UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 602—№ 633 (1978), 223–228.

632. SUR QUELQUES GÉNÉRALISATIONS DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Branislav Martić et *Radovan R. Janić*

Dédiée au Professeur D. S. Mitrinović à l'occasion du 70-ième anniversaire de sa naissance.

0. Dans la présente note nous avons étudié quelques généralisations des équations fonctionnelles de O'DOUBLER, de STAMATE, de CRSTICI-NEAGU et de PREM NATH. Partout nous considérons seulement des founctions réelles et les variables réelles. En général, les fonctions sont supposées continues ou mesurables. Les démonstrations sont analogues pour les cas particuliers dans [**1**], [**2**] et [**3**]. Seulement la méthode que nous avons employée pour résoudre les équations (5.1), (5.3), (5.6) (6.1), (6.2) et (6.3) est plus simple que celle dans l'article [**4**]. Les équations (6.1), (6.2), (6.3) et (7.3) sont les généralisations des équations importantes de la théorie des informations (voir [**4**]). Les solutions banales sont exclues parce qu'elles sont évidentes.

1. L'équation fonctionnelle

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)=\lambda \prod_{\nu=1}^{n}\left\{\left[f_\nu(k_\nu x_\nu)\right]^{\left(\prod\limits_{\substack{r=1\\ r\neq\nu}}^{n} x_r\right)^{\beta}}\right\}+\alpha \qquad (k\in\mathbf{R}^+,\ \lambda,\ \alpha,\ \beta\in\mathbf{R}) \tag{1.1}$$

où x_i et les fonctions $f,\ f_i$ sont supposées positives, a comme solution

$$f(x)=\lambda\left[\left(\prod_{i=1}^{n} C_i\right)x\right]^{Cx^{\beta}}+\alpha,\quad f_i(x)=\left(C_i\frac{x}{k_i}\right)^{C\left(\frac{x}{k_i}\right)^{\beta}} \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.2}$$

où $C,\ C_i$ sont constantes arbitraires.

Si l'on pose $\lambda=1,\ \alpha=0,\ k_\nu=1,\ n=2,\ f=f_1=f_2$, l'équation fonctionnelle (1.1) se réduit à l'équation fonctionnelle de O'DOUBLER ([**1**], Problème 83). Dans ce cas $C_1 C_2=C_1=C_2 \Rightarrow C_1=C_2=1$.

En posant $\lambda=1,\ \alpha=0,\ k_\nu=1,\ \beta=0$ dans l'équation (1.1), on obtient l'équation de STAMATE ([**2**], l'équation 2.3).

2. L'équation (1.1), si l'on fait la substitution $g=\log f$, $g_i=\log f_i$ $(i=1,\ldots,n)$ se transforme en

$$(2.1)\qquad g\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{g_\nu(k_\nu x_\nu)\left(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\nu}}^{n} x_r\right)^{\beta}\right\}+\alpha \qquad (k_\nu\in\mathbf{R}^+,\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}).$$

La solution de l'équation fonctionnelle (2.1) est donnée par

$$(2.2)\qquad g(x)=Cx^{\beta}\log\left[\left(\prod_{i=1}^{n} C_i\right)x\right]+\alpha,\quad g_\nu(x)=C\left(\frac{x}{k_\nu}\right)^{\beta}\log\left(C_\nu\frac{x}{k_\nu}\right)\quad(\nu=1,\ldots,n),$$

où $C, C_i\ (i=1,\ldots,n)$ sont des constantes arbitraires.

Pour $\alpha=0$, $n=2$, $k_\nu=1$, $g=g_1=g_2$ l'équation (2.1) devient l'équation (1), p. 223 dans [**1**]. Dans ce cas $C_1=C_2=1$.

Si l'on pose $\alpha=0$, $k_\nu=1$, $\beta=0$ dans l'équation (2.1) on obtient l'équation de STAMATE ((1.3) dans [**2**]).

