UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 634 — № 677 (1979), 181—184.

664. EINIGE RELATIONEN ZWISCHEN DEN KEGELELEMENTEN

Stanimir Fempl

1. In einer meiner Arbeit [1] untersuchte ich das elliptische Integral

$$\Lambda(n, k, \varphi) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}{1+n \sin^2 t} \, \mathrm{d}t \qquad (n \geqq 0,\ k \in [0, 1]).$$

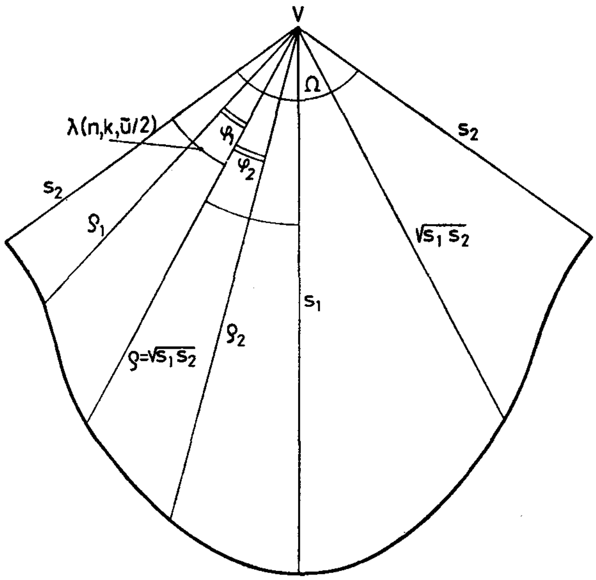
Seine geometrische Bedeutung ist folgende: Wenn man den Mantel eines schiefen Kreiskegels in die Ebene ausbreitet, so stellt das Integral den Winkel θ zwischen einer beliebigen Mantellinie ρ mit der kleinsten Mantellinie s_2 dar, und zwar ist

$$\theta(\rho) = \Lambda(n, k, \varphi),$$

wo

$$n = \frac{(s_1 - s_2)^2}{4 s_1 s_2}, \quad k = \sin\frac{\beta-\gamma}{2}, \quad \cos\varphi = \frac{s_1+s_2}{s_1-s_2} \cdot \frac{s_1 s_2 - \rho^2}{s_1 s_2 + \rho^2}$$

ist. Dabei bedeutet s_1 die grösste Mantellinie, β und γ die Winkel die gegenüber den Seiten s_1 und s_2 im charakteristischen Dreieck des Kegels liegen. Es bezeichne



noch r den Halbmesser des Kegelgrundkreises.

Weiterhin zeigte ich dass der Winkel zwischen s_2 und der Mantellinie die dem geometrischen Mittel von s_1 und s_2 gleich ist, das Viertel von der Manteröffnung Ω darstellt, weil wegen $\rho^2 = s_1 s_2$ die Grösse φ den Wert $\pi/2$ erhält; für $\rho = s_2$ ist $\varphi = 0$ oder 2π, während man leicht ersieht dass

$$\Lambda\left(n, k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\Lambda(n, k, \pi) = \frac{1}{4}\Lambda(n, k, 2\pi)$$

ist.

In dieser Arbeit beweise ich den folgenden

Satz. *Wenn für zwei Mantellinien* ρ_1 *und* ρ_2

$$\rho_1 \rho_2 = s_1 s_2 \tag{1}$$

ist, so ist im ausgebreiteten Mantel

$$\sphericalangle(\rho_1, \rho) = \sphericalangle(\rho, \rho_2),$$

wo ρ *das geometrische Mittel von* s_1 *und* s_2 *darstellt.*

Beweis. Aus

$$\cos\varphi = \frac{s_1+s_2}{s_1-s_2} \cdot \frac{s_1 s_2 - \rho_1^2}{s_1 s_2 + \rho_1^2}, \quad \cos\psi = \frac{s_1+s_2}{s_1-s_2} \cdot \frac{s_1 s_2 - \rho_2^2}{s_1 s_2 + \rho_2^2},$$

folgt

$$\cos\varphi + \cos\psi = 2 \cdot \frac{s_1+s_2}{s_1-s_2}(s_1^2 s_2^2 - \rho_1^2 \rho_2^2).$$

