UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 601 (1977), 1—58.

601. PRILOZI TEORIJI INTERVALNOG RAČUNA I NJENOJ PRIMENI

Žarko M. Mitrović

0. UVOD

Ovaj rad predstavlja skraćenu verziju doktorske disertacije odbranjene 1976. na Elektronskom fakultetu u Nišu. Iz rukopisa koji je prihvaćen i odbranjen kao doktorska teza, izostavljena su tri poglavlja za koje smo smatrali da su od manjeg značaja. Takođe su izvršena izvesna skraćivanja i u ostalim poglavljima.

Osnovni pojmovi i stavovi iz algebre, korišćeni u ovom radu, uzeti su iz sledećih knjiga: A. H. CLIFFORD i G. B. PRESTON ([**1**]), Đ. ČUPONA i B. TRPENOVSKI ([**1**]), E. S. LJAPIN ([**1**]), M. F. ATIYAN i I. G. MACDONALD ([**1**]), N. BOURBAKI ([**1**]), I. KAPLANSKY ([**1**]) i J. LAMBEK ([**1**]).

*

* *

Osećam se obaveznim da na ovom mestu izrazim svoju zahvalnost profesoru dr D. S. MITRINOVIĆu što me je upoznao sa ovom interesantnom oblašću matematike i pružio mi dragocenu pomoć u mom radu.

Takođe sam zahvalan svom profesoru dr Đ. ČUPONI za sugestije i savete koji su omogućili da ovaj rad dobije bolju formu i bogatiju sadržinu.

1. RAZVITAK INTERVALNQG RAČUNA

1.1. Važnost intervalnog računa

0. Ovde dajemo dva mišljenja o važnosti intervala i računanja sa njima, kao i kratki pregled istorijskog razvoja intervalnog računa.

1. Bez svake sumnje pojam intervala je jedan od najvažnijih pojmova čitave matematike. Evo šta o tome kaže naš poznati matematičar MIHAILO PETROVIĆ u svojoj knjizi „Računanje sa brojnim razmacima" (Beograd 1932):

„U čistoj, apstraktnoj matematici jedna realna količina je jedan tačno određen realan broj, jedna apstraktna matematička tačka na apstraktnoj matematičkoj realnoj brojnoj liniji. ...

To su osnovni elementi čiste, apstraktne matematike, ali na kakve se u stvarnosti, u praktičnoj matematici, vrlo retko kad nailazi. Istina, ima slučajeva kad je i u stvarnosti jedna uočena realna količina jedan tačno određen broj, koji se poklapa sa jednom matematičkom tačkom na apstraktnoj realnoj brojnoj liniji. To su slučajevi kada se zna da je uočena količina ceo ili periodičan desetni razlomak kome se mogu saznati sve decimale (tj. kad su te decimale sve nule, ili su one što su različite od nule, u konačnom broju, ili se uopšte zna zakon po kome se one nižu jedna za drugom, kao što je to slučaj kod racionalnih razlomaka itd.). ...

Svaku drugu količinu koja ima beskrajno mnogo decimala, a ovima se ne zna zakon, nemoguće je praktički, u stvarnosti, odrediti kao apstraktnu matematičku tačku na matematičkoj brojnoj liniji. Za takvu se količinu u najboljem slučaju može smo fiksirati jedan brojni razmak, tj. jedan razmak na brojnoj liniji za koji se može tvrditi da se ta količina sigurno u njemu nalazi. ...

Prema samoj prirodi ljudskog saznanja, jedna se realna količina (osim pomenutih izuzetnih slučajeva) određuje praktički, uopšte ne kao određen broj ili matematička tačka, već kao brojni razmak; jedna tačka kao segment jedne prave ili krive linije, ...

Međutim, na ovakve iste elemente, sa kojima se ima posla u matematici stvarnosti, nailazi se u problemima apstraktne matematike, pored onih sa kojima ona isključivo računa. To su problemi određene vrste u kojima se, na primer, nepoznate količine, po samoj svojoj prirodi, javljaju kao brojni razmaci; ili kad same pogodbe zadatka ne zahtevaju tačnu odredbu nepoznatih količina; ili kad je nepoznatu, zbog nesavladljivih teškoća nemogućno tačno odrediti; ili kad je ona takve prirode da je dvoljno naći dovoljno suženi razmak u kome se ona nalazi, pa se odmah, ili bar jednim nizom praktički izvršljivih računskih radnji, dobije i njena tačna ili dovoljno približna vrednost."

M. PETROVIĆ je primenjivao intervale u raznim oblastima matematike, ali nije računao sa njima u pravom smislu te reči, tj. onako kako to danas činimo.

2. Računanje sa intervalima (ili intervalna aritmetika) razvija se tek poslednjih dvadesetak godina sa naglim razvojem elektronskih računskih mašina. U vezi sa tim navodimo neke delove iz članka [8] H. RATSCHEKA:

„Intervalna aritmetika je srazmerno mlada i samim tim još uvek nedovoljno poznata grana matematike. ... pod intervalnom aritmetikom podrazumevamo računanje sa intervalima korišćenjem poznatih zakonitosti sa ciljem da se stvori korisno pomoćno sredstvo za zaokrugljivanje greške kod numeričkih izračunavanja na elektronskim računarima.

Počeci intervalne aritmetike datiraju iz 1958-59. godine. U to vreme su T. SUNAGA [1] i R. E. MOORE [1] upotrebljavali svakako prvi put intervale da bi mogli tačno da ograniče nastalu grešku zaokrugljivanja kod mašinskog izvođenja računskih programa. ... Ako se računanje izvodi na računaru, tada se učešćem greške zaokrugljivanja dobija jedan broj koji odstupa više ili manje od tačnog rezultata, a mera ovog odstupanja najčešće se ne može dovoljno dobro proceniti. Pod tačnim rezultatom podrazumeva se pri tome svaki broj koji se dobija tačnim matematičkim izračunavanjem. Ali da bi se računanje moglo tačno izvesti, potreban je, na primer, skup svih realnih brojeva za brojno područje. Na računaru, međutim, na raspolaganju je samo „beskrajno mali podskup realnih brojeva". Ovi brojevi se nazivaju mašinski brojevi odnosne mašine. Računanje se, dakle, ne može izvoditi u realnom brojnom području, već samo aproksimirati pomoću mašinskih brojeva. Poznato je da je ova okolnost odgovorna za pojavljivanje greške zaokrugljivanja.

