koje polaze iz iste tačke prostora — težišta sistema. Prema tome, ako bismo u tome problemu uveli jedno ograničenje u vezi sa prirodom sila, naime, ako pretpostavimo da se ovde ima posla sa silama Newton-ove gravitacije, tada bi, sa ovim ograničenjem, Milankovićev problem ušao u onu kategoriju problema sudara koju Blok naziva »*les chocs passés*«. Obratno, ako bi se u pogledu prirode sila ostalo pri Milankovićevoj pretpostavci, tada bi onaj slučaj opšteg problema trostrukog sudara, pri kome, kad vreme $t \to t_o$ (t_o — momenat sudara), tri tela polaze iz iste tačke ravni kretanja (po Blok-u: »les chocs passés«) pretstavljao specijalni slučaj problema koji je definisao i tretirao Milanković.

Ovim je nesumnjivo utvrdjena veza izmedju problema sudara triju tela i onog specijalnog problema triju tela postalih rasprskavanjem jednoga tela pod dejstvom unutrašnjih sila. Fundamentom ove veze služe sledeće zajedničke karakteristike obadva, do sada, sasvim izolovano tretirana problema:

1. projekcije vektora položaja težišta ovih tela s obzirom na zajednički centar inercije teže nuli, kad vreme $t \to t_o$ (t_o — momenat sudara odnosno rasprskavanja);

2. kretanje je ravno;

3. integraciona konstanta u integralu momenta kvantiteta kretanja jednaka je nuli;

4. specifikacijom karaktera sila, uz prednje karakteristike, ostvaruje se potpuna identičnost ovih problema.

Posmatrajmo sada problem rasprskavanja i uvedimo sledeće pretpostavke:

1. da su medjusobni uticaji materijalnih tačaka funkcije njihovih medjusobnih rastojanja oblika $\varphi(x) = x^{\alpha}$, pri čemu je $\alpha < -1$;

2. ako vektore položaja triju tačaka s obzirom na njihovo težište pretstavimo u obliku

(22) $$\mathfrak{R}_i = (\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i)\,\delta, \quad (i = 1, 2, 3),$$

da, kad $t \to t_o$:

a) $$\delta \to 0, \quad \mathfrak{r}_i \to 0 \text{ i } \mathfrak{R}_i \to 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

b) projekcije vektora $\frac{d}{dt}(\mathfrak{r}_i\delta)$ na ose odabranog koordinatnog sistema pretstavljaju infinitezimale višeg rada u poredjenju sa $\frac{d\delta}{dt}$ tj.

(23) $$\frac{d}{dt}(\mathfrak{r}_i\delta) : \frac{d\delta}{dt} \to 0, \quad t \to t_o \quad (i = 1, 2, 3),$$

zbog čega se za sve $t \in (t_o, t')$, a gde je t' dovoljno blisko ka t_o, može uzeti aproksimativno

(24) $$\frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} \approx \mathfrak{A}_i \frac{d\delta}{dt} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Sa ovim pretpostavkama, učinjenim u problemu rasprskavanja, dolazimo do jednog njegovog specijalnog slučaja koji ćemo u daljem izlaganju zvati kratkoće radi *suženim problemom rasprskavanja.*

Očigledno je da je Blok-ov problem specijalni slučaj suženog problema rasprskavanja, pri kome se zakon $\varphi(x)$ iz pretpostavke 1. dobija za vrednost $\alpha = -2$.

5. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA U SUŽENOM PROBLEMU RASPRSKAVANJA

Pre nego što pristupimo detaljnom proučavanju suženog problema rasprskavanja, pokazaćemo jednu značajnu osobinu i karakteristiku ovog problema.

Napišimo za sada vektorske diferencijalne jednačine kretanja problema u obliku

$$(25)\qquad m_i \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2} = \mathfrak{P}_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ovde je:

$$\mathfrak{P}_1 = m_1 m_2 \frac{\varphi(r_{12})}{r_{12}} (\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1) - m_1 m_3 \frac{\varphi(r_{13})}{r_{13}} (\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3),$$

$$(26)\qquad \mathfrak{P}_2 = m_2 m_3 \frac{\varphi(r_{23})}{r_{23}} (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_2) - m_2 m_1 \frac{\varphi(r_{12})}{r_{12}} (\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1),$$

$$\mathfrak{P}_3 = m_3 m_1 \frac{\varphi(r_{13})}{r_{13}} (\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3) - m_3 m_2 \frac{\varphi(r_{23})}{r_{23}} (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_2),$$

ili

$$\mathfrak{P}_1 = m_1 m_2 \frac{\varphi(|\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1|)}{|\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1|} (\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1) - m_1 m_3 \frac{\varphi(|\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3|)}{|\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3|} (\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3),$$

$$(27)\qquad \mathfrak{P}_2 = m_2 m_3 \frac{\varphi(|\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_2|)}{|\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_2|} (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_2) - m_2 m_1 \frac{\varphi(|\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1|)}{|\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1|} (\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1),$$

$$\mathfrak{P}_3 = m_3 m_1 \frac{\varphi(|\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3|)}{|\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3|} (\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_3) - m_3 m_2 \frac{\varphi(|\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_3|)}{|\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_2|} (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_2).$$

Pretstavimo vektore položaja $\mathfrak{R}_i$ u obliku

$$(28)\qquad \mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_i u \qquad (i = 1, 2, 3),$$

gde su $\mathfrak{R}_i$ konstantni vektori, a u pretstavlja funkciju vremena. Analitički izraz ove funkcije može se dobiti iz sistema vektorskih diferencijalnih jednačina (25), a jednostavnije na sledeći način.

Podjimo od zakona živc sile za posmatrani sistem u diferencijalnom obliku

$$(29)\qquad d\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i (\dot{\mathfrak{R}}_i \dot{\mathfrak{R}}_i)\right\} = \sum_{i=1}^{3} (\mathfrak{P}_i \, d\mathfrak{R}_i).$$

Pre svega, prema (28) je

$$(30)\qquad (\dot{\mathfrak{R}}_i \dot{\mathfrak{R}}_i) = (\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_i)\left(\frac{du}{dt}\right)^2, \quad d\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_i \, du \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Zamenom $\mathfrak{R}_i$ iz (28) u skalarne proizvode ($\mathfrak{P}_i \; d\mathfrak{R}_i$) i vodeći računa da je $\varphi(x) = x^{\alpha}$, na osnovi relacija (27), dobićemo:

$$(31)\qquad \{\mathfrak{P}_i\}_{\mathfrak{R} = \mathfrak{R} u} = u^{\alpha} \cdot \mathfrak{K}_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

gde su $\mathfrak{K}_i$ konstantni vektori.

Tako napr. za $i=1$ imamo:

$$\{\mathfrak{P}_1\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{R}u} = u^{\alpha}\,\mathfrak{K}_1 = u^{\alpha}\left\{m_1 m_2 \frac{\varphi(|\mathfrak{R}_2-\mathfrak{R}_1|)}{|\mathfrak{R}_2-\mathfrak{R}_1|}(\mathfrak{R}_2-\mathfrak{R}_1) - \right.$$

$$\left. - m_1 m_3 \frac{\varphi(|\mathfrak{R}_1-\mathfrak{R}_3|)}{|\mathfrak{R}_1-\mathfrak{R}_3|}(\mathfrak{R}_1-\mathfrak{R}_3)\right\},$$

tj.

$$\mathfrak{K}_1 = m_1 m_2 \frac{\varphi(|\mathfrak{R}_2-\mathfrak{R}_1|)}{|\mathfrak{R}_2-\mathfrak{R}_1|}(\mathfrak{R}_2-\mathfrak{R}_1) - m_1 m_3 \frac{\varphi(|\mathfrak{R}_1-\mathfrak{R}_3|)}{|\mathfrak{R}_1-\mathfrak{R}_3|}(\mathfrak{R}_1-\mathfrak{R}_3).$$

Ako nadjene izraze sa $(\dot{\mathfrak{R}}_i, \dot{\mathfrak{R}}_i)$ i $d\mathfrak{R}_i$ iz (30), kao i za $\{\mathfrak{P}_i\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{R}u}$ iz (31) zamenimo u (29), dobićemo:

$$d\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \sum_{i=1}^{3} m_i(\mathfrak{R}_i\,\mathfrak{R}_i)\right\} = u^{\alpha}\,du \sum_{i=1}^{3}(\mathfrak{K}_i\,\mathfrak{R}_i),$$

ili

$$d\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{\sum_{i=1}^{3}(\mathfrak{K}_i\,\mathfrak{R}_i)}{\sum_{i=1}^{3} m_i(\mathfrak{R}_i\,\mathfrak{R}_i)}\,u^{\alpha}\,du. \tag{32}$$

Integracijom poslednje jednačine dobijamo:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4\,\frac{\sum_{i=1}^{3}(\mathfrak{K}_i\,\mathfrak{R}_i)}{\sum_{i=1}^{3} m_i(\mathfrak{R}_i\,\mathfrak{R}_i)}\cdot\frac{1}{2(\alpha+1)}(u^{\alpha+1}+C),$$

gde C označava integracionu konstantu. Odavde je

$$\frac{du}{dt} = 2\,\kappa\sqrt{u^{\alpha+1}+C}, \tag{33}$$

gde je

$$\kappa = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(\mathfrak{K}_i\,\mathfrak{R}_i)}{2(\alpha+1)\sum_{i=1}^{3} m_i(\mathfrak{R}_i\,\mathfrak{R}_i)}}. \tag{34}$$