3. L'équation fonctionnelle

$$(3.1)\qquad f\left(\sum_{\nu=1}^{p} x_{1\nu},\ldots,\sum_{\nu=1}^{p} x_{n\nu}\right)=\sum_{i=1}^{p} f_i(k_{1_i}x_{1_i},\ldots,k_{n_i}x_{n_i})+A,$$

où A et $k_{\nu_i}\neq 0$ $(\nu=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,p)$ sont des constantes données, a comme solution

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n)&=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu+\sum_{\nu=1}^{p} C_\nu-\frac{A}{p-1},\\ f_i(x_1,\ldots,x_n)&=\sum_{r=1}^{n}\frac{a_r}{k_{ri}}x_r+C_i-\frac{A}{p-1}\quad(i=1,\ldots,p).\end{aligned}$$

La solution de l'équation fonctionnelle

$$(3.3)\qquad f\left(\sum_{\nu=1}^{p} x_{1\nu},\ldots,\sum_{\nu=1}^{p} x_{n\nu}\right)=\prod_{i=1}^{p} f_i(k_{1_i}x_{1_i},\ldots,k_{n_i}x_{n_i}),$$

où $k_{\nu_i}\neq 0$ $(\nu=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,p)$ sont des constantes données, est

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n)&=\exp\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu x_\nu+\sum_{\nu=1}^{p} D_\nu\right),\\ f_i(x_1,\ldots,x_n)&=\exp\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{b_\nu}{k_\nu}x_\nu+D_i\right)\quad(i=1,\ldots,p).\end{aligned}$$

Dans (3.2) et (3.4) a_ν, b_ν, C_ν, D_ν sont des constantes arbitraires.

Si l'on pose $k_{\nu_i}=1\,(\nu=1,\ldots,n;\, i=1,\ldots,p)$ et $A=0$, l'équation (3.1) prend la forme (3.2) dans [**2**]. Pour $k_{\nu_i}=k\,(\nu=1,\ldots,n;\, i=1,\ldots,p)$, l'équation (3.1) se ramène à l'équation (3.3) dans [**2**]. Dans le cas où $k_{\nu_i}=1$ $(\nu=1,\ldots,n;\, i=1,\ldots,p)$ l'équation (3.3) donne la deuxième équation dans la section 3.4 dans [**2**] (nous notons aussi que cette équation n'est pas correctement posée dans [**2**]).

4. Les solutions des équations fonctionnelles

$$f\left(\prod_{\nu=1}^{n} x_{\nu_1},\ \ldots,\ \prod_{\nu=1}^{n} x_{\nu_m}\right)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x_{k_1},\ \ldots,\ x_{k_m})+A, \tag{4.1}$$

et

$$f\left(\prod_{\nu=1}^{n} x_{\nu_1},\ \ldots,\ \prod_{\nu=1}^{n} x_{\nu_m}\right)=\prod_{k=1}^{n} f_k(x_{k_1},\ \ldots,\ x_{k_m}), \tag{4.2}$$

où $m\geqq 1$, $n\geqq 2$, $x_{r_i}\neq 0$ $(r=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,m)$ et A une constante donnée, sont données respectivement par

$$\begin{aligned} f(x_{r_1},\ \ldots,\ x_{r_m})&=\sum_{k=1}^{m} C_k \log|x_{r_k}|+\sum_{k=1}^{n} D_k-\frac{A}{n-1}, \\ f_r(x_{r_1},\ \ldots,\ x_{r_m})&=\sum_{k=1}^{m} C_k \log|x_{r_k}|+D_r-\frac{A}{n-1} \qquad (r=1,\ \ldots,\ n), \end{aligned} \tag{4.3}$$

et

$$\begin{aligned} f(x_{r_1},\ \ldots,\ x_{r_m})&=C\left|\prod_{k=1}^{m} x_{r_k}\right|^{\alpha}, \\ f_r(x_{r_1},\ \ldots,\ x_{r_m})&=C^{1/n}\left|\prod_{k=1}^{m} x_{r_k}\right|^{\alpha} \qquad (r=1,\ \ldots,\ n). \end{aligned} \tag{4.4}$$

C, C_k, D_k, α sont des constantes arbitraires.