Princip intervalne aritmetike sastoji se sada u tome što, umesto da se računa sa ovim netačnim brojevima, računa se sa intervalima, a ti intervali se tako obrazuju: (i) da njihove krajnje tačke budu mašinski brojevi i, (ii) da svaka tačna vrednost računanja koje je u toku leži u pridruženom intervalu. Umesto sa numeričkim vrednostima, računa se, dakle, sa granicama izvan kojih tačna vrednost ne može da se nalazi."

3. Iako T. SUNAGA i R. E. MOORE prvi koriste intervale i računaju sa njima, za „osnivača" intervalne aritmetike pre bi se mogla smatrati R. C. YOUNG, koju i R. E. MOORE citira. Ona je u [1] uvela operacije, ne sa intervalima, već sa proizvoljnim skupovima realnih brojeva (many-valued quantities).

Za vreme i posle pojavljivanja knjige R.E. MOOREa „Interval Analysis" nastaje interesovanje za ovu novu oblast matematike i pojavljuje se veći broj radova u različitim zemljama. Navodimo neke od najplodnijih autora: E. HANSEN (1965), O. MAYER, K. NICKEL (1966), N. APOSTOLATOS, U. KULISCH, H. WIPPERMANN (1967), G. ALEFELD (1968), Ş. BERTI, R. KRAWCZYK, H. RATSCHEK, P. WISSKIRCHEN (1969), J. HERZBERGER (1970) i drugi.

Godine 1968. održan je i simposium o intervalnoj analizi (Symposium on Interval Analysis, 24—25 January 1968 at the Culham Laboratory, Culham, England) kojim povodom je izdat i zbornik „Topics in Interval Analysis" u redakciji E. HANSENA.

1.2. Obična intervalna aritmetika

0. Pod običnom intervalnom aritmetikom podrazumevamo intervalnu aritmetiku koju su uveli T. SUNAGA i R. E. MOORE.

Kako ćemo u narednim glavama proučavati isključivo običnu intervalnu aritmetiku, to ovde dajemo samo najosnovnije pojmove i neke bitnije osobine.

1. Pod intervalom $[a, b]$ $(a, b \in \mathbf{R}^{\circ})$ podrazumevamo skup svih realnih brojeva x sa osobinom $a \leqq x \leqq b$. Skup svih intervala različitih od realnog broja 0 označavamo sa I.

Za dva intervala $[a, b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ i $[c, d] = \{y \mid c \leqq y \leqq d\}$ kažemo da su nezavisni ako x i y prolaze kroz odgovarajuće intervale potpuno nezavisno, tj. ne postoji nikakva veza između x i y. Nezavisne intervale ćemo nazivati jednostavno intervalima.

Ako je $a > 0$ kažemo da je interval $[a, b]$ pozitivan, ako je $b < 0$ da je negativan, a u ostalim slučajevima nazivamo $[a, b]$ 0-intervalom. Skup svih pozitivnih intervala označavamo sa N^+, negativnih sa N^-, a 0-intervala sa Z°. Pored toga je $N = N^+ \cup N^-$, a $\mathbf{R}^{\circ}$ označava skup svih realnih brojeva, tj. intervala $[a, b]$ gde je $a = b$.

Dva intervala $[a, b]$ i $[c, d]$ su jednaki, u oznaci $[a, b] = [c, d]$, ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

U skupu I° definisaćemo binarnu operaciju „$*$" sa

$$A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ovde se ista oznaka „$*$" koristi kako za operaciju u $\mathbf{R}^{\circ}$, tako i za odgovarajuću operaciju u I°. Pri tome element $A * B$ postoji ako i samo ako postoji element $a * b$ za sve $a \in A$, $b \in B$.

Neka je $A = [a_1, a_2]$ i $B = [b_1, b_2]$. Tada je

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} [a_1, a_2] * [b_1, b_2] &= \{a * b \mid a_1 \leqq a \leqq a_2,\ b_1 \leqq b \leqq b_2\} \\ &= [\min(a_1 * b_1, a_1 * b_2, a_2 * b_1, a_2 * b_2), \max(a_1 * b_1, a_1 * b_2, a_2 * b_1, a_2 * b_2)], \\ & * \in \{+, -, \cdot, :\}. \end{aligned}$$

Operacija „$*$" u I° je komutativna ili asocijativna ako i samo ako je operacija „$*$" u $\mathbf{R}^{\circ}$ komutativna ili asocijativna.

2. Nas posebno interesuju one operacije sa intervalima kada su odgovarajuće operacije u $\mathbf{R}^{\circ}$ obično sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje.

Operacije sabiranje i množenje intervala su komutativne i asocijativne. Neutralni element za sabiranje je $0 = [0, 0]$ a za množenje $1 = [1, 1]$, tj. $A + 0 = A$ i $1 \cdot A = A$. U polugrupama $I^{\circ}(+)$ i $N(\cdot)$ važi zakon skraćivanja, dok u $I^{\circ}(\cdot)$ ne važi.

Skup I° sa operacijama sabiranje i množenje ne obrazuje prsten, jer nisu ispunjeni neki zahtevi. Na primer:

(i) ne postoji element $X \in I \backslash R$ takav da je $A + X = 0$;

(ii) ne postoji element $X \in I^{\circ} \backslash R$ takav da važi $AX = 1$;

(Iii) ne važi distributivni zakon.

Količnik $A : B$ postoji ako i samo ako $B \in I \backslash Z$.

3. Umesto distributivnog zakona važi takozvana subdistributivnost, tj.

$$A(B+C) \subseteq AB+AC \qquad (A, B, C \in I^{\circ}).$$

Specijalno, ako je $A = a \in \mathbf{R}^{\circ}$, tada važi

$$a(B+C) = aB+aC.$$

H. Ratschek je u [5] ispitao za koje intervale A, B, C važi distributivni zakon, i, još opštije, za koje intervale $A, B_1, \ldots, B_n$ važi $A(B_1 + \cdots + B_n) = AB_1 + \cdots + AB_n$, dok je u [6] odredio takve intervale A_i $(i=1, \ldots, m)$ i B_j $(j=1, \ldots, n)$ za koje važi jednakost

$$(A_1 + \cdots + A_m)(B_1 + \cdots + B_n) = A_1 B_1 + A_1 B_2 + \cdots + A_m B_n.$$

4. Važna osobina intervalne aritmetike je osobina podskupova (ili inkluzivna monotonost): Neka je „$*$“ jedna od osnovnih računskih operacija i $A \subseteq C$, $B \subseteq D$, tada važi $A * B \subseteq C * D$. Važi i opštiji stav: Neka je $A_i \subseteq B_i$ $(i=1, \ldots, n)$ i $f(x_1, \ldots, x_n)$ neki racionalni intervalni izraz, tada važi

$$f(A_1, \ldots, A_n) \subseteq f(B_1, \ldots, B_n).$$

1.3. Proširena intervalna aritmetika

0. N. Apostolatos i U. Kulisch ([1]) proširili su pojam intervala i uveli jednu širu, takozvanu proširenu intervalnu aritmetiku. U ovom odeljku iznosimo njihove rezultate.

