UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 634 — № 677 (1979), 55—56.

641. NOTIZ ÜBER MAXIMALWERTE VON POLYNOMEN AUF DEM EINHEITSKREIS

A. M. Ostrowski

1. Ist $f(z)$ ein Polynom, so werden wir schreiben

$$M_f := \operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)|. \tag{1}$$

Satz. *Ist $f(z)$ ein Polynom vom Grade m und $g(z)$ ein Polynom vom Grade n, so gilt*

$$M_f M_g \geqq M_{fg} \geqq \gamma\, M_f M_g \tag{2}$$

mit

$$\gamma := \sin^m \frac{\pi}{8m} \sin^n \frac{\pi}{8n}. \tag{3}$$

2. Lemma. *Ist $f(z)$ ein Polynom vom Grade m, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$*

$$|f(e^{i\theta})| \geqq M_f \sin^m \frac{\pi}{8m+\varepsilon}, \tag{4}$$

bis auf endlich viele θ-Intervalle aus $\langle -\pi, \pi\rangle$ von der Gesamtlänge $\leqq \frac{8m\pi}{8m+\varepsilon}$.

3. ***Beweis des Lemmas.*** O. B. d. A. können wir annehmen, dass

$$f(z) = (z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_m),$$

und setzen

$$\delta := \frac{\pi}{8m+\varepsilon}.$$

Da

$$M_f \leqq (1+|\alpha_1|)\cdots(1+|\alpha_m|)$$

ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{|e^{i\theta}-\alpha_k|}{1+|\alpha_k|} \geqq \sin^m \delta, \tag{5}$$

bis auf endlich viele θ-Intervalle aus $\langle -\pi, \pi\rangle$ mit der Gesamtlänge $8m\pi/(8m+\varepsilon)$. (5) ergibt sich aber sofort, wenn wir zeigen, dass für jedes α

$$\frac{|e^{i\theta}-\alpha|}{1+|\alpha|} \geqq \sin\delta \tag{6}$$

ist, bis auf endlich viele θ-Intervalle aus $\langle -\pi, \pi\rangle$ mit der Gesamtlänge $8\pi/(8m+\varepsilon)$. Denn dies ist die Gesamtlänge der Ausnahmeintervalle, die $\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ entsprechen.

4. Man setze nun $\alpha=pe^{i\varphi}$, $p>0$. Dann wird die Behauptung (6) zu

$$\frac{|e^{i(\theta-\varphi)}-p|}{1+p} \geqq \sin\delta$$

und wir sehen, dass es genügt zu beweisen, dass

$$\frac{|1+pe^{i\theta}|}{1+p} \geqq \sin\delta, \tag{7}$$

bis auf endlich viele θ-Intervalle von der Gesamtlänge 8δ. Nun gilt für $\pi-2\delta \geqq |\theta| \geqq 2\delta$:

$$\frac{|1+pe^{i\theta}|^2}{(1+p)^2} = \frac{1+p^2+2p\cos\theta}{1+p^2+2p} \geqq \frac{1+p^2-2p\cos 2\delta}{1+p^2+2p}. \tag{8}$$

Dividieren wir hier im Zähler und im Nenner durch $1/(p^2+1)$ und setzen $2p/(p^2+1)=:q$, so ist unser Ausdruck rechts in (8)

$$=\frac{1-q\cos 2\delta}{1+q} \geqq \frac{1-\cos 2\delta}{2} = \sin^2\delta.$$

Denn q liegt, als das reziproke arithmetische Mittel von p und $1/p$, zwischen 0 und 1, und der obige Ausdruck nimmt seinen kleinsten Wert für $q=1$ an. Damit ist unser Lemma bewiesen.

5. ***Beweis des Satzes.*** Wir haben offenbar nur die rechtsseitige Behauptung in (2) zu beweisen. Nach unserem Lemma gilt (4) bis auf endlich viele θ-Intervalle von der Gesamtlänge $8m\pi/(8m+\varepsilon)$ und daher analog

$$|g(e^{i\theta})| \geqq M_g \sin^n \pi/(8n+\varepsilon), \tag{9}$$

bis auf Ausnahmeintervalle von der Gesamtlänge $8n\pi/(8n+\varepsilon)$. Daher ist die Gesamtlänge der Ausnahmeintervalle, die für (4) oder für (9) gelten,

$$\frac{8m\pi}{8m+\varepsilon}+\frac{8n\pi}{8n+\varepsilon}=2\pi\left(1-\frac{\varepsilon}{16m+2\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{16n+2\varepsilon}\right)<2\pi.$$

Daher gibt es ein θ_0, das zu keinem dieser Intervalle gehört und für das sowohl (4) als auch (9) gilt. Durch Multiplikation erhalten wir

$$|f(e^{i\theta_0})g(e^{i\theta_0})| \geqq M_f M_g \sin^m\frac{\pi}{8m+\varepsilon}\sin^n\frac{\pi}{8n+\varepsilon}.$$

Daher gilt sicher

$$M_{fg} \geqq M_f M_g \sin^m\frac{\pi}{8m+\varepsilon}\sin^n\frac{\pi}{8n+\varepsilon}.$$

und damit für $\varepsilon \downarrow 0$ die Behauptung des Satzes.

CH 6926 Montagnola Ti
Schweiz