Iz (33) proizilazi:

$$\frac{u^{-\frac{\alpha+1}{2}}}{\sqrt{1+Cu^{-(\alpha+1)}}}\, du = 2\,\kappa\, dt. \tag{35}$$

Razvijajući $(1+C\,u^{-(\alpha+1)})^{-\frac{1}{2}}$ na levoj strani u binomijalni potencijalni red konvergentan za $\alpha < -1$ i dovoljno male vrednosti od u, dobijamo:

$$(1+Cu^{-(\alpha+1)})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{C}{2}u^{-(\alpha+1)} + \ldots \; .$$

Jednačina (35) postaje

$$(u^{-\frac{\alpha+1}{2}} - \frac{C}{2}u^{-\frac{3(\alpha+1)}{2}} + \ldots)\, du = 2\,\kappa\, dt.$$

Integracijom dobijamo, pošto za $t = t_0$ treba da bude $u_0 = 0$:

$$\frac{2}{1-\alpha}u^{\frac{1-\alpha}{2}} + \frac{C}{2}\,\frac{2}{3\alpha+1}\,u^{-\frac{3\alpha+1}{2}} - \ldots = 2\,\kappa\,(t-t_0),$$

ili

$$\int_0^u \left(u^{-\frac{\alpha+1}{2}} - \frac{C}{2}u^{-\frac{3(\alpha+1)}{2}} + \ldots \right) du = 2\,\kappa\,(t-t_0),$$

ili

$$u^{\frac{1-\alpha}{2}} + \frac{C}{2}\,\frac{1-\alpha}{3\alpha+1}\,u^{-\frac{3\alpha+1}{2}} - \ldots = (1-\alpha)\,\kappa\,(t-t_0). \tag{36}$$

Ako se izvrši inverzija ovoga reda, dobija se veličina u razvijena po rastućim stepenima veličine

$$\tau = [(1-\alpha)\,\kappa]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot (t-t_0)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{37}$$

pri čemu je najniži stepen u ovome redu

$$\tau^2 = [(1-\alpha)\,\kappa]^{\frac{2}{1-\alpha}} \cdot (t-t_0)^{\frac{2}{1-\alpha}}. \tag{38}$$

Za $\alpha = -2$ dobija se za problem sudara triju tela neposredno iz (37) Sundman-ov rezultat [5] i Blok-ov [3], naime u ovome specijalnom slučaju je

$$\tau = (3\,\kappa)^{1/3} \cdot (t-t_0)^{1/3}. \tag{39}$$

Blok-ov postupak za dobijanje relacije (39) izložen metodom vektorske analize sastoji se u ovome. Smenjujući $\mathfrak{R}_i$ i $\ddot{\mathfrak{R}}_i$ iz (28) u sistem vektorskih diferencijalnih jednačina kretanja (25), dobija se

(40) $$m_i \mathfrak{R}_i \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{m_i}{u^2}\mathfrak{R}_i' \qquad (i=1, 2, 3).$$

Odavde, skalarnim množenjem sa $\mathfrak{R}_i$, dobijamo za svaku materijalnu tačku ponaosob

$$(\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_i)\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{u^2}(\mathfrak{R}_i' \mathfrak{R}_i) \qquad (i=1, 2, 3).$$

Stavljajući $(\mathfrak{R}_i' \mathfrak{R}_i)/(\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_i) = -2\kappa^2$, $(i=1, 2, 3)$, dolazi se do diferencijalne jednačine:

(41) $$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{2\kappa^2}{u^2}.$$

Integracijom ove jednačine nalazi Blok da se projekcije vektora položaja $\mathfrak{R}_i$ mogu razviti u potencijalne redove po veličini τ, datoj relacijom (39), pri čemu je τ^2 najniži stepen ove veličine koja figuriše u tim redovima.

Na osnovi prethodnog zaključka moguće je dati definitivni oblik diferencijalnih jednačina kretanja za suženi problem rasprskavanja, polazeći od vektorskih jednačina (25).

U tom cilju, uvedimo mesto vremena t kao nezavisno promenljive, novu nezavisno promenljivu τ datu relacijom (37). Pre svega iz ove relacije, diferenciranjem po vremenu, nalazimo:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{[(1-\alpha)\kappa]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha} \cdot (t-t_o)^{\frac{1}{1-\alpha}-1},$$

odakle se sasvim elementarnim postupkom, uzimajući u obzir (37), nalazi

(42) $$\frac{d\tau}{dt} = \kappa\tau^{\alpha}.$$

Na osnovu ovoga, postupak za transformaciju promenljivih u vektorskim diferencijalnim jednačinama (25) bio bi sledeći.

Pre svega je

$$\frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} = \frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \qquad (i=1, 2, 3),$$

ili prema (42)

(43) $$\frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} = \kappa\tau^{\alpha}\frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau} \qquad (i=1, 2, 3).$$

Dalje je iz (43)

$$\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2} = \frac{d}{d\tau}\left\{\kappa\tau^{\alpha}\frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau}\right\} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \left\{\kappa\tau^{\alpha}\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{d\tau^2} + \kappa\alpha\tau^{\alpha-1}\frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau}\right\} \cdot \frac{d\tau}{dt} \qquad (i=1, 2, 3),$$

ili prema (42)

$$\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2}=\left\{\kappa\tau^{\alpha}\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{d\tau^2}+\kappa\alpha\tau^{\alpha-1}\frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau}\right\}\kappa\tau^{\alpha}\qquad (i=1,\,2,\,3),$$

ili

$$\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2}=\kappa^2\tau^{2\alpha}\left\{\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{d\tau^2}+\frac{\alpha}{\tau}\,\frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau}\right\}\qquad (i=1,\,2,\,3). \tag{44}$$

Zamenom izvoda $\dfrac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2}$ iz (44) u (25), dobiće se definitivni oblik vektorskih diferencijalnih jednačina kretanja za suženi problem rasprskavanja, u kojima, mesto vremena t figuriše kao nezavisno promenljiva — veličina τ, data relacijom (37) Ove će jednačine biti oblika:

$$\kappa^2 m_i\,\tau^{2\alpha}\cdot\left\{\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{d\tau^2}+\frac{\alpha}{\tau\cdot}\,\frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau}\right\}=\mathfrak{P}_i\qquad (i=1,\,2,\,3). \tag{45}$$

Za $\alpha=-2$, dobija se iz (45):

$$\frac{\kappa^2 m_i}{\tau^4}\left\{\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{d\tau^2}-\frac{2}{\tau}\,\frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau}\right\}=\operatorname{grad}_{\mathfrak{R}_i}U\qquad (i=1,\,2,\,3), \tag{45'}$$

a ovo su Blok-ove jednačine za problem sudara triju tela [3].

6. PARTIKULARNI INTEGRALI SUŽENOG PROBLEMA RASPRSKAVANJA I LANGRANGE-OVA EGZAKTNA REŠENJA

Posmatrajmo sistem vektorskih diferencijalnih jednačina kretanja (45) za suženi problem rasprskavanja, pri čemu su sile $\mathfrak{P}_i$ date obrascima (26) ili (27), gde je

$$\varphi(x)=x^{\alpha},\ \ (\alpha<-1).$$

Neka su nam za vektore položaja triju masa date relacije oblika

$$\mathfrak{R}_i=\mathfrak{A}_i\,\tau^2\qquad (i=1,\,2,\,3), \tag{46}$$

gde nam $\mathfrak{A}_i$ pretstavlja izvesne, za sada neodredjene, vektorske konstante, a τ^2 je dato sa (38). Odredimo konstante $\mathfrak{A}_i$ tako, da nam jednačine (46) pretstavljaju partikularna rešenja tj. tako da relacije (46) zadovoljavaju sistem vektorskih jednačina (45).

