

EIN DIFFERENTIALSYSTEM IN DER MODELIERUNG DER SONNENKOLLEKTOREN

Adrian Constantin

We give a mathematical model for the construction of collectors of solar energy by means of a system of differential equations and we consider the problem of the existence and uniqueness of solutions for the proposed system.

1. Die Kollektoren der Sonnenenergie sind Systeme von zwei Flächen: eine (die größer ist – der Spiegel) zur Annahme und Ansammlung der Sonnenstrahlen und eine kleinere Absorptionsfläche die reflektierte Strahlen annimmt und zur Transformation in Energie hilft. Wir nehmen an daß die zweite Fläche im Inneren der ersten ist. Beispiele dieser Art von Sonnenkollektoren findet man auf den Dächern der Häuser (parabolische Spiegel die im Innern eine Absorptionsfläche zylindrischer Form haben).

Wir werden ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen ableiten daß das beschriebene Verfahren modelliert und einige teoretische und praktische Bemerkungen bezüglich dieser Gleichungen machen. Das Modell ist einfach und in der Ableitung werden nur Grundsätze der Optik angenommen.

Die XOY -Ebene in Figur 1 ist ein normaler Schnitt durch die Hauptachse des Sonnenkollektors. Die Gleichungen die den Durchschnitt der zwei Flächen mit der XOY -Ebene geben sind $y = y(x)$ und $Y = Y(X)$ beziehungsweise, mit $y(0) = 0$. Die Eigenschaft auf der die Rolle der Absorptionsfläche beruht ist die Bedingung daß die von der Spiegelfläche reflektierte Strahlen normal auf die Absorptionsfläche einfallen.

Wir arbeiten unter der Voraussetzung daß $y'(x) = \operatorname{tg}(\alpha) \in (0, 1)$ – die Krümmung des Spiegels ist nicht sehr groß.

Durch einfache Betrachtung der Figur 1 erhalten wir im Dreieck MER ($\alpha \in$

⁰1991 Mathematics Subject Classification: 34A10

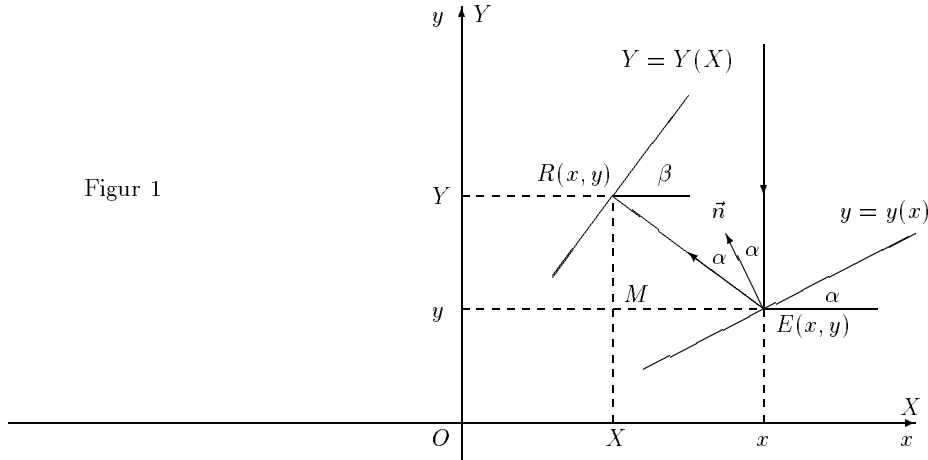
$(0, \pi/4)$) für ein Sonnenstrahl der auf OX normal einfällt

$$\operatorname{tg}(\angle REM) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{Y(X) - y(x)}{x - X}$$

und die Beziehungen $\operatorname{tg}(\alpha) = y'(x)$, $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)}$ ermöglichen uns zu schreiben

$$(1) \quad Y(X) - y(x) = \frac{(y'(x))^2 - 1}{2y'(x)} (X - x).$$

Figur 1



Eine zweite Gleichung erhalten wir folgenderweise: $\operatorname{tg}(\beta) = Y'(X)$ und $\beta = 2\alpha$ (da die Gerade RE eine Normale zu $Y = Y(X)$ ist) so daß β gleich dem Winkel MRE ist und $\operatorname{tg}(\beta) = \operatorname{tg}(\angle MRE)$. Falls wir diese letzte Beziehung erweitern, erhält man

$$(2) \quad Y'(X) = \frac{x - X}{Y(X) - y(x)} = \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2y'(x)}{1 - (y'(x))^2}.$$