En posant $n=2$, $f_1=f_2=f$, $A=0$ dans (4.1), on obtient l'équation de Crstici-Neagu ((1) dans [3]). Dans ce cas $D_1+D_2=D_1=D_2 \Rightarrow D_1=D_2=0$.

5. Prenons l'équation fonctionnelle

$$f(xy)=x^{\alpha} f(y)+y^{\beta} f(x)+dx^{\alpha} y^{\beta} \qquad (\alpha,\ \beta,\ d\in \mathbf{R},\ \alpha\neq\beta). \tag{5.1}$$

En mettant $y=C\neq 0$ et utilisant $f(xy)=f(yx)$, l'équation (5.1) donne

$$x^{\alpha} f(C)+C^{\beta} f(x)+dx^{\alpha} C^{\beta}=C^{\alpha} f(x)+x^{\beta} f(C)+dC^{\alpha} x^{\beta},$$

ou

$$f(x)=\frac{f(C)}{C^{\beta}-C^{\alpha}}(x^{\beta}-x^{\alpha})+\frac{dC^{\beta}}{C^{\beta}-C^{\alpha}}(x^{\beta}-x^{\alpha})-dx^{\beta}.$$

Donc, la solution de (5.1) est

$$f(x)=A(x^{\beta}-x^{\alpha})-dx^{\beta}, \tag{5.2}$$

où A est une constante arbitraire.

Un cas particulier de l'équation (5.1) avec $\beta=0$, $\alpha>0$, $d=0$ a été traité dans [3] (l'équation (5)).

Pour $\beta=1$, $\alpha>0$, $y\in(0, 1)$, l'équation (5.1) se ramène aux équations (2.21) et (2.22) dans [4].

Nous allons maintenant résoudre l'équation fonctionnelle suivante

$$f(xy)=x^{\alpha}g(y)+y^{\beta}f(x) \qquad (\alpha, \beta\in\mathbf{R}, \alpha\neq\beta). \tag{5.3}$$

Si l'on pose $x=1$ dans (5.3) on obtient

$$g(y)=f(y)-f(1)y. \tag{5.4}$$

En utilisant (5.3) et (5.4) on trouve

$$f(xy)=x^{\alpha}f(y)+y^{\beta}f(x)-f(1)x^{\alpha}y^{\beta}.$$

Des relations (5.1) et (5.2) on déduit immédiatement que la solution de l'équation (5.3) est

$$f(x)=A(x^{\beta}-x^{\alpha})+Bx^{\beta}, \quad g(x)=A(x^{\beta}-x^{\alpha}). \tag{5.5}$$

A et $B=f(1)$ sont des constantes arbitraires.

Considérons maintenant l'équation fonctionnelle

$$f(xy)=x^{\alpha}h(y)+y^{\beta}g(x) \qquad (\alpha, \beta\in\mathbf{R}, \alpha\neq\beta). \tag{5.6}$$

Si dans (5.6) nous posons $x=1$, on trouve

$$f(y)=h(y)+g(1)y^{\beta}. \tag{5.7}$$

Analoguement, pour $y=1$, on obtient

$$f(x)=x^{\alpha}h(1)+g(x). \tag{5.8}$$

Si dans (5.6) on introduit les fonctions (5.7) et (5.8) on trouve

$$f(xy)=x^{\alpha}f(y)+y^{\beta}f(x)-f(1)x^{\alpha}y^{\beta}.$$

En considérant les relations (5.1)—(5.2) on obtient la solution de l'équation (5.6) dans la forme

$$\begin{aligned} f(x)&=A(x^{\beta}-x^{\alpha})+Bx^{\beta},\\ g(x)&=A(x^{\beta}-x^{\alpha})+Bx^{\beta}-Cx^{\alpha},\\ h(x)&=A(x^{\beta}-x^{\alpha})+Cx^{\beta}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

A, $B=f(1)$, $C=h(1)$ sont des constantes arbitraires.