Iz (46), diferencirajući $\mathfrak{R}_i$ dvaput po τ, dobijamo:

$$\frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau}=2\,\mathfrak{A}_i\tau,\quad \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{d\tau^2}=2\,\mathfrak{A}_i\qquad (i=1,2,3).$$

Zamenom ovih izvoda u diferencijalne jednačine kretanja (45), nalazimo

$$\kappa^2 m_i \tau^{2\alpha} \cdot \left\{ 2\mathfrak{A}_i + \frac{\alpha}{\tau} \cdot 2\mathfrak{A}_i \tau \right\} = \{\mathfrak{P}_i\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\tau^2} \quad (i=1,2,3),$$

ili

$$2\kappa^2 (1+\alpha)\, m_i \mathfrak{A}_i \tau^{2\alpha} = \{\mathfrak{P}_i\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\tau^2} \quad (i=1,2,3), \tag{47}$$

pri čemu nam $\{\mathfrak{P}_i\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\tau^2}$ $(i=1, 2, 3)$ označava da u (27) sve vektore $\mathfrak{R}_i$ treba smeniti izrazima oblika $\mathfrak{A}_i \tau^2$. Znači, na osnovi (46), jednačine (27), nam odredjuju sledeće vrednosti sila $\mathfrak{P}_i$:

$$\begin{aligned}
\{\mathfrak{P}_1\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\tau^2} &= m_1 m_2 \frac{\varphi(\tau^2 |\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|)}{|\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|}(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1) - m_1 m_3 \frac{\varphi(\tau^2 |\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|)}{|\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|}\cdot(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3), \\
\{\mathfrak{P}_2\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\tau^2} &= m_2 m_3 \frac{\varphi(\tau^2 |\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|)}{|\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|}\cdot(\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2) - m_2 m_1 \frac{\varphi(\tau^2 |\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|)}{|\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|}\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1), \\
\{\mathfrak{P}_3\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\tau^2} &= m_3 m_1 \frac{\varphi(\tau^2 |\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|)}{|\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|}\cdot(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3) - m_3 m_2 \frac{\varphi(\tau^2 |\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|)}{|\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|}\cdot(\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2).
\end{aligned} \tag{48}$$

Pošto je $\varphi(x) = x^\alpha$, to je

$$\varphi(\tau^2 z) = \tau^{2\alpha}\varphi(z), \tag{49}$$

pa jednačine (48) postaju:

$$\begin{aligned}
\{\mathfrak{P}_1\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\tau^2} &= \tau^{2\alpha}\cdot\left\{ m_1 m_2 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|)}{|\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|}\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1) - m_1 m_3 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|)}{|\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|}(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3)\right\}, \\
\{\mathfrak{P}_2\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\tau^2} &= \tau^{2\alpha}\cdot\left\{ m_2 m_3 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|)}{|\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|}\cdot(\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2) - m_2 m_1 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|)}{|\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|}(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1)\right\}, \\
\{\mathfrak{P}_3\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\tau^2} &= \tau^{2\alpha}\cdot\left\{ m_3 m_1 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|)}{|\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|}(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3) - m_3 m_2 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|)}{|\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|}\cdot(\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2)\right\}.
\end{aligned} \tag{50}$$

Posle zamene ovih vrednosti za $\{\mathfrak{P}_i\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\tau^2}$ u jednačine (47) i deobe svake od njih sa $\tau^{2\alpha}$, nalazimo:

$$\begin{aligned}
2\kappa^2(1+\alpha)\, m_1 \mathfrak{A}_1 &= m_1 m_2 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|)}{|\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|}(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1) - m_1 m_3 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|)}{|\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|}(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3), \\
2\kappa^2(1+\alpha)\, m_2 \mathfrak{A}_2 &= m_2 m_3 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|)}{|\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|}(\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2) - m_2 m_1 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|)}{|\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1|}(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1), \\
2\kappa^2(1+\alpha)\, m_3 \mathfrak{A}_3 &= m_3 m_1 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|)}{|\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3|}(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3) - m_3 m_2 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|)}{|\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2|}(\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2).
\end{aligned} \tag{51}$$

Stavimo:

$$\mathfrak{K}_1 = m_1\, m_2 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1|)}{|\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1|}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1) - m_1\, m_3 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3|)}{|\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3|}(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3),$$

$$(52)\qquad \mathfrak{K}_2 = m_2\, m_3 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2|)}{|\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2|}(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2) - m_2\, m_1 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1|)}{|\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1|}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1),$$

$$\mathfrak{K}_3 = m_3\, m_1 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3|)}{|\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3|}(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3) - m_3\, m_2 \frac{\varphi(|\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2|)}{|\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2|}(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2),$$

tada jednačine (51) postaju

$$(53)\qquad 2\,\kappa^2 (1+\alpha)\, m_i \mathfrak{A}_i = \mathfrak{K}_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Pre nego što iz jednačina (53) izvedemo odgovarajuće zaključke, obeležimo kratkoće radi

$$(54)\qquad \mathfrak{A}_j - \mathfrak{A}_i = \mathfrak{d}_{ij},\quad d_{ij} = |\mathfrak{d}_{ij}| = |\mathfrak{d}_{ji}| \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

tada jednačine (52) možemo napisati u obliku:

$$\mathfrak{K}_1 = m_1\, m_2 \frac{\varphi(d_{12})}{d_{12}}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1) - m_1\, m_3 \frac{\varphi(d_{13})}{d_{13}}(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3),$$

$$(55)\qquad \mathfrak{K}_2 = m_2\, m_3 \frac{\varphi(d_{23})}{d_{23}}(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2) - m_2\, m_1 \frac{\varphi(d_{12})}{d_{12}}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1),$$

$$\mathfrak{K}_3 = m_3\, m_1 \frac{\varphi(d_{13})}{d_{13}}(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3) - m_3\, m_2 \frac{\varphi(d_{23})}{d_{23}}(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2).$$

Zamislimo u ravni kretanja one tačke koje su prema težištu sistema odredjene vektoriima položaja $\mathfrak{A}_i$ i pretpostavimo da smo u te položaje stavili materijalne tačke m_i. U tom slučaju vektorske vrednosti sila koje u tim položajima dejstvuju na mase m_i možemo dobiti iz jednačina (27), zamenjujući u njima vektore $\mathfrak{R}_i$ vektorima $\mathfrak{A}_i$. Tako napr. za $i = 1$, iz prve od jednačina (27), a prema (54) i (55), bismo dobili:

$$\{\mathfrak{P}_1\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}} = m_1\, m_2 \frac{\varphi(d_{12})}{d_{12}}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1) - m_1\, m_3 \frac{\varphi(d_{13})}{d_{13}}(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3) = \mathfrak{K}_1.$$

Može se pokazati da je uopšte:

$$(56)\qquad \{\mathfrak{P}_i\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}} = \mathfrak{K}_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Znači, dakle, da vektori $\mathfrak{K}_i$ odredjeni iz (55) pretstavljaju vektorske vrednosti sila koje bi dejstvovale na mase m_i, ako bismo te mase položili u one tačke ravni kretanja koje su prema težištu odredjene vektorima položaja $\mathfrak{A}_i$. Prema (53) ove sile imaju vrednosti:

$$(53')\qquad \{\mathfrak{P}_i\}_{\mathfrak{R}=\mathfrak{A}} = \mathfrak{K}_i = 2\,\kappa^2 (1+\alpha)\, m_i \mathfrak{A}_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Kao što se vidi iz (53') ove su sile proporcionalne vektorima položaja $\mathfrak{A}_i$, pa iz stava o polu gravitacije proizilazi, da *položaji masa m_i odredjeni vektorima položaja $\mathfrak{A}_i$ prema težištu sistema formiraju jednu od konfiguracija egzaktnih rešenja problema triju tela.*

a) Nekolinearna konfiguracija masa

U slučaju nekolinearne konfiguracije masa egzistencija egzaktnih rešenja uslovljena je poklapanjem pola gravitacije sa težištem sistema. Uslovi za to su izraženi jednačinama (8), gde r_{ij} treba smeniti sa d_{ij} tj. sa:

(57)
$$\frac{\varphi(d_{12})}{d_{12}}=\frac{\varphi(d_{23})}{d_{23}}=\frac{\varphi(d_{13})}{d_{13}}=-\frac{2\,\kappa^2(1+\alpha)}{M},$$

ili pošto je $\varphi(x)=x^\alpha$, imamo:

(58)
$$d_{12}^{\alpha-1}=d_{23}^{\alpha-1}=d_{13}^{\alpha-1},$$

odakle je

(59)
$$d_{12}=d_{23}=d_{13}.$$

To znači da tri mase formiraju konfiguraciju ravnostranog trougla.

Prva od jednačina (51), s obzirom na (57) daje

$$M\,\mathfrak{A}_1-m_3(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3)+m_2(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1)=0,$$

odakle, imajući u vidu da je $M=m_1+m_2+m_3$, nalazimo

(60)
$$m_1\,\mathfrak{A}_1+m_2\,\mathfrak{A}_2+m_3\,\mathfrak{A}_3=0$$

koja pretstavlja integral težišta za uočenu konfiguraciju. Ista se relacija dobija i iz dve druge jednačine (51).

Odaberemo li jedinicu dužine tako da je

(61)
$$d_{12}=d_{23}=d_{13}=1,$$

tada iz (57) proizilazi za značenje konstante κ^2:

(62)
$$2\kappa^2=-\frac{M}{1+\alpha},$$

gde je prema napred učinjenoj pretpostavci $M/(1+\alpha)<0$ za $\alpha<-1$.

Ako su projekcije vektora $\mathfrak{A}_i$ $(a_i,\,b_i)$, tada ralacije (61), na osnovi (54) daju:

(63)
$$\begin{aligned}(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2&=1,\\(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2&=1,\\(a_1-a_3)^2+(b_1-b_3)^2&=1.\end{aligned}$$

Skalarne jednačine za integral težišta (60) su:

(64)
$$m_1a_1+m_2a_2+m_3a_3=0,\qquad m_1b_1+m_2b_2+m_3b_3=0.$$

Za određivanje šest projekcija a_i, b_i imamo sistem od pet jednačina (63) i (64). Zato, pošto orijentacija osa koordinatnog sistema nije bila fiksirana, možemo jednu relaciju izmedju ovih projekcija izabrati proizvoljno. Uzimajući kao i Blok

$$b_1 - b_2 = 1, \tag{65}$$

koordinatni sistem će biti fiksiran i ravnostrani trougao u njemu će imati potpuno odredjeni položaj. Sistem jednačina (63) i (65) ekvivalentan je sa sistemom

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0, & b_1 - b_2 &= +1; \\ a_1 - a_3 &= +\frac{\sqrt{3}}{2}, & b_1 - b_3 &= +\frac{1}{2}; \\ a_2 - a_3 &= +\frac{\sqrt{3}}{2}, & b_2 - b_3 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{66}$$

Jednačine (66) rešene sa (64) odredjuju projekcije vektora $\mathfrak{A}_i$ na ose odabranog koordinatnog sistema tj. odredjuju konfiguraciju ravnostranog trougla koja pretstavlja partikularno rešenje problema.