1. Unija intervala $[a_i, b_i]$, tj. skup $A = \bigcup [a_i, b_i]$, nazivamo uopštenim intervalom. Očigledno je svaki običan interval istovremeno i uopšteni interval. Ubuduće ćemo, u ovom odeljku, pod pojmom interval podrazumevati uopšteni interval. Skup svih uopštenih intervala obeležavamo sa $I(\mathbf{R})$. U skupu $I(\mathbf{R})$ definišemo računske operacije na isti način kao u skupu običnih intervala, naime

$$A * B = \{x * y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Ovde je „$*$“ jedna od osnovnih računskih operacija $+$, $-$, $.$, $:$. U slučaju deljenja moramo pretpostaviti da $0 \notin B$.

2. Za razliku od „nezavisnih“ intervala sada ćemo uvesti takozvane „zavisne“ intervale. Prethodno moramo uvesti još neke osnovne pojmove. Neka je $T \subseteq \mathbf{R}$. Preslikavanje $f\colon T \to \mathbf{R}$ nazivamo tačkastom ili običnom funkcijom, a preslikavanje $F\colon T \to I(\mathbf{R})$ intervalnom funkcijom. Podskup T je tada oblast definisanosti funkcija f i F, a oblast vrednosti datih funkcija nad nekim intervalom $A \subseteq T$ označavamo redom sa

$$f(A) = \bigcup f(t) \quad (t \in A) \quad \text{i} \quad F(A) = \bigcup F(t) \quad (t \in A).$$

Vidimo da je oblast vrednosti kako obične, tako i intervalne funkcije, ponovo interval. Skup svih običnih funkcija, odnosno intervalnih funkcija, čije oblasti definisanosti sadrže interval A, označavamo redom sa $\varphi(A)$ i $\Phi(A)$. Kako se svaki realan broj može smatrati za interval, to svaku običnu funkciju možemo smatrati za intervalnu funkciju, tj. $\varphi(A) \subset \Phi(A)$.

Dve intervalne funkcije $X(t)$ i $Y(t)$ iz $\Phi(A)$ nazivamo jednakim, i pišemo $X=Y$, ako i samo ako je $X(t)=Y(t)$ za svako $t \in A$. Neka je „$*$" neka od osnovnih računskih operacija, tada definišemo operaciju $(X*Y)(t)$ na sledeći način

$$(X*Y)(t)=X(t)*Y(t) \quad \text{za svako} \quad t \in A.$$

U slučaju deljenja ne sme $0 \in Y(t)$.

Kažemo da je interval X zavisan od intervala $A \neq \emptyset$, ili kraće da je X zavisan interval, ako je X oblast vrednosti intervalne funkcije $X(t) \in \Phi(A)$, i označavamo ga sa $X(A)$. Skup svih intervala zavisnih od A označavamo sa $I(A)$.

Dva zavisna intervala $X(A)$ i $Y(A)$ su međusobno zavisni ako je $A \cap B \neq \emptyset$. Obrnuto, dva zavisna intervala $X(A)$ i $Y(A)$ su međusobno nezavisni ako je $A \cap B = \emptyset$.

(H. Beeck ([1]) kaže da ova definicija zavisnosti intervala ima nedostatak što je prema njoj svaki interval od svakog intervala zavisan a isto tako i nezavisan.)

Za dva intervala $X(A)$ i $Y(B)$ iz $I(A)$ kažemo da su jednaki ako i samo ako su intervalne funkcije $X(t)$ i $Y(t)$ iz $\Phi(A)$ jednake. Ako označimo sa $\triangle$ jednu od četiri osnovne računske operacije međusobno zavisnih intervala, tada je

$$X(A) \triangle Y(A)=(X*Y)(A).$$

Kod deljenja ponovo $0 \notin Y(A)$. Time se aritmetika intervala koji zavise od intervala A svodi na aritmetiku intervalnih funkcija, odnosno nezavisnih intervala.

Kod ove definicije aritmetike u $I(A)$ odmah se vidi da su nezavisni intervali nad u A konstantnim funkcijama $Y(t)=B$ i $Z(t)=C$ iz $\Phi(A)$ izomorfni skupu nezavisnih intervala:

$$Y(A) \triangle Z(A)=B*C.$$

Stoga možemo identifikovati skup zavisnih intervala nad konstantnim intervalnim funkcijama sa skupom nezavisnih intervala. Tada je $I(\mathbf{R}) \subset I(A)$.

Kako je $a=[a, a] \in I(\mathbf{R})$, to su operacije $\triangle$ definisane i za brojeve i važi $b \triangle c=b*c$. Analogno se mogu definisati operacije između zavisnih i nezavisnih intervala , naime

$$X(A) \triangle B=X(A)*B.$$

3. Ispitajmo sada osobine skupa $I(A)$. Iz definicije računskih operacija intervala koji zavise od intervala A sleduje odmah da važe komutativni i asocijativni zakon za sabiranje i množenje. Brojevi 0 i 1 su redom neutralni elementi za sabiranje i množenje. Ipak $I(A)$ nije polje, jer svaki element $X(A)$ ne poseduje inverzni za sabiranje ili množenje, a takođe ne važi ni distributivni zakon.

Skup svih intervala $z(A)$, koji zavise od A, takvih da je $z(t)$ obična funkcija, tj. $z(t) \in \varphi(A)$, označićemo sa $J(A)$. Očigledno važi $J(A) \subset I(A)$, kao i tvrđenje da je $J(A)$ polje.

(H. Ratschek ([1]) je dokazao da to nije tačno, tj. da $J(A)$ nije polje.)