Wenn (1) gillt, so wird

$$\varphi + \psi = \pi. \tag{2}$$

In der Arbeit [1] gab ich das Additionstheorem für die Funktion Λ:

$$\Lambda(n, k, \varphi) + \Lambda(n, k, \psi) = \Lambda(n, k, \sigma) + \operatorname{arctg} \frac{\sin\varphi \sin\psi \sin\sigma \sqrt{n(n+1)(n+k^2)}}{n+1-n\cos\varphi\cos\psi\cos\sigma},$$

wo man σ aus der Gleichung

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}$$

erhält. Nimmt man hier auf Grund (2) $\psi = \pi - \varphi$, so ist

$$\cos\sigma = -\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}$$

und diese Gleichung befriedigt der einzige Wert $\sigma = \pi$. Deshalb ist

$$\Lambda(n, k, \varphi) + \Lambda(n, k, \psi) = \Lambda(n, k, \pi) = 2\Lambda\left(n, k, \frac{\pi}{2}\right). \tag{3}$$

Das erste Glied der linken Seite stellt ein Winkel ω_1 dar, den eine Mantellinie ρ_1 mit der Mantellinie s_2 bildet, das zweite Glied einen Winkel ω_2 zwischen der Mantellinie ρ_2 mit s_2. während die rechte Seite den halben Wert der Mantelöffnung Ω darstellt. Ist jetzt

$$\omega_1 = \frac{1}{4}\Omega - \varphi_1, \quad \omega_2 = \frac{1}{4}\Omega + \varphi_2,$$

so wird auf Grund (3)

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{2}\Omega - \varphi_1 + \varphi_2 = 2 \cdot \frac{\Omega}{4}$$

d.h.

$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

was zu beweisen war.

Es ist bekannt [2] dass Mittelwerte existieren die eine Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels darstellen, und die man auf folgende Weise erhält. Man wählt eine Funktion Ψ die in einem Intervall (α, β) zwei Ableitungen mit konstanten Vorzeichen besitzt. Liegt A und B in (α, β), und wenn man mit $\mathfrak{h}(x)$ die inverse Funktion von $\Psi(x)$ bezeichnet, so ist

$$M = \mathfrak{h}\left[\frac{\Psi(A) + \Psi(B)}{2}\right]$$

ein verallgemeinertes Mittel. So z.B. für $\Psi(x) = x$ erhält man das arithmetische Mittel, für $\Psi(x) = \ln x$ das geometrische, für $\Psi(x) = 1/x$ des harmonische, für $\Psi(x) = x^n$ das Potenzmittel u.sw. Für $A < B$ und $\Psi'(x) > 0$ ist immer

$$\Psi(A) < \frac{\Psi(A) + \Psi(B)}{2} < \Psi(B)$$

und das Ungleichheitszeichen gilt auch wenn man die Inversion nimmt. Da aus diesem $A < M < B$ folgt, so ist die Benennung »Mittel« vollkommen berechtigt (Ähnliches gilt auch für $\Psi''(x) < 0$).