Svi rezultati i zaključci u vezi sa problemom sudara, dobijaju se iz prethodnih kao specijalni slučaj ($\alpha = -2$).

Od interesa je ovde naročito podvući da *jedna ista i potpuno odredjena konfiguracija ravnostranog trougla pretstavlja partikularna rešenja suženog problema rasprskavanja*, pri čemu u zakonu uzajamnih uticaja triju materijalnih tačaka $\varphi(x) = x^\alpha$, izložilac α može uzimati sve realne vrednosti iz intervala $-\infty < \alpha < -1$. Očigledno je da je Sundman—Blok-ov problem ovde sadržan kao specijalni slučaj i odgovara vrednosti $\alpha = -2$, pri čemu su još rezultujuće sile oblika $\operatorname{grad}_{\mathfrak{R}_i} U$.

b) Pravoliniska konfiguracija masa

U slučaju pravoliniske konfiguracije masa, pri čemu je poredak ovih m_3, m_2, m_1, imamo, koristeći jednačine (51) i sl. 2, sledeće tri jednačine:

$$\begin{aligned} -2\kappa^2(1+\alpha)\mathfrak{A}_1 &= m_2\frac{\varphi(d_{12})}{d_{12}}(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2) + m_3\frac{\varphi(d_{13})}{d_{13}}(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3), \\ -2\kappa^2(1+\alpha)\mathfrak{A}_2 &= m_3\frac{\varphi(d_{23})}{d_{23}}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_3) + m_1\frac{\varphi(d_{12})}{d_{12}}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1), \\ -2\kappa^2(1+\alpha)\mathfrak{A}_3 &= m_1\frac{\varphi(d_{13})}{d_{13}}(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_1) + m_2\frac{\varphi(d_{23})}{d_{23}}(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2). \end{aligned} \tag{67}$$

Oduzimanjem druge jednačine od prve i treće od druge, dobijamo:

$$\begin{aligned} -2\kappa^2(1+\alpha)(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2) = (m_1 + m_2)\frac{\varphi(d_{12})}{d_{12}}(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2) + m_3\Bigg[\frac{\varphi(d_{13})}{d_{13}}(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3) - \\ -\frac{\varphi(d_{23})}{d_{23}}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_3)\Bigg], \end{aligned} \tag{68}$$

$$-2\kappa^2(1+\alpha)(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_3)=(m_2+m_3)\frac{\varphi(d_{23})}{d_{23}}(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_3)+m_1\left[\frac{\varphi(d_{12})}{d_{12}}(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1)-\right.$$

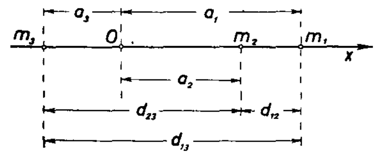
$$\left.-\frac{\varphi(d_{13})}{d_{13}}(\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_1)\right].$$

Prema sl. 2 je:

(69) $$\mathfrak{A}_1=a_1\,\mathfrak{i},\quad \mathfrak{A}_2=a_2\,\mathfrak{i},\quad \mathfrak{A}_3=-a_3\,\mathfrak{i},$$

odakle

(70) $$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2&=(a_1-a_2)\,\mathfrak{i}=d_{12}\,\mathfrak{i},\\ \mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_3&=(a_2+a_3)\,\mathfrak{i}=d_{22}\,\mathfrak{i},\\ \mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_1&=-(a_1+a_3)\,\mathfrak{i}=-d_{13}\,\mathfrak{i}.\end{aligned}$$



Sl 2.

Posle zamene razlika $\mathfrak{A}_i-\mathfrak{A}_j$ iz (70) u jednačine (68) i posle skalarnog množenja ovih poslednjih jednačina vektorom $\mathfrak{i}$ dobijamo:

(71) $$\begin{aligned}-2\kappa^2(1+\alpha)\,d_{12}&=(m_1+m_2)\,\varphi(d_{12})+m_3\,[\varphi(d_{13})-\varphi(d_{23})],\\ -2\kappa^2(1+\alpha)\,d_{23}&=(m_2+m_3)\,\varphi(d_{23})+m_1\,[\varphi(d_{13})-\varphi(d_{12})].\end{aligned}$$

Izaberimo jedinicu dužine tako, da je rastojanje

(72) $$d_{23}=1.$$

Stavimo još

(73) $$d_{12}=z,$$

tada je

(74) $$d_{13}=d_{12}+d_{23}=1+z.$$

Na osnovi (72), (73) i (74) jednačine (71) dobijaju ovaj oblik:

(75) $$\begin{aligned}-2\kappa^2(1+\alpha)\cdot z&=(m_1+m_2)\,\varphi(z)+m_3\,[\varphi(1+z)-\varphi(1)],\\ -2\kappa^2(1+\alpha)\quad&=(m_2+m_3)\,\varphi(1)+m_1\,[\varphi(1+z)-\varphi(z)].\end{aligned}$$

Deobom prve od jednačina (75) drugom nalazimo:

(76) $$z=\frac{(m_1+m_2)\,\varphi(z)+m_3\,[\varphi(1+z)-\varphi(1)]}{(m_2+m_3)\,\varphi(1)+m_1\,[\varphi(1+z)-\varphi(z)]},$$

ili

(77) $$\begin{aligned}&m_1\,[z\varphi(1+z)-(1+z)\,\varphi(z)]+m_2\,[z\cdot\varphi(1)-\varphi(z)]+\\ &+m_3[(1+z)\cdot\varphi(1)-\varphi(1+z)]=0.\end{aligned}$$

Pošto je $\varphi(x)=x^{\alpha}$, prethodna jednačina postaje:

(78) $$\begin{aligned}&m_1 z(1+z)\,[(1+z)^{\alpha-1}-z^{\alpha-1}]+m_2 z\,(1-z^{\alpha-1})+\\ &+m_3\,(1+z)[1-(1+z)^{\alpha-1}]=0.\end{aligned}$$

2*

Realnu pozitivnu nulu jednačine (78) treba zameniti u sistem jednačina

$$(79)\qquad a_1-a_2=z,\quad a_1-a_3=1+z,\quad a_2-a_3=1,\quad b_1=b_2=b_3=0,$$
$$m_1 a_1+m_2 a_2+m_3 a_3=0,$$

pa će time biti odredjena pravoliniska konfiguracija triju materijalnih tačaka. Vrednost konstante κ^2 dobija se tada iz druge jednačine (75) zamenom realnog pozitivnog korena jednačine (78).

I ako su jednačine (79) za odredjivanje pravoliniske konfiguracije triju masa istog oblika kao i jednačine za odredjivanje ove konfiguracije u problemu sudara, u ovome slučaju partikularna rešenja ne pretstavlja jedna ista konfiguracija, kao što je to bio slučaj kod nekolinearnog rasporeda masa. Ova konfiguracija se prema (79) menja u vezi sa promenom, odnosno kretanjem realne pozitivne nule $z=z(\alpha)$ jednačine (78) koja pretstavlja funkciju eksponenta α u zakonu $\varphi(x)=x^{\alpha}$ koji karakteriše medjusobne uticaje u suženom problemu triju tela.

7. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE ZA VARIJACIJU KONSTANATA PARTIKULARNIH REŠENJA

Na osnovi jednačina (27), uzimajući još u obzir da je prema jednačinama (2) i (3)

$$\mathfrak{r}_{12}=\mathfrak{R}_2-\mathfrak{R}_1,\quad \mathfrak{r}_{23}=\mathfrak{R}_3-\mathfrak{R}_2,\quad \mathfrak{r}_{31}=\mathfrak{R}_1-\mathfrak{R}_3;$$
$$(80)\qquad r_{12}=|\mathfrak{r}_{12}|=|\mathfrak{R}_2-\mathfrak{R}_1|,\quad r_{23}=|\mathfrak{r}_{23}|=|\mathfrak{R}_3-\mathfrak{R}_2|,\quad r_{13}=|\mathfrak{r}_{31}|=|\mathfrak{R}_1-\mathfrak{R}_3|$$

diferencijalne jednačine kretanja (45) za suženi problem rasprskavanja dobijaju ovaj oblik:

$$\kappa^2 m_1\tau^{2\alpha}\left\{\frac{d^2\mathfrak{R}_1}{d\tau^2}+\frac{\alpha}{\tau}\frac{d\mathfrak{R}_1}{d\tau}\right\}=m_1 m_2\frac{\varphi(r_{12})}{r_{12}}\mathfrak{r}_{12}-m_1 m_3\frac{\varphi(r_{13})}{r_{13}}\mathfrak{r}_{31},$$
$$\kappa^2 m_2\tau^{2\alpha}\left\{\frac{d^2\mathfrak{R}_2}{d\tau^2}+\frac{\alpha}{\tau}\frac{d\mathfrak{R}_2}{d\tau}\right\}=m_2 m_3\frac{\varphi(r_{23})}{r_{23}}\mathfrak{r}_{23}-m_2 m_1\frac{\varphi(r_{12})}{r_{12}}\mathfrak{r}_{12},$$
$$(81)\qquad \kappa^2 m_3\tau^{2\alpha}\left\{\frac{d^2\mathfrak{R}_3}{d\tau^2}+\frac{\alpha}{\tau}\frac{d\mathfrak{R}_3}{d\tau}\right\}=m_3 m_1\frac{\varphi(r_{13})}{r_{13}}\mathfrak{r}_{31}-m_3 m_2\frac{\varphi(r_{23})}{r_{23}}\mathfrak{r}_{23}.$$

Partikularna rešenja ovoga sistema vektorskih diferencijalnih jednačina data su relacijama $\mathfrak{R}_i=\mathfrak{A}_i\tau^2$, $(i=1,2,3)$.