Vrlo je važna sledeća osobina, takozvani stav o umanjivanju. Neka su $X(A)$ i $Y(A)$ iz $J(A)$, tada važi

$$X(A) \triangle Y(A) \subset X(A) * Y(A).$$

Videli smo da u $I(A)$ ne važi distributivni zakon, dok u $J(A)$ važi. Međutim, važi sledeći mešoviti distributivni zakon: Neka $x(t) \in J(A)$ i $Y(A)$, $Z(A) \in I(A)$, tada važi

$$x(A) \odot (Y(A) \oplus Z(A)) = (x(A) \odot Y(A)) \oplus (x(A) \odot Z(A)).$$

Ovaj zakon nazivamo poludistributivnost.

4. Za intervalne funkcije proširena intervalna aritmetika daje tačne intervalne rezultate. Na računaru, međutim, ovu intervalnu aritmetiku je jedva moguće realizovati. Sa druge strane obična intervalna aritmetika u opštem slučaju daje grublje intervale nego prethodna, ali nju je lako realizovati na računaru. (N. Apostolatos, U. Kulisch, [**2**].)

(Uglavnom sve što je u ovom odeljku izneto može se pročitati i kod J. Wernera ([**1**]).)

1.4. Mašinska intervalna aritmetika

0. Rezultati navedeni u ovom odeljku takođe pripadaju N. Apostolatosu i U. Kulischu ([**1**]).

Ovde polazimo od date intervalne aritmetike (obične ili proširene), čije znake operacija obeležavamo sa $[+]$, $[-]$, $[\cdot]$, $[:]$, ili uopšte $[*]$, i dajemo najvažnije osobine odgovarajuće mašinske intervalne aritmetike.

1. U digitalnim računarima je danas uobičajeno predstavljanje brojeva u obliku mB^p, gde je B baza upotrebljenog brojnog sistema, m takozvana mantisa a p je eksponent. Eksponent se može kretati samo između dve unapred date, u opštem slučaju simetrične, granice $\pm E$. Broj cifara mantise je takođe ograničen. Odatle možemo zaključiti da se samo konačan podskup R_M skupa svih realnih brojeva $\mathbf{R}$ može bez zaokrugljivanja predstaviti na datoj mašini. Neka je najveći broj koji se može predstaviti na datoj mašini M_S, tada je, po pravilu, najmanji broj koji se može predstaviti na istoj mašini upravo $-M_S$. Ova dva broja igraju u R_M sličnu ulogu kao $\pm\infty$ u $\mathbf{R}$.

Neka je sada $I(\mathbf{R})$ skup intervala $A=[a, b]$ nad poljem realnih brojeva $\mathbf{R}$ sa aritmetičkim operacijama $[+]$, $[-]$, $[\cdot]$, $[:]$ i

$$I(R_M)=\{B=[c, d] \mid B \in I(\mathbf{R}),\ c, d \in R_M\} \subset I(\mathbf{R}),$$

tj. onaj podskup elemenata iz $I(\mathbf{R})$ koji se mogu predstaviti na mašini. Element iz $I(R_M)$ nazivamo mašinski interval. Sada svakom intervalu $A=[a, b] \in I(\mathbf{R})$ pridružujemo jednoznačno interval $A_M=[a_M, b_M] \in I(R_M)$, gde je

$$a_M=\max\{x \mid x \in R_M,\quad x \leqq \max(a, -M_S)\},$$

$$b_M=\min\{x \mid x \in R_M,\quad x \geqq \min(b, M_S)\}.$$

Ovo preslikavanje iz $I(\mathbf{R})$ u $I(R_M)$ ima sledeću osobinu: Svaki interval $A=[a, b] \in I(\mathbf{R})$, gde je $A \subset [-M_S, M_S]$, sadrži se u pridruženom mašinskom intervalu, tj. $A \subset [a_M, b_M] = A_M$, i A_M je najmanji mašinski interval koji sadrži interval A. Pored toga, za dva proizvoljna intervala $A, B \in I(\mathbf{R})$ iz $A \subseteq B$ sleduje $A_M \subseteq B_M$.

2. Koristeći spomenuto preslikavanje uvodimo sada aritmetiku za mašinske intervale. Pri tome ćemo koristiti oznaku $(*)$ za jednu od operacija $(+)$, $(-)$, $(\cdot)$, $(:)$. Neka je A, $B \in I(R_M) \subset I(\mathbf{R})$, $C = A [*] B$ i C_M intervalu C pridruženi mašinski interval. Definišemo operaciju $(*)$ sa

$$A (*) B = (A [*] B)_M = C_M.$$

Ovako uvedena aritmetika naziva se mašinska intervalna aritmetika.

Za intervalnu aritmetiku u $I(\mathbf{R})$ i mašinsku intervalnu aritmetiku u $I(R_M)$ važi takozvani stav o uvećanju: Ako A, $B \in I(\mathbf{R})$ i A, B, $A [*] B \subset [-M_S, M_S]$, tada važi

$$A [*] B \subset (A [*] B)_M \subset A_M (*) B_M.$$

Kako važi osobina $A [*] B \subset A_M (*) B_M$ za sve računske operacije, to mašinska intervalna aritmetika daje kod svih intervalnih izračunavanja uvek veće (ili jednake) intervalne rezultate nego proširena intervalna aritmetika.

Napomenimo još da obična i proširena intervalna aritmetika nisu homomorfne sa pridruženom intervalnom mašinskom aritmetikom.

O praktičnoj realizaciji mašinske intervalne aritmetike na računarima videti, na primer, H. W. Wippermann [1] i H. Christ [1].

3. U numeričkoj matematici se dokazuju konvergencije algoritama u prostorima koji nisu dati na računarima tako da se ponekad dešava da takozvani konvergentni algoritmi ne konvergiraju na računarima. Prema tome je od interesa proučiti matematičke osobine računara ili interpretirati sam računar kao apstraktni matematički prostor. Time se bavio U. Kulisch ([1], [2], [3], [4], [5], [6]) i, nešto docnije Ch. Ullrich ([1]). Pored ostalog, uveden je pojam kompletno uređenog prstenoida i nad njim se posmatra „intervalna" aritmetika.

1.5. Kvazilinearni prostori

0. Skup svih realnih intervala $I(\mathbf{R})$ sa operacijama sabiranje intervala i množenje intervala realnim brojem ne obrazuje linearni prostor, ali ima mnoge osobine linearnog prostora. Nazovimo ga jednostavno prostor $(I(\mathbf{R}), +)$ nad $\mathbf{R}$.