Die Voraussetzung $y'(x) > 0$ ermöglicht uns aus der Beziehung (1),

$$(3) \quad y'(x) = \frac{Y(X) - y(x)}{X - x} + \sqrt{1 + \left(\frac{Y(X) - y(x)}{X - x}\right)^2}$$

zu erhalten.

In dem Differentialsystem (2)–(3) sind X und x nicht unabhängig (hier liegt der Unterschied mit der Arbeit [2]): nämlich ist X die Abszisse des ersten Durchschnit­tes der Geraden ER (die durch $E(x, y(x))$ geht und ein Winkel $\frac{\pi}{2} + 2\alpha$:

$\operatorname{tg}(\alpha) = y'(x)$ mit $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, mit OX bildet) mit der Kurve $Y = Y(X)$. Wir nehmen an daß diese Beziehung zwischen X und x unter der Form $X = f(x)$ wo $f \in C^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ mit $f(0) = 0$ und $0 < f(x) < x$ für $x > 0$ ist (diese letzte Voraussetzung ist angenommen da der Spiegel die Strahlen ansammeln muß: $0 < X(x) < x$ für $x > 0$) geschrieben werden kann; weiter setzten wir eine Symmetrie beziehungsweise der Achse OY voraus.

Bezeichnet man $z(x) = Y(X) = Y(f(x))$, so wird das System (2)–(3) in

$$(4) \quad \begin{cases} y'(x) = \frac{z(x) - y(x)}{f(x) - x} + \sqrt{1 + \left(\frac{z(x) - y(x)}{f(x) - x}\right)^2}, \\ z'(x) = \frac{x - f(x)}{z(x) - y(x)} f'(x) \end{cases}$$

umgewandelt.

Wir betrachten nur Sonnenstrahlen die senkrecht auf die Ebene der Base des Sonnenkollektors fallen und da die Absorptionsfläche im Innern des Spiegels ist, gibt es keine solche Strahlen in der Nähe des Punktes $(0, 0)$. Deshalb gibt es ein $\delta > 0$ so daß das System (2)–(3) für $|x| \geq \delta$ betrachtet wird. Da die Situation für $x < 0$ ähnlich ist, betrachten wir nur den Fall $x \geq \delta$.

Sind zwei Punkte Y_0, y_0 gegeben, mit $Y_0 > y_0 > 0$, wollen wir zeigen daß für bestimmte Funktionen f man beliebig große Kurven $Y = Y(X)$ und $y = y(x)$ bauen kann so daß die Gleichungen (2)–(3) erfüllt sind, $y(\delta) = y_0, Y(f(\delta)) = Y_0$, und die Kurve $Y = Y(X)$ im Innern der Fläche $y = y(x)$ ist (daß heißt $Y(f(x)) > y(x)$ für $x \geq \delta$, erinnert man sich daß $(X, Y(X))$ den ersten Durchschnitt der Geraden ER mit $Y = Y(X)$ ist). Mathematisch formuliert: für die Initialdaten $y(\delta) = y_0, z(\delta) = Y_0$ mit $Y_0 > y_0 > 0$ hat das System (4) eine Lösung $(y(x), z(x))$ die für $x \geq \delta$ definiert ist und $z(x) > y(x) > 0$ für $x \geq \delta$ erfüllt.

Im zweiten Teil wird der allgemeine Fall betrachtet und ein Existenzsatz für (4) bewiesen, während im Teil 3 wir Beispiele geben wo diese Abhängigkeit zwischen X und x in verschiedene Formen auftritt.