Primenićemo za varijaciju konstanata $\mathfrak{A}_i$ koje odredjuju konfiguracije egzaktnog rešenja, postupak koji primenjuje i Blok u svojim raspravama [3] i [4]. Ako, dakle, stavimo:

$$(82)\qquad \mathfrak{R}_i=(\mathfrak{A}_i+\mathfrak{r}_i)\tau^2\quad (i=1,2,3),$$

onda je potrebno odrediti vektore $\mathfrak{r}_i$ kao funkcije od τ tako, od relacije (82) pretstavljaju rešenja sistema vektorskih diferencijalnih jednačina (81).

Iz jednačina (82), uzastopnim diferenciranjem po τ dobijamo:

$$
(83)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau}=\tau^2\frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau}+2\tau\,(\mathfrak{A}_i+\mathfrak{r}_i),\\
&\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{d\tau^2}=\tau^2\frac{d^2\mathfrak{r}_i}{d\tau^2}+4\tau\frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau}+2\,(\mathfrak{A}_i+\mathfrak{r}_i),\\
&(i=1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}
$$

Zamenom ovih izvoda u leve strane vektorskih diferencijalnih jednačina kretanja (81) dobićemo:

$$
(84)\qquad
\begin{aligned}
&\kappa^2 m_i\,\tau^{2\alpha}\cdot\left\{\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{d\tau^2}+\frac{\alpha}{\tau}\frac{d\mathfrak{R}_i}{d\tau}\right\}=\\
&=\kappa^2 m_i\,\tau^{2\alpha}\cdot\left\{\tau^2\frac{d^2\mathfrak{r}_i}{d\tau^2}+4\tau\frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau}+2\,(\mathfrak{A}_i+\mathfrak{r}_i)+\frac{\alpha}{\tau}\left[\tau^2\frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau}+2\tau\,(\mathfrak{A}_i+\mathfrak{r}_i)\right]\right\}=\\
&=\kappa^2 m_i\,\tau^{2\alpha}\cdot\left\{\tau^2\frac{d^2\mathfrak{r}_i}{d\tau^2}+(4+\alpha)\,\tau\frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau}+2\,(1+\alpha)(\mathfrak{A}_i+\mathfrak{r}_i)\right\}\\
&(i=1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}
$$

Na osnovi (84) i (81), vektorske diferencijalne jednačine za varijaciju konstanata $\mathfrak{A}_i$ koje odgovaraju egzaktnim rešenjima, dobijaju oblik:

$$
(85)\qquad
\begin{aligned}
&\kappa^2 m_1\,\tau^{2\alpha}\cdot\left\{\tau^2\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{d\tau^2}+(4+\alpha)\,\tau\frac{d\mathfrak{r}_1}{d\tau}+2\,(1+\alpha)\,(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{r}_1)\right\}=\\
&=m_1 m_2\frac{\varphi(r_{12})}{r_{12}}\mathfrak{r}_{12}-m_1 m_3\frac{\varphi(r_{13})}{r_{13}}\mathfrak{r}_{31},\\
&\kappa^2 m_2\,\tau^{2\alpha}\cdot\left\{\tau^2\frac{d^2\mathfrak{r}_2}{d\tau^2}+(4+\alpha)\,\tau\frac{d\mathfrak{r}_2}{d\tau}+2\,(1+\alpha)\,(\mathfrak{A}_2+\mathfrak{r}_2)\right\}=\\
&=m_2 m_3\frac{\varphi(r_{23})}{r_{23}}\mathfrak{r}_{23}-m_2 m_1\frac{\varphi(r_{12})}{r_{12}}\mathfrak{r}_{12},\\
&\kappa^2 m_3\,\tau^{2\alpha}\cdot\left\{\tau^2\frac{d^2\mathfrak{r}_3}{d\tau^2}+(4+\alpha)\,\tau\frac{d\mathfrak{r}_3}{d\tau}+2\,(1+\alpha)\,(\mathfrak{A}_3+\mathfrak{r}_3)\right\}=\\
&=m_3 m_1\frac{\varphi(r_{13})}{r_{13}}\mathfrak{r}_{31}-m_3 m_2\frac{\varphi(r_{23})}{r_{23}}\mathfrak{r}_{23}.
\end{aligned}
$$

Po sebi se razume, da u desne strane jednačina (85) treba prema (80) zameniti vrednosti za $\mathfrak{R}_i$ date relacijama (82). Jednačine (85) možemo kraće napisati ovako:

$$
(86)\qquad
\begin{aligned}
&\kappa^2 m_i\,\tau^{2\alpha}\cdot\left\{\tau^2\frac{d^2\mathfrak{r}_i}{d\tau^2}+(4+\alpha)\,\tau\frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau}+2\,(1+\alpha)\,(\mathfrak{A}_i+\mathfrak{r}_i)\right\}=\mathfrak{P}_i\\
&(i=1,\ 2,\ 3),
\end{aligned}
$$

gde su sa $\mathfrak{P}_i$ označene desne strane jednačina (85) posle zamene vektora $\mathfrak{R}_i$ relacijama (82).

Za $\alpha = -2$, imamo da je $\mathfrak{P} = \mathrm{grad}_{\mathfrak{R}_i} U$ i jednačine (86) dobijaju oblik:

$$\frac{\kappa^2 m_i}{\tau^4}\left\{\tau^2 \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d \mathfrak{r}_i}{d\tau} - 2(\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i)\right\} = \mathrm{grad}_{\mathfrak{R}_i} U \tag{87}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3).$$

Ovo su poznate Blok-ove jednačine za varijaciju konstanata $\mathfrak{A}_i$ u problemu sudara, napisane u vektorskom obliku. Skalar U dat je relacijom

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

Ako se uzmu u obzir relacije (82) i U zameni novim skalarom V tako da je:

$$V = \tau^2 U, \tag{88}$$

tada je

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{r}_i} V = \tau^4 \,\mathrm{grad}_{\mathfrak{R}_i} U \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{89}$$

pa jednačine (87) postaju

$$\kappa^2 m_i \left\{\tau^2 \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau} - 2(\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i)\right\} = \mathrm{grad}_{\mathfrak{r}_i} V. \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{90}$$

Jednačine (90) pretstavljaju nam u definitivnom obliku, vektorske diferencijalne jednačine za varijaciju konstanata $\mathfrak{A}_i$ u problemu sudara. Kao što se iz prednjeg može videti, ove su jednačine dobijene iz opštih jednačina (86) koje se odnose na suženi problem rasprskavanja, a za specijalnu vrednost eksponenta α tj. $\alpha = -2$.

S obzirom na potrebu u daljoj razradi problema sudara triju tela zadržaćemo se na jednačinama (90). Pošto je

$$\mathfrak{A}_i(a_i, b_i),\ \mathfrak{r}_i(\xi_i, \eta_i),\ \frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau}\left(\frac{d\xi_i}{d\tau}, \frac{d\eta_i}{d\tau}\right),\ \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{d\tau^2}\left(\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2}, \frac{d^2\eta_i}{d\tau^2}\right),\ \mathrm{grad}_{\mathfrak{r}_i} V \left(\frac{\partial V}{\partial \xi_i}, \frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right), \tag{91}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3)$$

skalarne jednačine za varijaciju konstanata a_i i b_i koje odgovaraju sistemu vektorskih jednačina (90) imaju oblik:

$$\begin{aligned} \kappa^2 m_i \left\{\tau^2 \frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\xi_i}{d\tau} - 2(a_i + \xi_i)\right\} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_i}, \\ \kappa^2 m_i \left\{\tau^2 \frac{d^2\eta_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\eta_i}{d\tau} - 2(b_i + \eta_i)\right\} &= \frac{\partial V}{\partial \eta_i}, \end{aligned} \tag{92}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3).$$