Kako $(I(\mathbf{R}), +)$ nad $\mathbf{R}$ poseduje neke osobine linearnog prostora, pokušaćemo da ga potopimo u neki linearni prostor ili ćemo uvesti neku generalizaciju linearnog prostora.

1. Posmatrajmo linearni prostor $(\mathbf{R}^2, +)$ nad $\mathbf{R}$, u kome su operacije definisane kao što je uobičajeno, tj.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$\alpha (a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

za svako $a, b, c, d, \alpha \in \mathbf{R}$. Prostor $(I(\mathbf{R}), +)$ nad $\mathbf{R}$ se ne može potopiti u $(\mathbf{R}^2, +)$ nad $\mathbf{R}$, jer ne važi, na primer,

$$(\alpha+\beta)\,C=\alpha\,C+\beta\,C$$

ako je $\alpha\beta<0$. Međutim, prostor $(I(\mathbf{R}), +)$ nad $\mathbf{R}^+$ se može potopiti u $(\mathbf{R}^2, +)$ nad $\mathbf{R}$.

Dobra strana ovog potapanja je u tome što se sada dobro istražena teorija linearnih prostora može preneti na intervalnu aritmetiku. Nedostatak potapanja leži u činjenici što linearni prostor ne odgovara suštini intervalne aritmetike (H. RATSCHEK, [2]).

To je, svakako, navelo O. MAYERA da uopšti pojam linearnog prostora, uvodeći takozvani kvazilinearni prostor.

2. Posmatramo poluuređeni linearni prostor B nad $\mathbf{R}$ (O. MAYER, [2]), pri čemu je poluporedak saglasan sa linearnim prostorom, tj. iz $a \leqq b$ sleduje $a+c \leqq b+c$ i $\alpha a \leqq \alpha b$ za svako $a, b, c \in A$ i svako $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \geqq 0$. Zatim posmatramo podskupove skupa B oblika $[a_1, a_2]=\{a \in B \mid a_1 \leqq a \leqq a_2\}$. Ovakve skupove ćemo obeležavati sa $A, B, \ldots$ i nazivati ih takođe intervalima. Skup svih intervala u B označićemo sa $I(B)$. Očigledno je $B \subset I(B)$.

U $I(B)$ definišemo jednakost, zbir i skalarno množenje sa:

(i) $A=B$ ako i samo ako su skupovi A i B identični,

(ii) $A+B=\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$,

(iii) $\alpha A=\{\alpha a \mid a \in A, \alpha \in \mathbf{R}\}$.

Kako je poluporedak saglasan sa operacijama u B, zaključujemo da operacije u $I(B)$ ne izvode iz $I(B)$. Što se tiče skalarnog množenja i ovde važi samo subdistributivni zakon

$$(\alpha+\beta)\,C \subseteq \alpha\,C+\beta\,C,$$

sa jednakošću ako i samo ako je $\alpha\beta \geqq 0$.

Sada definišemo pojam kvazilinearnog prostora (O. MAYER, [1], [2]): Skup Q se naziva kvazilinearni prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbf{R}$ ako je definisano sabiranje $+: Q \times Q \to Q$ i skalarno množenje $\cdot: \mathbf{R} \times Q \to Q$, tako da za svako $A, B, C \in Q$ i svako $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ važi:

(i) $A+B=B+A$,

(ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$,

(iii) $\alpha(B+C)=\alpha B+\alpha C$,

(iv) $(\alpha+\beta)\,C=\alpha\,C+\beta\,C$ za $\alpha\beta \geqq 0$,

(v) $\alpha(\beta C)=(\alpha\beta)\,C$,

(vi) postoji element $\theta \in Q$ takav da je $0A=\theta$ (nula),

(vii) $1 \cdot A=A$.

Ako bi (iv) važilo za svako $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, tada bi Q bio linearni prostor, jer se može dokazati da je nula θ neutralni element za sabiranje.

Jasno je da je svaki linearni prostor i kvazilinearni prostor. Prostori $I(\mathbf{R})$ i $I(B)$ nad $\mathbf{R}$ su kvazilinearni.

Na ovaj način smo dobili algebarsku strukturu koja „odgovara“ intervalnoj aritmetici. Međutim, kvazilinearni prostor obuhvata samo operacije sabiranje i skalarno množenje, dok oduzimanje, množenje i deljenje ne obuhvata, što mu je veliki nedostatak.

U kvazilinearni prostor se mogu, dalje, uvoditi različite metrike, što omogućava rešavanje sistema linearnih jednačina iterativnim metodama. Videti, na primer, O. MAYER ([3], [4], [5]) i G. ALEFELD ([2]).

3. W. HAHN ([1]) posmatra normirani linearni prostor E nad poljem K (realnih ili kompleksnih) brojeva. Ako $a \in E$ i $\alpha \in \mathbf{R}^+$, tada se $[a, \alpha] = \{b \in E \mid \|a-b\| \leq \alpha\}$ naziva E-interval. ($\|\cdot\|$ je norma u E.) Skup intervala $[a, \alpha]$, $a \in E$, $\alpha \in \mathbf{R}^+$ ćemo označiti sa $I(E, \|\cdot\|)$ i nazvati intervalni prostor nad E.

Dva intervala $[a, \alpha]$ i $[b, \beta]$ su jednaki ako i samo ako je $a = b$ i $\alpha = \beta$.

Ako je $I(E, \|\cdot\|)$ intervalni prostor nad normiranim prostorom E nad K, tada se preslikavanje

$$+ : I(E, \|\cdot\|) \times I(E, \|\cdot\|) \to I(E, \|\cdot\|)$$

definisano sa

$$[a, \alpha] + [b, \beta] = [a + b, \alpha + \beta]$$

naziva sabiranje intervala iz $I(E, \|\cdot\|)$. Preslikavanje

$$\cdot : K \times I(E, \|\cdot\|) \to I(E, \|\cdot\|)$$

dato sa

$$\varepsilon [a, \alpha] = [\varepsilon a, |\varepsilon| \alpha]$$

nazivamo množenje intervala skalarom iz K. Oduzimanje se definiše sa

$$[a, \alpha] - [b, \beta] = [a, \alpha] + (-1) [b, \beta].$$

Ako je $I(E, \|\cdot\|)$ intervalni prostor nad normiranim linearnim prostorom E nad K, tada je $I(E, \|\cdot\|)$ kvazilinearni prostor nad K.

