Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak.
Ser. Mat. 6 (1995), 8–11.

SUR LA FORME DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Dragoslav S. Mitrinović

1. Nous allons représenter, dans ce qui suit, par K une constante arbitraire, par m and n deux entiers positifs, par h_j $(j=1,2,\dots,m)$ des constantes numériques, par α_j $(j=1,2,\dots,m)$, $\lambda_i,\mu_i,\nu_i,\tau_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ des fonctions de la variable x, différentes entre elles.

Ceci étant admis, considérons une relation de la forme

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i y+\mu_i}{\nu_i y+\tau_i}\right)\prod_{j=1}^{m}(y-\alpha_j)^{h_j}=K. \tag{1}$$

L'élimination de K de la dernière relation conduit a l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{A(x,y)}{B(x,y)}=\frac{p_0(x)+p_1(x)y+\cdots+p_s(x)y^s}{q_0(x)+q_1(x)y+\cdots+q_{s-1}(x)y^{s-1}}\,,\qquad (s=m+2n) \tag{2}$$

les coefficients du numérateur étant des combinaisons simple des fonctions α_j,λ_i, μ_i,ν_i,τ_i et des leurs premières dérivées; et les coefficients du dénominateur étant des combinaisons des mêmes fonctions et non de leurs dérivées.

Il est évident que les

$$y_j=\alpha_j\quad (j=1,2,\dots m),\qquad y_i=-\frac{\tau_i}{\nu_i}\quad (i=1,2,\dots,n)$$

sont des solutions particulières de l'équation (2). Ce fait fourni la possibilité d'abaisser, dans des cas assez généraux, le degré des polynômes $A(x,y)$ et $B(x,y)$. En effet, si l'on pose, dans l'équation (2),

$$y=z+\alpha_1, \tag{3}$$

[0]1991 Mathematics Subject Classification: 34A05

elle prend la forme suivante

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{P_1 z + P_2 z^2 + \cdots + P_s z^s}{Q_0 + Q_1 z + \cdots + Q_{s-1} z^{s-1}}$$

et enfin

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{P_1 + P_2 z + \cdots + P_s z^{s-1}}{Q_1 + Q_2 z + \cdots + Q_{s-1} z^{s-2}}\,, \tag{4}$$

si la relation $Q_0 = 0$ est vérifiée, relation *algébrique* entre les quantités $\alpha_j, \lambda_i, \mu_i$, ν_i, τ_i.

D'après la relation (3), on voit que

$$z_1 = \alpha_2 - \alpha_1$$

est une solution particulière de l'équation (4), or, le même procédé peut s'appliquer à l'équation (4), etc.

Proposition. *Si l'on soumet les coefficients $\alpha_j, \lambda_i, \mu_i,\ \nu_i, \tau_i$ à la vérification des $r \leq m+n$ conditions algébriques qui s'obtiennent de la manière indiquée plus haut, cela a pour effet de diminuer le degré des polynômes $A(x,y)$ et $B(x,y)$ de r unités.*

On peut en tirer diverses conséquences. Ainsi, par exemple, en choisissant convenablement les fonctions $\alpha_j, \lambda_i, \mu_i,\ \nu_i, \tau_i$ et les nombres entiers m et n, on finit par arriver à une équation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2}{b_0(x) + b_1(x)y}\,, \tag{A}$$

équation jouant un rôle important dans l'Analyse. Ce fait indique comment figure la constante d'intégration dans l'intégrale générale des équations faisant partie de l'équation (A).

2. Si l'on part maintenent de la relation

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i y + \mu_i}{y - \alpha_i}\right) \prod_{j=1}^{m} (y - \alpha_i)^{h_i} = K,$$

qui est moins générale que (1), on arrive à une équation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p_0(x) + p_1(x)y + \cdots + p_{2n}(x)y^{2n}}{q_0(x) + q_1(x)y + \cdots + q_{2n-1}(x)y^{2n-1}}\,.$$

En choisissent en ontre les h_i $(i \neq 1)$ de sorte que

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = 0,$$

on a $q_{2n-1}(x) = 0$.

3. Les équations appartenent au type (2) ont été étudiées par de nombreux géomètres. Les résultat que nous venons de signaler se rattache, en particulier, aux résultats de LETNIKOW [**1**], de HAENTZSCHEL [**2**] et de PAINLEVÉ [**3**].

1. Zeitschrift für Mathematik und Physik, **12** (1867), 223–264.
2. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **112** (1893), 148–155.
3. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, **10** (1896), Mémoire G, 1–37.

REMARK. The above note was written by D. S. MITRINOVIĆ in 1937. He wrote several versions of the note, but none of them were published. One of the versions was read by our leading mathematician of that time, M. PETROVIĆ (1868–1943) who gave some suggestions regarding the presentation of the result.

A few years ago Professor MITRINOVIĆ gave me a file containing the material relevant to the problem considered in the note: various offprints, his sketches and writings, comments by M. PETROVIĆ, etc. Professor MITRINOVIĆ asked me to look through all the versions of the note, and said that he would like to publish the result. However, we were both engaged at other projects, and we both forgot about the note.

Although the considered problem is somewhat out of date, it fits into the first period of MITRINOVIĆ's work (1933–1941) and I believe that it is appropriate to publish the note in this issue of Publikacije, dedicated to him.

The above text is reprodused from the final hand–written version of the note. Clearly, it was prepared for publication in C.R.Acad.Sci. Paris.

Belgrade, September 14, 1995. J. D. Kečkić