Aus dem erwähnten Satz kann man gewisse Folgerungen ziehen. Wenn die n-te Potenz der Mantellinie ρ_1 das harmonische Mittel von den n-ten Potenzen der Mantellinien s_1 und s_2 darstellt, d.h.

$$\rho_1^n = \frac{2 s_1^n s_2^n}{s_1^n + s_2^n},$$

so folgt aus (1)

$$\rho_2 = \sqrt[n]{\frac{s_1^n + s_2^n}{2}}$$

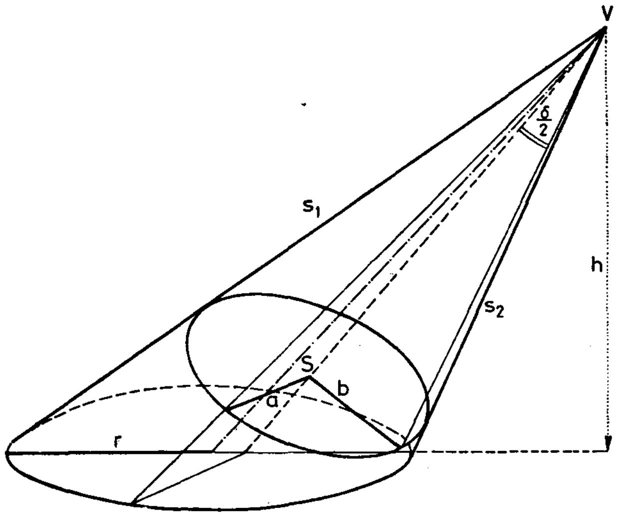
d.h. die zweite Mantellinie ist ein Potenzmittel von s_1 und s_2. Speziell, für $n = 1$ ist ρ_1 das harmonische Mittel, während ρ_2 das arithmetische Mittel ist. Für $n = 2$ ist

$$\rho_1 = \frac{s_1 s_2 \sqrt{2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}.$$

Für die erste Mantellinie ist $\operatorname{tg}(\varphi/2) = \sqrt{s_2/s_1}$. Für die zweite Mantellinie zeigt man leicht, dass sie den Schenkel jenes Achsenschnittes des Kegels darstellt, der ein gleichschenkliches Dreieck ist. Die Ebene dieses Schnittes steht senkrecht auf die Ebene des charakteristischen Dreiecks.

2. In einer anderer Arbeit [3] habe ich folgendes gezeigt. Legt man durch den Fusspunkt der Mantellinie s_2 eine Ebene die senkrecht auf die Symetrale des zwischen s_1 und s_2 im charakteristischen Dreieck liegenden Winkel δ steht, so ist die Schnittlinie dieser Ebene mit dem Kegel eine Ellipse mit der grossen Halbachse $a = r\sqrt{s_2/s_1}$

und der kleinen Halbachse $b=s_2 \sin(\delta/2)$. Der Kegel der diese Ellipse als Grundfläche besitzt und dieselbe Spitze hat wie der schiefe Kreiskegel, ist ein gerader elliptischer Kegel assoziert dem Kreiskegel.



Seine Höhe $VS=H$ beträgt $H=s_2 \cos(\delta/2)$. Der Inhalt V_1 des Kreiskegels ist $V_1=r^2 h\pi/3$, oder wegen $h=(s_1 s_2 \sin\delta)/(2r)$,

$$V_1=\frac{r\pi s_1 s_2 \sin\delta}{6}.$$

Der Inhalt des assozierten elliptischen Kegels ist

$$V_2=\frac{ab\pi H}{3}=\frac{r\pi \sin\delta}{6}\sqrt{\frac{s_2^5}{s_1}}.$$

Aus diesen zwei Ausdrücken folgt eine interessante Relation

$$V_1^2 : V_2^2 = s_1^3 : s_2^3$$

die ihrer Struktur nach, an das dritte Keplersche Gesetz erinnert.

LITERATUR

1. S. Fempl: *O jednom tipu eliptičkog integrala III vrste i o njegovim primenama*. Zbornik radova Matematičkog instituta SAN **7** (1959), 107—120.

2. K. Knopp: *Über die maximalen Abstände und Verhältnisse verschiedener Mittelwerte*. Math. Zeitschrift **39** (1935), 768—776.

3. S. Fempl: *O jednoj linearnoj kombinaciji normalnih eliptičkih integrala I i II vrste*. Zbornik radova Matematičkog instituta SAN **5** (1956), 61—116.