H. FISCHER ([2]), ne citirajući W. HAHNa, daje slične rezultate.

4. M. KRACHT i G. SCHRÖDER ([1]) upoređuju intervalne kvazilinearne prostore koje su uveli O. MAYER i W. HAHN. Neka je $(E, \leq)$ poluuređeni linearni prostor, a $(E, \|\cdot\|)$ normirani linearni prostor. Ako relacija $\leq$ nije jednakost, onda se realni intervalni prostor $I(E, \|\cdot\|)$ može potopiti u realni intervalni prostor $I(E, \leq)$.

1.6. Kompleksna intervalna aritmetika

0. Cilj je ovog odeljka da ukaže na kakve se sve teškoće nailazi prilikom pokušaja uvođenja intervala i intervalne aritmetike u skup kompleksnih brojeva.

1. G. ALEFELD ([1]) razmatra specijalne skupove kompleksnih brojeva i operacije sa njima. Navodimo neke njegove rezultate.

Pod kompleksnim intervalom podrazumevamo skup kompleksnih brojeva

$$A = \{z = x_1 + i x_2 \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2\}, \qquad A_1, A_2 \in I(\mathbf{R}),$$

gde je $I(\mathbf{R})$ skup svih realnih intervala.

Ako su A_1 i A_2 elementi partitivnog skupa $P(\mathbf{R})$, tada skup

$$A=\{z=x_1+ix_2 \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2\},$$

nazivamo T-skupom (u originalu: T-Komplex).

Svaki kompleksni interval je T-skup. Skup svih kompleksnih intervala označavamo sa $I(\mathbf{C})$, a skup svih T-skupova sa $T(\mathbf{C})$. Očigledno važi $I(\mathbf{C}) \subset T(\mathbf{C}) \subset P(\mathbf{C})$. Kompleksni intervali su neposredna uopštenja realnih intervala.

Kako su kompleksni intervali i T-skupovi ustvari podskupovi skupa $P(\mathbf{C})$, za njih se definišu aritmetičke operacije kao što je uobičajeno. Ova aritmetika ima presudan nedostatak što skupovi $I(\mathbf{C})$ i $T(\mathbf{C})$ nisu zatvoreni u odnosu na ovu aritmetiku. Zato definišemo novi opštiji pojam.

Pod T-omotačem elemenata $A \in P(\mathbf{C})$ podrazumevamo presek svih elemenata iz $T(\mathbf{C})$ koji sadrže A. Označavamo ga sa $\tilde{A}$. Za svako $A \in P(\mathbf{C})$ važi $A \subseteq \tilde{A}$. Ako je A iz $T(\mathbf{C})$ tada je $\tilde{A}=A$.

Za elemente $A=\{z=x_1+ix_2 \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2\} \in T(\mathbf{C})$, $A_1,\ A_2 \in P(\mathbf{R})$ uvodimo oznaku $A=A_1+iA_2$ i nazivamo A_1 i A_2 redom realni i imaginarni deo T-skupa A.

Za dva elementa $A=A_1+iA_2$ i $B=B_1+iB_2$ iz $T(\mathbf{C})$ kažemo da su jednaki, u oznaci $A=B$, ako i samo ako važi $A_1=B_1$ i $A_2=B_2$.

Neka su $A=A_1+iA_2$ i $B=B_1+iB_2$ elementi iz $T(\mathbf{C})$. Tada pod zbirom, razlikom, proizvodom i količnikom elemenata A i B podrazumevamo sledeće elemente iz $T(\mathbf{C})$:

$$\begin{aligned}
&A \boxed{+} B=(A_1+B_1)+i(A_2+B_2),\\
&A \boxed{-} B=(A_1-B_1)+i(A_2-B_2),\\
&A \boxed{\cdot} B=(A_1B_1-A_2B_2)+i(A_1B_2+A_2B_1),\\
&A \boxed{:} B=(A_1B_1+A_2B_2):(B_1^2+B_2^2)+i(A_2B_1-A_1B_2):(B_1^2+B_2^2).
\end{aligned}$$

Kod definicije deljenja pretpostavlja se da $0 \notin B_1^2+B_2^2$. Ovde je $B_i^2=B_iB_i$ $(i=1,\ 2)$, tako da može $0 \in B_1^2+B_2^2$ iako $0 \notin B=B_1+iB_2$.

Ovim definicijama se četiri računske operacije $\boxed{*}$ sa elementima iz $T(\mathbf{C})$ svode na računske operacije $\boxed{*}$ sa realnim skupovima. Kompleksni brojevi $a=a_1+ia_2$ su izomorfni, u odnosu na uvedene operacije, sa elementima oblika $A=[a_1,\ a_1]+i[a_2,\ a_2]$. Zato možemo oba ova skupa međusobno identifikovati i pisati kratko $A=[a_1,\ a_1]+i[a_2,\ a_2]=a_1+ia_2=a$. Znači važi $\mathbf{C} \subset T(\mathbf{C})$.

Sada treba ispitati strukturu koju obrazuje skup $T(\mathbf{C})$ sa definisanim operacijama $\boxed{*}$. Važe sledeće osobine:

(i) Sabiranje i množenje su komutativni.

(ii) Sabiranje je asocijativno.

(iii) Množenje nije asocijativno već važi

$$\left.\begin{matrix}(A \boxed{\cdot} B) \boxed{\cdot} C\\ A \boxed{\cdot} (B \boxed{\cdot} C)\end{matrix}\right\} \subseteq m(A,\ B,\ C),$$

gde je

$$\begin{aligned}
m(A,\ B,\ C)=\ &A_1B_1C_1-A_1B_2C_2-A_2B_1C_2-A_2B_2C_1\\
&+i(A_1B_1C_2+A_1B_2C_1+A_2B_1C_1-A_2B_2C_2).
\end{aligned}$$

Ovu osobinu nazivamo subasocijativnost.

Ako važi $A=a$ ili $C=c$ ili oba istovremeno, tada je

$$a \boxed{\cdot} (B \boxed{\cdot} C) = m(a, B, C),$$

$$(A \boxed{\cdot} B) \boxed{\cdot} c = m(A, B, c),$$

$$(a \boxed{\cdot} B) \boxed{\cdot} c = a \boxed{\cdot} (B \boxed{\cdot} c) = m(a, B, c).$$

Ova osobina se naziva poluasocijativnost.