Mi ćemo se u daljem izlaganju zadržati na tretiranju problema sudara triju tela u jednoj dovoljno maloj okolini momenta $t = t_o$ napr. za dovoljno mali interval vremena koji neposredno sleduje momentu sudara t_o, odnosno momentu rasprskavanja prvobitnog tela u tri posmatrana tela. U tom slučaju će projekcije ξ_i i η_i vektora $\mathfrak{r}_i$ biti vrlo male veličine, čije više stepene počevši od drugog, kao i medjusobne proizvode, možemo zanemariti. Ako se još primeti da skalarna funkcija V, kao i njeni parcijalni izvodi $\frac{\partial V}{\partial \xi_i}$ i $\frac{\partial V}{\partial \eta_i}$ pretstavljaju neprekidne i diferencijabilne funkcije u odnosu na argumente ξ_i i η_i, tada funkcije $\frac{\delta V}{\delta b_i}$ i $\frac{\delta V}{\delta \eta_i}$ možemo u okolini tačaka $(\xi_i=0,\ \eta_i=0)$, ili što je isto u blizini položaja $(a_i,\ b_i)$ koji odgovaraju egzaktnim rešenjima, aproksimirati Taylorovim polinomima I stepena oblika

$$
(93)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \xi_i} &\approx \frac{\partial V}{\partial a_i} + \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\, \partial a_\nu}\cdot \xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\, \partial b_\nu}\cdot \eta_\nu,\\
\frac{\partial V}{\partial \eta_i} &\approx \frac{\partial V}{\partial b_i} + \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial a_\nu}\cdot \xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial b_\nu}\cdot \eta_\nu, \qquad (i=1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}
$$

Ovde je, prema Blok-u, kratkoće radi stavljeno:

$$
(94)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial a_i} = \left\{\frac{\partial V}{\partial \xi_i}\right\}_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}}, &&\frac{\partial V}{\partial b_i} = \left\{\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right\}_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}};\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial a_i\, \partial a_\nu} = \left\{\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_i\, \partial \xi_\nu}\right\}_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}}, &&\frac{\partial^2 V}{\partial a_i\, \partial b_\nu} = \left\{\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_i\, \partial \eta_\nu}\right\}_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}};\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial a_\nu} = \left\{\frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i\, \partial \xi_\nu}\right\}_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}}, &&\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial b_\nu} = \left\{\frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i\, \partial \eta_\nu}\right\}_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}};
\end{aligned}
$$

$$(i,\ \nu=1,\ 2,\ 3).$$

Kako se razvijanje izvoda $\frac{\partial V}{\partial \xi_i}$ i $\frac{\partial V}{\partial \eta_i}$ odnosi na tačke $(\xi_i=0,\ \eta_i=0)$ tj. na položaje materijalnih tačaka koji odgovaraju egzaktnim rešenjima problema triju tela, to će za ove položaje biti:

$$
(95)\qquad \left\{\operatorname{grad}_{\mathfrak{r}_i} V\right\}_{\mathfrak{r}=0} = -2\kappa^2 m_i \mathfrak{A}_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3).
$$

Odavde proizilazi neposredno:

$$
(96)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \xi_i} &\approx -2\,\kappa^2 m_i a_i + \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\, \partial a_\nu}\cdot \xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\, \partial b_\nu}\cdot \eta_\nu,\\
\frac{\partial V}{\partial \eta_i} &\approx -2\,\kappa^2 m_i b_i + \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial a_\nu}\cdot \xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial b_\nu}\cdot \eta_\nu, \qquad (i=1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}
$$

Ako ove aproksimativne vrednosti projekcija vektora $\mathrm{grad}_{\mathfrak{r}_i} V$ zamenimo u desne strane skalarnih diferencijalnih jednačina (92) tada ćemo, pošto se na levim i desnim stranama potiru sabirci $-2\kappa^2 m_i a_i$, odnosno $-2\kappa^2 m_i b_i$, dobiti definitivni oblik skalarnih diferencijalnih jednačina za varijaciju konstanata egzaktnih rešenja u problemu sudara triju tela:

$$
(97) \qquad
\begin{aligned}
\kappa^2 m_i \left\{ \tau^2 \frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\xi_i}{d\tau} - 2\xi_i \right\} &= \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\ \partial a_\nu} \cdot \xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\ \partial b_\nu} \cdot \eta_\nu , \\
\kappa^2 m_i \left\{ \tau^2 \frac{d^2\eta_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\eta_i}{d\tau} - 2\eta_i \right\} &= \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i\ \partial a_\nu} \cdot \xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{\nu=3} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i\ \partial b_\nu} \cdot \eta_\nu , \\
&(i = 1, 2, 3).
\end{aligned}
$$

8. PRESEK INSTANTANIH RELATIVNIH PRAVACA KRETANJA

Milankovićev problem rasprskavanja ima dve karakteristične osobine:

1.— integraciona konstanta u integralu momenta kvantiteta kretanja jednaka je nuli;

2.— instantani relativni pravci kretanja (tangente na putanje triju materijalnih tačaka) seku se u jednoj tački ravni kretanja ovih tačaka.

Ova druga osobina je posledica prve i pokazuje se postupkom koji je dao Milanković, a koji je već naveden u 3.

Prva osobina je karakteristična i za problem sudara triju tela, kako je to pokazao Sundman [5]. Medjutim sasvim analognim postupkom Milankovićevom, proizilazi da se i *u problemu sudara triju tela instantani relativni pravci kretanja moraju seći u jednoj tački.*

Prema tome, ova osobina pretstavlja još jednu zajedničku karakteristiku suženog problema rasprskavanja i problema sudara triju tela.

Ovde je potrebno učiniti još sledeće napomene. Pošto su u problemu sudara triju tela vektori položaja masa m_i s obzirom na njihovo težište oblika:

$$
(98) \qquad \mathfrak{R}_i = (\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i)\,\tau^2 \qquad (i = 1, 2, 3)
$$

dakle kad $t \to t_0$:

$$
(99) \qquad \tau \to 0, \qquad \mathfrak{r}_i \to 0, \qquad \mathfrak{R}_i \to 0 \qquad (i = 1, 2, 3),
$$

to će putanje triju tela imati svoje završne tačke u zajedničkom težištu sistema.

Ako zamislimo da mase m_i obrazuju konfiguraciju ravnostranog trougla, tada će se instantani relativni pravci kretanja morati preseći u zajedničkom težištu tako, da se ova konfiguracija može smatrati kao partikularno rešenje problema, u kome tangente na trajektorije prolaze kroz završnu tačku trajektorija. U slučaju pravoliniske konfiguracije masa kretanje će, kao što je pokazao Blok [3], ostati pravolinisko sa zajedničkom trajektorijom za sva tri tela. Tačka preseka instantanih relativnih pravaca kretanja u ovom slučaju je neodredjena.

Ovo što je napred konstatovano za problem sudara triju tela, očigledno važi uopšte za suženi problem rasprskavanja, u kome se opšte rešenje može dobiti varijacijom konfiguracija egzaktnih rešenja problema triju tela.

9. JEDNA OSOBINA VEKTORA $\mathfrak{r}_i$ KOJIMA SE VARIRAJU KONFIGURACIJE EGZAKTNIH REŠENJA

U definiciji suženog problema rasprskavanja naveli smo, pored ostalih, i sledeću njegovu karakteristiku. Vektori položaja triju materijalnih tačaka s obzirom na težište sisema mogu biti pretstavljeni u obliku

$$\mathfrak{R}_i = (\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i)\,\delta \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{100}$$

gde:

1. $\delta \to 0$, $\mathfrak{r}_i \to 0$ i $\mathfrak{R}_i \to 0$ sa $t \to t_o$ $\quad (i = 1, 2, 3)$;

2. projekcije vektora $\dfrac{d}{dt}(\mathfrak{r}_i\,\delta)$ na ose odabranog koordinatnog sistema, kad $t \to t_o$, pretstavljaju infinitezimale višeg reda u poredjenju sa $\dfrac{d\delta}{dt}$ tj.

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{r}_i\,\delta) : \frac{d\delta}{dt} \to 0, \quad t \to t_o \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{101}$$

tako da se za sve vrednosti t dovoljno bliske momentu rasprskavanja može uzeti aproksimativno da je

$$\frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} \approx \mathfrak{A}_i \frac{d\delta}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{102}$$

Poslednja aproksimacija znači, da se kod tretiranja problema za momenat koji neposredno sleduje momentu rasprskavanja t_o odnosno, kod problema sudara koji sleduje (prethodi) ovom momentu, da se projekcije vektora $\dfrac{d}{dt}(\mathfrak{r}_i\,\delta)$ u zbirovima mogu zanemariti prema sabircima koji sadrže $\dfrac{d\delta}{dt}$ kao faktor.

