UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 678 — № 715 (1980), 206—208.

715. SUR UNE INÉGALITÉ DE LA NORME*

Domenico Delbosco

1. Introduction.

Dans le livre [1] on trouve formulée et démontrée l'inégalité suivante: quels que soient les nombres réels ou complexes x et y on a

$$|x+y|^p \leqq c_p (|x|^p + |y|^p) \tag{1.1}$$

où $c_p = 2^{p-1}$ $(p>1)$ et $c_p = 1$ $(0 \leqq p \leqq 1)$ sont les meilleures constantes.

Il est facile à démontrer (voir § 2) cette simple généralisation à n variables de (1.1):

$$|x_1 + \cdots + x_n|^p \leqq c_{p,n} (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p), \tag{1.2}$$

où $c_{p,n} = n^{p-1}$ $(p>1)$ et $c_{p,n} = 1$ $(0 \leqq p \leqq 1)$ sont les meilleures constantes.

Dans cet article on donne une généralisation des inégalités (1.1) et (1.2) aux espaces linéaires normés.

2. Les résultats

Proposition 2.1. *Quel que soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, où x_i est un nombre réel ou complexe et quel que soit le nombre non négatif p, on a*

$$|x_1 + \cdots + x_n|^p \leqq c_{p,n} (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p), \tag{1.2}$$

où $c_{p,n} = n^{p-1}$ $(p>1)$ et $c_{p,n} = 1$ $(0 \leqq p \leqq 1)$ sont les meilleures constantes.

Démonstration. (i) $0 \leqq p \leqq 1$. Si $n=2$ l'inégalité (1.2) devient la (1.1). On suppose que l'inégalité (1.2) est vraie pour un certain entier n et on démontre qu'elle est aussi vraie pour l'entier $n+1$. En effet on a:

$$|x_1 + \cdots + x_{n+1}|^p \leqq |x_1 + \cdots + x_n|^p + |x_{n+1}|^p$$

et par l'induction

$$|x_1 + \cdots + x_{n+1}|^p \leqq |x_1|^p + \cdots + |x_{n+1}|^p$$

---

* Presented July 29, 1980 by A. LUPAŞ

(ii) $p>1$. L'inègalité à démontrer est:

$$|x_1+\cdots+x_n|^p \leqq n^{p-1}(|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p),$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{|x_1+\cdots+x_n|}{n}\right)^p \leqq \frac{|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p}{n}.$$

Cette dernière inégalité est conséquence de la convexité de l'application $z=t^p$ $(p>1)$ (en effet sa dérivée $z'=pt^{p-1}$ est croissante).

On va, maintenant, démontrer le résultat fondamental de cet article.

Théorème 2.2. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace linéaire normé sur le corps des réels ou des complexes. Quelle que soit la couple (x, y) d'éléments de X et quel que soit le nombre réel non négatif p, on a*

$$\|x+y\|^p \leqq c_p(\|x\|^p+\|y\|^p), \tag{2.1}$$

où $c_p=2^{p-1}$ $(p>1)$ et $c_p=1$ $(0\leqq p\leqq 1)$ sont les meilleures constantes.

Démonstration. (a) $p=1$. Dans ce cas l'inégalité (2.1) devient l'inégalité triangulaire de la norme.

(b) $p\neq 1$. Si l'inégalité triangulaire de la norme: $\|x+y\|\leqq\|x\|+\|y\|$ on élève à la puissance p-ième, on déduit que:

$$\|x+y\|^p \leqq (\|x\|+\|y\|)^p. \tag{2.2}$$

En posant $\|x\|=a$ et $\|y\|=b$ et en utilisant l'inégalité (1.1), on trouve $(a+b)^p\leqq c_p\,(a^p+b^p)$, donc

$$(\|x\|+\|y\|)^p \leqq c_p(\|x\|^p+\|y\|^p). \tag{2.3}$$

Les inégalités (2.2) et (2.3) entraînent l'inégalité (2.1).

Il est possible de donner une généralisation de l'inégalité (1.2) aux espaces normés.

Théorème 2.3. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace linéaire normé sur le corps des réels ou des complexes. Quel que soit $x=(x_1, \ldots, x_n)$, où $x_i\in X$ et quel que soit le réel non négatif p, on a*

$$\|x_1+\cdots+x_n\|^p \leqq c_{p,n}(\|x_1\|^p+\cdots+\|x_n\|^p), \tag{2.4}$$

où $c_{p,n}=n^{p-1}$ $(p>1)$ et $c_{p,n}=1$ $(0\leqq p\leqq 1)$ sont les meilleures constantes.

La démonstration se fait en utilisant le Théorème 2.1 et l'inégalité (1.2).

BIBLIOGRAPHIE

1. D. S. Mitrinović: *Analytic Inequalities.* Berlin-Heidelberg-New York 1970.

Istituto di Analisi Matematica
Università di Torino,
Torino, Italia

O JEDNOJ NEJDNAKOSTI ZA NORMU

D. Delbosco

Dokazana je teorema: Neka je $(X, \|\cdot\|)$ linearni normirani prostor i neka je p proizvoljan nenegativan realan broj; tada za svaki par $(x, y) \in X$ važi nejednakost

$$\| x+y \|^p \leqq C_p (\| x \|^p + \| y \|^p),$$

gde su $C_p = 2^{p-1} (p > 1)$ i $C_p = 1$ $(0 \leqq p \leqq 1)$ najbolje konstante.