(iv) Važi subdistributivni zakon. Ako je $A=a$, tada važi jednakost

$$a \boxed{\cdot} (B \boxed{\cdot} C = a \boxed{\cdot} B \boxed{+} a \boxed{\cdot} C.$$

Ovu osobinu nazivamo poludistributivnost.

(v) Broj 0 je jednoznačno određeni neutralni element za sabiranje.

(vi) Broj 1 je jednoznačno određeni neutralni element za množenje.

(vii) Inverzni elementi za sabiranje i množenje postoje samo za elemente $A=a$; za množenje je još i $a \neq 0$.

(viii) Za osnovne računske operacije $\boxed{*}$ sa elementima iz $T(\mathbf{C})$ važi osobina podskupova, tj. iz $A_i \subseteq B_i$ $(i=1, 2)$ sleduje $A_1 \boxed{*} A_2 \subseteq B_1 \boxed{*} B_2$.

Neka je dat skup $A \in P(\mathbf{C})$. Tada nazivamo realne podskupove

$$A_R = \{x \mid (\exists y)\, z = x + iy \in A\} \in P(\mathbf{R}),$$

$$A_I = \{y \mid (\exists x)\, z = x + iy \in A\} \in P(\mathbf{R})$$

redom realnim i imaginarnim delom podskupa A.

Za proizvoljni podskup $A \in P(\mathbf{C})$ očigledno važi

$$\tilde{A} = A_R + iA_I.$$

Na osnovu toga imamo

$$\widetilde{A \pm B} = A \boxed{\pm} B,$$

$$\widetilde{A \cdot B} = A \boxed{\cdot} B,$$

$$\widetilde{A : B} \subseteq A \boxed{:} B.$$

Znači, operacije $\boxed{*}$ daju u slučaju sabiranja, oduzimanja i množenja dva elementa A, $B \in T(\mathbf{C})$ T-omotač skupa $A * B$. Međutim, u opštem slučaju je $A \boxed{:} B$ nadskup skupa $A : B$.

Za dva proizvoljna elementa A i B iz $P(\mathbf{C})$ važi

$$A * B \subseteq \tilde{A} * \tilde{B} \subseteq \widetilde{\tilde{A} * \tilde{B}} \subseteq \tilde{A} * \tilde{B}.$$

(Napomenimo da treći znak $\subseteq$ kod sabiranja, oduzimanja i množenja može biti zamenjen znakom $=$.)

Operacije $\boxed{+}$ i $\boxed{-}$ u $T(\mathbf{C})$ se poklapaju sa operacijama $+$ i $-$. Međutim, korišćenjem operacija $\boxed{\cdot}$ i $\boxed{:}$ dobijaju se u opštem slučaju nadskupovi, tj. važi

$$A \pm B = A \boxed{\pm} B,$$

$$A \cdot B \subseteq A \boxed{\cdot} B \quad \text{i} \quad A : B \subseteq A \boxed{:} B,$$

2. H. FISHER ([1]) uvodi više vrsta kompleksnih intervala i operacija sa njima.

Neka su $A, B \in P(\mathbf{C})$ i $*$ jedna od osnovnih računskih operacija. Tada definišemo $A * B = \{a * b \mid a \in A,\ b \in B\}$, pri čemu $A:B$ nije definisano ako $0 \in B$.

Da bi se izgradio intervalni račun za kompleksne brojeve potreban je jedan skup „intervala" $S \subset P(\mathbf{C})$ i operacije $\vartriangle$ u S sa osobinama

(i) za svako $X, Y \in S$ je $X * Y \subset X \vartriangle Y$,

(ii) za svako $X_i, Y_i \in S$ $(i = 1, 2)$ iz $X_i \subseteq Y_i$ sleduje $X_1 \vartriangle X_2 \subseteq Y_1 \vartriangle Y_2$,

gde se isključuje deljenje elementom iz S koji sadrži 0. Sistem $(S, +, -, \cdot, :)$ nazivamo „kompleksna intervalna aritmetika" (KIA).

Neka je $I_0(\mathbf{C})$ skup zatvorenih intervala realnih brojeva. Sistem $(I_0(\mathbf{C}), +, -, \cdot, :)$ je KIA.

Neka su $X_R, X_I \in I_0(\mathbf{C})$. Skup $X_R + iX_I$ naziva se interval prve vrste (pravougaonik sa stranicama paralelnim osama). Skup svih intervala prve vrste označavamo sa $I_1(\mathbf{C})$. Sistem $(I_1(\mathbf{C}), +, -, \cdot, :)$ nije KIA, jer za $X, Y \in I_1(\mathbf{C})$ u opštem slučaju $XY \notin I_1(\mathbf{C})$ i $X : Y \notin I_1(\mathbf{C})$.

Uvedimo skup $B(\mathbf{C}) = \{T \mid \emptyset \neq T \subset \mathbf{C},\ T$ je povezan i ograničen$\}$. Za $T \in B(\mathbf{C})$ neka je $\alpha(T) = \bigcap R\ (T \subset R \in I_1(\mathbf{C}))$. Sada definišemo nove operacije pomoću α, naime, za $X, Y \in I_1(\mathbf{C})$ neka je

$$X(\cdot, \alpha)\, Y = \alpha(XY),$$

$$X(:, \alpha)\, Y = \alpha(X : Y) \quad \text{u slučaju} \quad 0 \notin Y.$$

Sistem $(I_1(\mathbf{C}), +, -, (\cdot, \alpha), (:, \alpha))$ je KIA koja, međutim, do sada nije upotrebljavana jer se operacija deljenja ne može lako verifikovati. Sistem $(I_1(\mathbf{C}), +, -, (\cdot, \alpha), (:, A))$ sa deljenjem $(:, A)$ koje je dao G. ALEFELD ([1]) za intervale prve vrste je takođe KIA.