2. Wir beweisen nun den folgenden

Satz. *Unter der Voraussetzung $f'(x) \in [\frac{1}{2}, 1)$ für $x \in \mathbf{R}_+$, gibt es für jede Initialdaten (y_0, Y_0) mit $Y_0 > y_0 > 0$ eine Lösung des Systems (4) die alle beschriebene Bedingungen erfüllt.*

Vor dem Beweis machen wir die folgende Bemerkung bezüglich der Voraussetzung $f'(x) \in [\frac{1}{2}, 1)$, $x \in \mathbf{R}_+$: die Bedingung $f'(x) < 1$, $x \in \mathbf{R}_+$, hilft um $0 \leq X = f(x) < x$ für $x > 0$ zu erhalten (Mittelwertsatz) und die Bedingung $f'(x) \geq 1/2$ um das Verhältniss X/x nicht zu klein zu machen (es ist erklärbar daß zu einem größeren Spiegel – daß heißt $x \geq \delta$ groß – eine größere Absorptionsfläche gehört so daß $X \geq f(\delta)$ nicht sehr klein sein muß: man kann dies in der beschriebenen Weise erhalten).

Beweis. Seien $Y_0 > y_0 > 0$ beliebige Initialdaten.

Wir betrachten das System

$$(5) \quad \begin{cases} y'(x) = F(x, y, z), \\ z'(x) = G(x, y, z) \end{cases}$$

wo $F, G : [\delta, +\infty) \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ folgenderweise definiert sind ($\varepsilon = Y_0 - y_0 > 0$) :

$$F(x, y, z) = \frac{z - y}{f(x) - x} + \sqrt{1 + \left(\frac{z - y}{f(x) - x} \right)^2},$$

$$G(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x - f(x)}{z - y} f'(x) & \text{für } z - y \geq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 2 \frac{x - f(x)}{\varepsilon} f'(x) & \text{für } z - y < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Da $F, G \in C([\delta, +\infty) \times \mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, gibt uns der SATZ VON PEANO [1] eine lokale Lösung $(y(x), z(x))$ des Systems (5) mit den Initialdaten $y(\delta) = y_0$ und $z(\delta) = Y_0$. Wir zeigen daß das maximale Definitionsgebiet dieser Lösung $[\delta, +\infty)$ ist und daß sie auch die Gleichungen des Systems (4) für $x \geq \delta$ erfüllt. Wir werden weiter sehen daß $z(x) > y(x) > 0$ für $x \geq \delta$ gilt und somit ist der Beweis beendet.

Falls das maximale Definitionsgebiet der Lösung nicht $[\delta, +\infty)$ ist, gibt es [3] ein $T > \delta$ so daß die Lösung für $x \in [\delta, T)$ definiert ist und

$$(6) \quad y^2(x) + z^2(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow T$$

gilt. Wir zeigen daß (6) nicht möglich ist.

Bemerken wir daß $z(\delta) - y(\delta) > \varepsilon/2$, so gilt es für $x > \delta$ nahe zu δ : $z(x) - y(x) > \varepsilon/2$. Für $z(x) - y(x) > \varepsilon/2$ haben wir

$$z'(x) - y'(x) = \frac{x - f(x)}{z(x) - y(x)} f'(x) + \frac{z(x) - y(x)}{x - f(x)} - \sqrt{1 + \left(\frac{z(x) - y(x)}{x - f(x)} \right)^2} > 0$$