Ako se podje od integrala momenata kvantiteta kretanja:

$$\sum_{i=1}^{i=3} m_i \left[\mathfrak{R}_i\, \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt}\right] = 0, \tag{103}$$

tada on prema (100) i (103) daje

$$\sum_{i=1}^{i=3} m_i \left[(\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i)\,\delta,\ \mathfrak{R}_i \frac{d\delta}{dt}\right] = 0,$$

odakle, pošto je $\delta \frac{d\delta}{dt} \neq 0$,

pıoizilazi:

(104) $$\sum_{i=1}^{i=3} m_i\ [\mathfrak{A}_i\,\mathfrak{r}_i] = 0,$$

a odavde je:

(105) $$\sum_{i=1}^{i=3} m_i\,(a_i\,\eta_i - b_i\,\xi_i) = 0\,.$$

To znači da su *projekcije vektora* $\mathfrak{r}_i$ *na ose odabranog koordinatnog sistema vezane jednom linearnom relacijom.*

Pošto je $\sum_{i=1}^{i=3} m_i\,\mathfrak{R}_i = 0$, to je prema (100) $\delta \cdot \sum_{i=1}^{i=3} m_i\,(\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i) = 0$, ili

(106) $$\sum_{i=1}^{i=3} m_i\,\mathfrak{A}_i + \sum_{i=1}^{i=3} m_i\,\mathfrak{r}_i = 0,$$

ili kako je prema jednačinama (60)

(107) $$\sum_{i=1}^{i=3} m_i\,\mathfrak{A}_i = 0,$$

to je:

(108) $$\sum_{i=1}^{i=3} m_i\,\mathfrak{r}_i = 0.$$

Ako se pomoću skalarnih jednačina $\sum_{i=1}^{i=3} m_i\,\xi_i = 0$ i $\sum_{i=1}^{i=3} m_i\,\eta_i = 0$,

eliminišu projekcije ξ_3 i η_3 iz jednačine (105), dobiće se:

(109) $$m_1\,(a_1 - a_3)\,\eta_1 + m_3\,(b_3 - b_1)\,\xi_1 + m_2\,(a_2 - a_3)\,\eta_2 + m_2\,(b_3 - b_2)\,\xi_2 = 0.$$

U slučaju *konstelacije ravnostranog trougla* imali smo prema jednačinama (66)

$$\text{(110)} \qquad \begin{aligned} a_1 - a_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b_3 - b_1 = -\frac{1}{2}, \\ a_2 - a_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b_3 - b_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zamenom (110) u (109) dobijamo:

$$\text{(111)} \qquad m_1 \sqrt{3} \cdot \eta_1 - m_1 \xi_1 + m_2 \sqrt{3} \cdot \eta_2 + m_2 \xi_2 = 0.$$

Za slučaj *pravoliniske konfiguracije* triju tela imali smo, prema jednačinama (79)

$$\text{(112)} \qquad \begin{aligned} a_1 - a_3 &= 1 + z, \quad b_3 - b_1 = 0, \\ a_2 - a_3 &= 1, \quad b_3 - b_2 = 0, \end{aligned}$$

te jednačina (109) daje

$$\text{(113)} \qquad m_1 (1 + z) \cdot \eta_1 + m_2 \eta_2 = 0.$$

Linearna relacija (111) izmedju projekcija vektora $\mathfrak{r}_1$ i $\mathfrak{r}_2$ zajednička je za sve funkcije $\varphi(x) = x^\alpha$; pošto konfiguracija ravnostranog trougla ostaje ista za sve te funkcije. Medjutim u relaciji (113) menja se koeficijent uz η_1 pošto je $z = z(\alpha)$, kao što je napred podvučeno.

Znači dakle da i za problem sudara triju tela relacije (111) i (113) ostaju u važnosti s tim, što za z u (113) treba zameniti realni pozitivni koren Lagrange-ove jednačine

$$\text{(114)} \qquad \begin{aligned} &(m_2 + m_3) z^5 + (2m_2 + 3m_3) z^4 + (m_2 + 3m_3) z^3 - (3m_1 + m_2) z^2 - \\ &- (3m_1 + 2m_2) z - (m_1 + m_2) = 0. \end{aligned}$$

Iz napred izloženog proizilazi, da je autor izvršio ovim i jedno uopštenje svojih zaključaka u vezi sa osobinom vektora položaja $\mathfrak{r}_i$ u problemu sudara triju tela, pokazavši da linearne relacije (111) odnosno (113) izmedju projekcija vektora $\mathfrak{r}_i$ pretstavljaju jednu karakterističnu crtu i u problemu rasprskavanja, a pod pretpostavkama uvedenim za ovaj problem.

Za suženi problem rasprskavanja može se, na osnovi prethodnog rezultata, pokazati i jedna osobina sila $\mathfrak{P}_i$ koje dejstvuju na materijalne tačke m_i. Ako se, naime, vektorski identiteti $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_i$ vektorski pomnože odgovarajućim jednačinama (86)

$$\text{(115)} \qquad \kappa^2 m_i \tau^{2\alpha} \cdot \left\{ \tau^2 \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{d\tau^2} + (4 + \alpha) \tau \frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau} + 2(1 + \alpha)(\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i) \right\} = \mathfrak{P}_i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

i izvrši sabiranje dobijenih jednačina, dobiće se:

$$\kappa^2\tau^{2\alpha}\cdot\left\{\tau^2\sum_{i=1}^{3} m_i\left[\mathfrak{A}_i\frac{d^2\mathfrak{r}_i}{d\tau^2}\right]+(4+\alpha)\,\tau\sum_{i=1}^{3} m_i\left[\mathfrak{A}_i\frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau}\right]\right. \tag{116}$$
$$\left.+2\,(1+\alpha)\sum_{i=1}^{3} m_i\,[\mathfrak{A}_i\,\mathfrak{r}_i]\right\}=\sum_{i=1}^{3}[\mathfrak{A}_i\,\mathfrak{P}_i]\,.$$

Iz jednačine (104) proizilazi:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i\left[\mathfrak{A}_i\frac{d\mathfrak{r}_i}{d\tau}\right]=0,\quad \sum_{i=1}^{3} m_i\left[\mathfrak{A}_i\frac{d^2\mathfrak{r}_i}{d\tau^2}\right]=0\,. \tag{117}$$

Na osnovi (104) i (117) jednačina (116) daje ovaj rezultat:

$$\sum_{i=1}^{3}[\mathfrak{A}_i\,\mathfrak{P}_i]=0\,. \tag{118}$$

Za problem sudara triju tela je, prema jednačini (90)

$$\mathfrak{P}_i=\operatorname{grad}_{\mathfrak{r}_i} V \qquad (i=1,\,2,\,3),$$

pa relacija (118) daje:

$$\sum_{i=1}^{3}[\mathfrak{A}_i\ \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}_i} V]=0\,. \tag{119}$$

Iz relacije (118) proizilazi da su *projekcije vektora* $\mathit{grad}_{\mathfrak{r}_i} V$ *na ose odabranog koordinatnog sistema vezane takodje jednom linearnom relacijom.*

Autor je u svome radu [6] pokazao primenu napred izvedene osobine vektora položaja $\mathfrak{r}_i$ kojima se variraju integracione konstante $\mathfrak{A}_i$, a kojima se definišu partikularna rešenja problema (Lagrange-ova egzaktna rešenja) na redukciju Blok-ovih diferencijalnih jednačina za odredjivanje vektora $\mathfrak{r}_i$. Na ovaj način redukovani sistem diferencijalnih jednačina ima oblik:

1° *Za slučaj konfiguracije ravnostranog trougla:*

$$\kappa^2 D(\xi_1)=\left(2m_1-m_2+\frac{5}{4}m_3\right)\cdot\xi_1+\frac{3}{2}\,m_2\cdot\xi_2+\frac{3\sqrt{3}}{4}\,m_3\cdot\eta_1\,,$$
$$\kappa^2 D(\xi_2)=\frac{3m_1\ (2m_2-m_3)}{4m_2}\cdot\xi_1+[2\,(m_2+m_3)-m_1]\cdot\xi_2+\frac{3\sqrt{3}}{4}\,\frac{m_1 m_3}{m_2}\cdot\eta_1\,, \tag{120}$$
$$\kappa^2 D(\eta_1)=\frac{3\sqrt{3}}{4}\,m_3\ \xi_1+\frac{3\sqrt{3}}{4}\,m_2\ \xi_2+\left[\,2\,(m_1+m_2)-\frac{1}{4}\,m_3\right]\cdot\eta_1\,;$$

2° *Za slučaj pravoliniske konfiguracije:*

$$\kappa^2 D(\xi_1) = 2\left\{\frac{m_1}{(1+z)^3} - \frac{m_2}{z^3} - \frac{m_3}{(1+z)^3}\right\}\cdot \xi_1 + \left\{\frac{m_2}{(1+z)^3} - \frac{m_2}{z^3}\right\}\cdot \xi_2$$

$$\kappa^2 D(\xi_2) = 2\left(m_1 - \frac{m_1}{z^3}\right)\cdot \xi_1 + 2\left(\frac{m_1}{z^3} + m_2 + m_3\right)\xi_2, \tag{121}$$

$$\kappa^2 D(\;_1) = \left\{\frac{m_1}{(1+z)^2} - m_1\frac{1+z}{z^3} - \frac{m_1}{(1+z)^3} - \frac{m_2}{z^3} - \frac{m_3}{(1+z)^3}\right\}\cdot \eta_1,$$

gde je $D(u) = \tau^2\dfrac{d^2u}{d\tau^2} + 2\tau\dfrac{du}{d\tau} - 2u.$

Polazeći od sistema diferencijalnih jednačina (120), odnosno (121), autor je u [6], pored ostalog, dao rešenje problema sudara triju tela u prvoj aproksimaciji i s ovim u vezi izvršio i izvesnu modifikaciju Blok-ovih rezultata u tome problemu.