6. Les équations (5.1), (5.3) et (5.6) par une addition membre à membre conduisent à

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i y_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i^{\alpha} f(y_j)+y_j^{\beta} f(x_i)+\mathrm{d} x_i^{\alpha} y_j^{\beta}\right), \tag{6.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i y_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i^{\alpha} g(y_j)+y_j^{\beta} f(x_i)\right), \tag{6.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i y_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i^{\alpha} h(y_j)+y_j^{\beta} g(x_i)\right), \tag{6.3}$$

où α, β, $d\in\mathbf{R}$ $\alpha\neq\beta$; $m, n=1, 2, \ldots$

Donc, les solutions des équations (6.1), (6.2) et (6.3) sont représentées par (5.2). (5.5) et (5.9) respectivement.

Pour $\alpha>0$, $\beta=1$, $x_i\geqq 0$, $y_j\geqq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i=\sum_{j=1}^{n} y_j=1$, de (6.1), (6.2) et (6.3) on obtient les équations fonctionnelles (A_1), (A_2) et (A_3) dans **[4]** respectivement. Un cas particulier de l'équation (6.1) avec $d=0$, $\alpha>0$, $\beta=1$, $x_i\geqq 0$, $y_j\geqq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i=\sum_{j=1}^{n} y_j=1$ a été traité dans **[4]** (l'équation (A_5)).

7. L'équation fonctionnelle

$$f(x^{(1)}\cdot x^{(2)}\cdots x^{(r)})=x^{(1)} f_1(x^{(2)}\cdots x^{(r)})+x^{(2)} f_2(x^{(3)}\cdots x^{(r)}\cdot x^{(1)}) + \cdots + x^{(r)} f_r(x^{(1)}\cdots x^{(r-1)}) \tag{7.1}$$

a la solution

$$\begin{aligned} f(x)&=(r-1)\,Cx\log_a x, \qquad (a\in\mathbf{R}^+\setminus\{1\};\ i=1, 2, \ldots, r),\\ f_i(x)&=Cx\log_a x, \end{aligned} \tag{7.2}$$

où C est une constante arbitraire.

L'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned}\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}\cdots\sum_{p=1}^{v}\sum_{q=1}^{w}}_{r} & f(x_i^{(1)}\cdot x_j^{(2)}\cdots x_q^{(r)})\\ =\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}\cdots\sum_{p=1}^{v}\sum_{q=1}^{w} & \{x_i^{(1)} f_1(x_j^{(2)}\cdots x_q^{(r)})\\ & +x_j^{(2)} f_2(x_k^{(3)}\cdots x_q^{(r)}\cdot x_i^{(1)})+\cdots x_q^{(r)} f_r(x_i^{(1)}\cdots x_p^{(r-1)})\},\end{aligned} \tag{7.3}$$

où m, n, o, v, $w=1, 2, \ldots,$ a aussi comme solution (7.2).

En mettant $r=2$, l'équation (7.1) devient l'équation de STAMATE (3°, 1.12, **[2]**).

Un cas particulier de l'équation (7.3) avec $r=2$, $x_i^{(1)}\geqq 0$, $x_j^{(2)}\geqq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i^{(1)}=\sum_{j=1}^{n} x_j^{(2)}=1$, a été traité dans **[4]** (l'équation (A_4)).

BIBLIOGRAPHIE

1. F. T. O'Doubler: *Problem* 83. Изабраные задачи из журнала „The American Mathematical Monthly". Москва 1977.

2. I. I. Stamate: *Équations fonctionnelles contenant plusieurs fonctions inconnues.* Ces Publications № **354**—№ **356** (1971), 123—156.

3. B. Crstici and M. Neagu: *About the calculation of the integrals with parameters by means of the functional equations.* Glasnik Matematički **4** (24) (1969), 25—28.

4. Prem Nath: *On some functional equations and their applications.* Publ. Inst. Math **20** (34) (1976), 191—201.

Bjelave 70
71000 Sarajevo, Jugoslavija

Zavod za primenjenu matematiku
Elektrotehnički fakultet
11000 Beograd, Jugoslavija