(da $f'(x) \geq 1/2$ für $x \geq 0$) so daß $z(x) - y(x) > \varepsilon/2$ für $x \in [\delta, T)$. Da $z(\delta) = Y_0 > 0$ und $G(x, y, z) \geq 0$ haben wir $z(x) > 0$ für $x \in [\delta, T)$ so daß (erinnert man sich daß $z(x) - y(x) > 0$ für $x \in [\delta, T)$) (6) nur falls $z(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow T$ möglich ist. Aus (5) haben wir

$$(7) \quad z'(x)z(x) - y(x)z'(x) = (x - f(x))f'(x), \quad x \in [\delta, T).$$

Es ist leicht zu sehen daß $F(x, y, z) \geq 0$ und da $y(\delta) = y_0 > 0$, haben wir daß $y(x) > 0$ für $x \in [\delta, T)$. Wir erhalten aus (7) daß

$$0 \leq z'(x)z(x) \leq (x - f(x))f'(x), \quad x \in [\delta, T),$$

(da $z'(x) = G(x, y, z) \geq 0$ für $x \in [\delta, T)$) und so, durch Integration,

$$\frac{1}{2} (z^2(x) - Y_0^2) \leq \max_{\delta \leq x \leq T} \{|x - f(x)|\} (T - \delta), \quad x \in [\delta, T).$$

Diese Beziehung zeigt daß $z(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow T$ nicht möglich ist, so daß (6) nicht möglich ist und damit haben wir gezeigt daß die Lösung $(y(x), z(x))$ des Systems (5) mit Initialdaten (y_0, Y_0) für alle $x \geq \delta$ definiert ist.

Eine Wiederholung vorgehender Bemerkungen ermöglicht uns zu zeigen daß $z'(x) - y'(x) > 0$ für $x \geq \delta$ gilt, so daß

$$z(x) - y(x) > \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } x \geq \delta$$

und so, bemerkt man die Veränderung die wir im System (4) vorgeführt haben, ist $(y(x), z(x))$ auch eine Lösung des Systems (4) mit den Initialdaten (y_0, Y_0) , die für $x \geq \delta$ definiert ist. Da $z(x) > y(x) > 0$ für $x \geq \delta$ gilt, ist der Beweis beendet (aus den Beziehungen $f(x) < x$ und $y(x) < z(x)$ für $x \geq \delta$ sieht man leicht, auf Grunde der ersten Gleichung in (4), daß $y'(x) \in (0, 1)$ für $x \geq \delta$).

Es ist interessant zu bemerken daß die Lösung dessen Existenz unser Satz beweist unter den Voraussetzungen des Satzes auch die einzige Lösung ist. Um dies zu sehen, sei $(y_1(x), z_1(x))$ eine zweite Lösung des Systems (4) mit den Initialdaten (y_0, Y_0) . Wie im Beweis des Satzes zeigt man daß

$$z_1'(x) - y_1'(x) \geq 0, \quad x \geq \delta,$$

so daß in der Nähe von δ , $z_1(x) - y_1(x) > \varepsilon/2$ gilt und somit ist $(y_1(x), z_1(x))$ auch eine Lösung von (5) mit den Initialdaten (y_0, Y_0) . Es ist leicht zu sehen daß die Funktionen F und G eine Lipschitz-Bedingung erfüllen [3] und so ist $(y_1(x), z_1(x))$ gleich der von unserem Satz gegebenen Lösung $(y(x), z(x))$.

3. In diesem Teil der Arbeit werden wir sehen daß, falls die Bedingung $f'(x) \in [1/2, 1)$ für $x \geq 0$ nicht vorausgesetzt wird, gibt es eine Lösung $(y(x), z(x))$ des Systems (4) für jede Initialdaten (y_0, Y_0) mit $Y_0 > y_0 > 0$ die für $x \geq \delta$ genügend klein definiert ist (eine Folgerung des Peano-Satzes); man kann aber nicht mit Bestimmtheit sagen daß die Lösung für alle Werte $x \geq \delta$ Sinn hat.