LITERATURA

[1] M. MILANKOVIĆ:
Osobina kretanja u jednom specijaliziranom problemu triju tela (Glas SAN, LXXIX, prvi razred, 32, Beograd, 1909).

[2] M. MILANKOVIĆ:
O opštim integralima problema n tela (Glas SAN, LXXXIII, prvi razred, 34, Beograd, 1911).

[3] H. G. BLOK:
Sur les chocs dans le problème des trois corps (Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd 5, № 9, 1908).

[4] H. G. BLOK:
Sur une classe de singulatités dans le problème de n corps (Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium; Serie II, № 6, Lund, 1909).

[5] K. F. SUNDMAN:
Recherches sur le problème des trois corps (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. XXXIV, № 6, 1907).

[6] D. MIHAILOVIĆ:
O kvantitativnim rešenjima sistema diferencijalnih jednačina u jednom specijalnom problemu triju tela (doktorska disertacija — u rukopisu, Beograd, 1956).

RÉSUMÉ

GÉNÉRALISATION DE CERTAINS RÉSULTATS DANS LE PROBLÈME DU CHOC DE TROIS CORPS

Dobrivoje Mihailović

L'objet de la présente étude est la généralisation de certains résultats auxquels aboutit *H. G. Blok* dans ses travaux [3] et [4] sur l'analyse quantitative du problème du choc de trois corps. L'auteur arrive à cette généralisation par la confrontation du problème du choc de trois corps et d'un cas spécial du problème de trois corps, défini en [1] par *Milanković*.

Milanković traite le problème du mouvement de trois corps provenant de l'éclatement d'un corps unique qui se mouvait d'un mouvement uniforme sous l'effet des forces internes. Alors 1) le mouvement s'effectue dans un plan; 2) la constante d'intégration dans l'intégrale du moment de la quantité du mouvement est égale au zéro; 3) les forces qui agissent sur les trois corps sont des fonctions arbitraires, mais holomorphes de la position, de la vitesse et du temps. De [2] Milanković déduit que les directions des mouvements relatifs instantanés (les tangentes aux trajetoires de trois masses) se coupent dans un point du plan de leur mouvement.

L'auteur établit le rapport entre le problème du choc de trois corps et le problème de Milanković (le problème de l'éclatement) se basant sur le fait que le premier est déduit du second, si l'on spécifie, dans ce dernier, la nature des forces (c. à. d. si l'on y introduit les forces de Newton).

Dans le présent article l'auteur part du problème de l'éclatement, en y introduisant, en même temps, les hypothèses suivantes:

1) que les influences réciproques changent en conformité avec la loi $\varphi(x)=x^{\alpha}$, $(\alpha<-1)$;

2) si l'on représente les vecteurs de la position des masses m_i par rapport au centre de gravité du système sous la forme $\mathfrak{R}_i=(\mathfrak{A}_i+\mathfrak{r}_i)\,\delta$, $(i=1, 2, 3)$, que, lorsque $t=t_o$ (t_o — le moment de l'éclatement):

a) $\delta\to 0,\ \mathfrak{r}_i\to 0,\ \mathfrak{R}_i\to 0$;

b) $\dfrac{d}{dt}(\mathfrak{r}_i\,\delta):\dfrac{d\delta}{dt}\to 0,\ t\to t_o$

de sorte que $\dfrac{d\mathfrak{R}_i}{dt}\approx\mathfrak{A}_i\dfrac{d\delta}{dt}$, $(i=1, 2, 3)$ est aux environs suffisamment réduits du point $t=t_o$.

De ce problème de l'éclatement que l'on appelle restreint, on déduit le cas de Blok du problème du choc, comme un cas spécial pour $\alpha=-2$.

En introduisant dans ses investigations le problème restreint de l'éclatement, défini de cette façon-là, l'auteur a, dans le présent article, élargi et approfondi les résultats de Blok ainsi que certains de ses propres résultats en rapport avec l'analyse quantitative du problème du choc de trois corps.

En représentant les vecteurs de la position du centre de gravité de trois corps sous la forme $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_i u$, $(i = 1, 2, 3)$ où $\mathfrak{R}_i$ sont des vecteurs constants, l'auteur démontre que l'on obtient la grandeur de (36) dans la forme d'une série potentielle convergente dont la puissance la plus petite est

$$\tau^2 = [(1-\alpha)\kappa]^{\frac{2}{1-\alpha}} \cdot (t-t_o)^{\frac{2}{1-\alpha}}, \quad (\kappa = \text{const.}).$$

Pour $\alpha = -2$ on obtient le résultat connu de Sundman [5]:

$$\tau^2 = (3\kappa)^{2/3} \cdot (t-t_o)^{2/3}.$$

L'auteur déduit les équations différentielles du problème en introduisant, au lieu du temps t — une nouvelle variable indépendante:

$$\tau = [(1-\alpha)\kappa]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot (t-t_o)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

et arrive aux équations différentielles du problème dans la forme (45). Celles-ci se réduisent, pour $\alpha = -2$, au système d'équations de Blok pour le problème du choc de trois corps.

Pour ce système d'équations différentielles existent les intégrales particulières dans la forme: $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{A}_i \tau^2$, $(i = 1, 2, 3)$, où $\mathfrak{A}_i$ sont des vecteurs constants. Pour les positions des masses, lesquelles sont déterminées par rapport au centre de gravité du système au moyen des vecteurs de la position $\mathfrak{A}_i$ l'auteur trouve pour les valeurs des forces résultantes

$$\mathfrak{P}_i = 2\kappa^2 (1+\alpha)\, m_i \mathfrak{A}_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

L'auteur a appliqué ici le théorème de Milanković sur le pôle de gravitation (le centre d'attraction) lequel donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des solutions exactes du problème de trois corps. En vertu de la dernière relation, en appliquant le théorème mentionné ci-dessus, l'auteur conclut directement que les configurations déterminées par les vecteurs $\mathfrak{A}_i$ c. à d. les solutions particulières du problème restreint de l'éclatement sont identiques aux solutions exactes de Lagrange du problème de trois corps. En déterminant ces configurations, l'auteur a démontré que, pour la disposition non-collinéaire des masses, la configuration du triangle équilatéral est indépendante de l'exposant α, tandis que celle-ci change en dépendance de α lorsque la disposition est rectiligne. Les relations (66) et (76) avec (79) déterminent ces deux configurations.

Partant des équations différentielles vectorielles pour le problème restreint dans la forme (81) l'auteur a, au moyen de la transformation $\mathfrak{R}_i = (\mathfrak{A}_i + \mathfrak{r}_i)\, \tau^2$, $(i = 1, 2, 3)$, déduit les équations vectorielles pour la variation des constantes $\mathfrak{A}_i$ dans la forme (86). De celles-ci, dans le cas spécial où $\alpha = -2$, l'on déduit le système correspondant de Blok dans la forme (87), respectivement dans la forme (97), qui donne la solution du problème du choc aux environs du moment $t = t_o$.

L'auteur a démontré, ensuite, que, même dans le problème restreint de l'éclatement, les directions relatives instantanées des mouvements se coupent dans un point, pouisque dans ce problème-ci ainsi que dans celui de Milanković, la constante d'intégration dans l'intégrale du moment de la quantité du mouvement est égale au zéro.

De là, l'auteur a déduit les conclusions suivantes: 1) les trajetoires des centres de gravitation de trois corps doivent avoir leurs points terminaux dans le centre de gravité du système; 2) la configuration du triangle équilatéral représente cette solution particulière du problème où les tangentes aux trajetoires passent par le point terminal de ces trajetoires. Pour la configuration rectiligne des masses, le point d'intersection des directions relatives instantanées du mouvement est indéterminé.

De la définition du problème restreint et en vertu de (103), l'auteur a déduit la relation (104) qui représente la relation linéaire entre les vecteurs r_i, au moyen desquels on varie les constantes d'intégration $\mathfrak{A}_i$ des solutions exactes. Dans le cas de la configuration du triangle équilatéral les projections des vecteurs r_i sont liées par la relation (111) et dans le cas de la configuration rectiligne — par la relation (113). La première ralation est commune à toutes les fonctions $\varphi(x) = x^{\alpha}$, $(\alpha < -1)$, tandis que la seconde change en dépendance de l'exposant α.

Du résultat précédent l'auteur a démontré que, dans le problème de l'éclatement, pour le moment proche au moment les projections des forces qui agissent sur trois points matériels, sont aussi liées par une relation linéaire (118). Dans le cas spécial, pour le problème du choc de trois corps, elle se réduit à la relation (119) entre les projections des gradients partiels de la fonction scalaire V selon les vecteurs r_i.

Finalement, dans le présent article l'auteur a souligné l'importance de derniers résultats à l'égard de la possibilité de déduire les systèmes d'équations différentielles (97) pour la variation des constantes des solutions exactes, ainsi qu'à l'égard d'une certaine modification des résultats de Blok dans l'analyse quantitative du problème du choc.

À la fin de son article l'auteur a cité le système réduit d'équations différentielles (120) et (121) pour la variation des constantes des solutions exactes, dont la solution dans la première approximation il avait donné dans sont étude [6].