Falls wir $\frac{(y'(x))^2 - 1}{2y'(x)}$ aus (2) in (1) einsetzen, erhalten wir

$$(8) \quad Y(X) + \frac{X}{Y'(X)} = y(x) - x \frac{(y'(x))^2 - 1}{2y'(x)}.$$

Setzt man beide Teile in (8) gleich einer Konstante K , findet man (wir erhalten Lagrange Differentialgleichungen)

$$(9) \quad X^2 + (Y(X) - K)^2 = C^2, \quad y(x) = \frac{1}{4K} x^2,$$

(man hat $y(0) = 0$), wobei $K > 0$ und $C > 0$ sind. Aus (1) und (9) erhalten wir daß die Abhängigkeit $X = f(x)$ in diesem Fall die Form

$$X = f(x) = 4KC \frac{x}{x^2 + 4K^2}$$

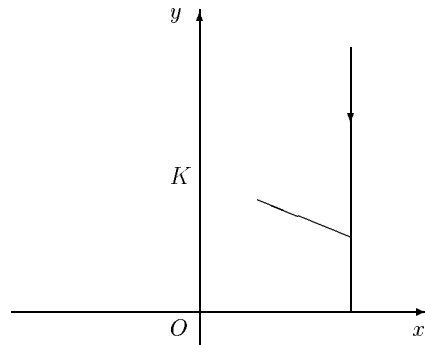
annimmt. Aus der Beziehung

$$f'(x) = 4KC \frac{4K^2 - x^2}{(4K^2 + x^2)^2}$$

erhält man $f'(x) < 0$ für $x > 2K$ so daß die Bedingung unseres Salzes nicht erfüllt ist. Da $0 < y'(x) < 1$ nur für $0 < x < 2K$ möglich ist (wegen (9)), sieht man daß das Definitionsbereich der Lösung von $2K$ nach oben beschränkt ist.

Setzt man $\delta = C < K$ (so daß $0 < f(x) < x$), so hat man eine lokale Lösung: ein parabolischer Spiegel der im Innern eine zylindrische Absorptionsfläche hat.

Man kann also sehen daß falls die Bedingung $f'(x) \in [1/2, 1)$ für $x \in \mathbf{R}_+$ nicht erfüllt ist, man nur von einer lokalen Lösung sprechen kann. Ist es möglich diese Bedingung die uns Freiheit über die Größe des Sonnenkollektors gibt, zu verbessern? Wir sind nun nicht fähig diese Frage in einem befriedigendem Maße zu beantworten.



Man kann das System (4) auch von einem anderen Standpunkt betrachten. Nämlich: "Ist der Spiegel gegeben, wie findet man die Absorptionsfläche?" oder "Hat man eine gegebene Absorptionsfläche, wie soll man den Spiegel bauen?"

Ist die Absorptionsfläche $Y = Y(X)$ gegeben und kann man aus der Gleichung (2), nämlich

$$Y'(X) = \frac{2y'(x)}{1 - (y'(x))^2},$$

die Unbekannte X als eine Funktion von $y'(x)$ schreiben, so wird (1) zu einer Lagrange-Gleichung die man leicht lösen kann.

Zum Beispiel, hat die Absorptionsfläche die Gleichung $Y = X^2 + \frac{1}{2}$, so erhält man die Lagrange-Gleichung

$$y(x) = \frac{(y'(x))^2 - 1}{2y'(x)} x + \frac{(y'(x))^2}{(1 - (y'(x))^2)^2} + 1$$

mit der Lösung (in parametrischer Form)

$$\begin{cases} x(p) = p + \frac{p}{(1-p^2)^2}, & 0 < p < 1, \\ y(p) = \frac{p^2 - 1}{2} - \frac{1}{2(1-p^2)} + \frac{p^2}{(1-p^2)^2} + 1. \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. R. CONTI, G SANSONE: *Non-Linear Differential Equations*. Pergamon Press, New York 1964.
2. D. DIMITROVSKI, M. MIJATOVIĆ, V. VELIČKOVA: *Les propriétés spécifiques des systèmes indéterminés des équations différentielles des collecteurs du soleil*. Punime Matematika, 1 (1986), 49–67.
3. J. K. HALE: *Ordinary Differential Equations*. Krieger Publ. Comp., New York 1980.

Courant Institute of Mathematical Sciences,
251 Mercer Street,
10012 New York,
U.S.A.

(Received June 19, 1995)