Druga jedna KIA je sistem $(I_1(\mathbf{C}), +, -, (\cdot, \alpha), (:, R))$ sa deljenjem koje su definisali J. ROKNE i P. LANCASTER ([1]) za intervale $X, Y \in I_1(\mathbf{C})$, $0 \notin Y$, sa

$$X(:, R)\, Y = X(\cdot, \alpha)\,(\alpha(1 : Y)).$$

Označimo sa K skup $\{z \mid z \in \mathbf{C},\ |z| \leqq 1\}$. Neka je $x_m \in \mathbf{C}$ i $x_r \in \mathbf{R}^+$. Skup $x_m + x_r K$ nazivamo interval druge vrste (kružni disk). Skup svih intervala druge vrste označavamo sa $I_2(\mathbf{C})$. Sistem $(I_2(\mathbf{C}), +, -, \cdot, :)$ nije KIA, jer za $X, Y \in I_2(\mathbf{C})$ u opštem slučaju $XY \notin I_2(\mathbf{C})$ i $X : Y \notin I_2(\mathbf{C})$. Koristeći, međutim, množenje $(\cdot, G)$ koje su uveli I. GARGANTINI i P. HENRICI ([1]), tj.

$$X(\cdot, G)\, Y = x_m y_m + (|x_m|\, y_r + |y_m|\, x_r + x_r y_r)\, K$$

i stavljajući

$$X(:, F)\, Y = X(\cdot, G)(1 : Y)$$

dobijamo sistem $(I_2(\mathbf{C}), +, -, (\cdot, G), (:, F))$ koji je KIA.

Neka su X_B, $X_W \in I_0(\mathbf{C})$ i $x \geqq 0$ za svako $x \in X_B$. Skup $X_B \exp(iX_W)$ nazivamo interval treće vrste (kružni sektor). Skup svih intervala treće vrste označavamo sa $I_3(\mathbf{C})$. Sistem $(I_3(\mathbf{C}), +, -, \cdot, :)$ nije KIA, jer za $X, Y \in I_3(\mathbf{C})$ u opštem slučaju $X \pm Y \notin I_3(\mathbf{C})$.

Za $T \in B(\mathbf{C})$ neka je $\gamma(T) = \bigcap R \, (T \subset R \in I_3(\mathbf{C}))$. Pomoću γ definišemo nove operacije sa

$$X(+, \gamma)\, Y = \gamma(X+Y),$$

$$X(-, \gamma)\, Y = \gamma(X-Y).$$

Sistem $(I_3(\mathbf{C}), (+, \gamma), (-, \gamma), \cdot, :)$ je KIA. Ako se u njemu operacije $(+, \gamma)$ i $(-, \gamma)$ zamene operacijama $(+, N)$ i $(-, N)$ definisanim sa

$$X(+, N)\, Y = \gamma\big(\alpha(X) + \alpha(Y)\big),$$

$$X(-, N)\, Y = \gamma\big(\alpha(X) - \alpha(Y)\big)$$

takođe se dobija KIA.

2. RAZLIČITI NAČINI PREDSTAVLJANJA INTERVALA

2.1 Intervalne funkcionele i veze između njih

0. Pravila za računanje sa intervalima nisu jednostavna. Međutim, predstavljajući intervale na različite načine, mogu se neka od tih pravila uprostiti. To i jeste cilj ovog odeljka.

1. U odeljku 1.2 dali smo definiciju osnovnih računskih operacija sa intervalima pomoću (1), naime

$$(1)\quad [a_1, a_2] * [b_1, b_2]$$
$$= [\min (a_1 * b_1, a_1 * b_2, a_2 * b_1, a_2 * b_2), \max (a_1 * b_1\ a_1 * b_2, a_2 * b_1, a_2 * b_2)].$$

Na ovakav način data pravila za računanje sa intervalima nisu pogodna za praktično računanje. Zato ćemo razviti desne strane jednakosti (1), i tako dobijamo sledeća podesnija pravila:

(i) $a+b=[a_1+b_1, a_2+b_2]$;

(ii) $a-b=[a_1-b_2, a_2-b_1]$;

(iii)
$$\begin{aligned} ab &= [a_1 b_1, a_2 b_2], && a, b \in N^+, \\ &= [a_1 b_2, a_2 b_1], && a \in N^-, b \in N^+, \\ &= [a_2 b_2, a_1 b_1], && a, b \in N^-, \\ &= [a_1 b_2, a_2 b_2], && a \in Z^\circ, b \in N^+, \\ &= [a_2 b_1, a_1 b_1], && a \in Z^\circ, b \in N^-, \\ &= [\min (a_1 b_2, a_2 b_1)\ \max (a_1 b_1, a_2 b_2)], && a, b \in Z^\circ; \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} a:b &= [a_1 : b_2, a_2 : b_1], && a, b \in N^+, \\ &= [a_1 : b_1, a_2 : b_2], && a \in N^-, b \in N^+, \\ &= [a_2 : b_2, a_1 : b_1], && a \in N^+, b \in N^-, \\ &= [a_2 : b_1, a_1 : b_2], && a, b \in N^-, \\ &= [a_1 : b_1, a_2 : b_1], && a \in Z^\circ, b \in N^+, \\ &= [a_2 : b_2, a_1 : b_2], && a \in Z^\circ, b \in N^-. \end{aligned}$$

Ako $b \in Z^\circ$ onda, naravno, količnik $a:b$ nije definisan.

Specijalno je

$$\alpha[a_1, a_2] = [\alpha a_1, \alpha a_2] \quad \text{za } \alpha \geqq 0,$$

$$= [\alpha a_2, \alpha a_1] \quad \text{za } \alpha \leqq 0;$$

$$\alpha : [a_1, a_2] = [\alpha : a_2, \alpha : a_1] \quad \text{za } \alpha \geqq 0,$$

$$= [\alpha : a_1, \alpha : a_2] \quad \text{za } \alpha \leqq 0.$$

Nije teško pokazati da je

$$a - b = a + (-1)\, b \quad \text{i} \quad a : b = a \frac{1}{b},$$

gde je $\frac{1}{b} = [1 : b_2, 1 : b_1]$ ako je $b = [b_1, b_2]$.

Primećujemo da su pravila za sabiranje i oduzimanje jednostavna, dok su za množenje i deljenje prilično komplikovana.

2. Neka je $a = [a_1, a_2]$. Uvodimo sledeće funkcionele:

(2) $$s(a) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2),$$

(3) $$r(a) = \frac{1}{2}(a_2 - a_1),$$

(4) $$p(a) = \max(|a_1|, |a_2|) \operatorname{sgn}(a),$$

gde je $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn} s(a)$ za $s(a) \neq 0$ i $\operatorname{sgn}(a) = 1$ za $s(a) = 0$,

(5) $$t(a) = \min(|a_1|, |a_2|) \operatorname{sgn}(a_1 a_2),$$

(6) $$q(a) = t(a)/|p(a)|.$$

Iz (4) sleduje $\operatorname{sgn} p(a) = \operatorname{sgn}(a)$.

(Funkcionele (4) i (6) prvi je počeo da koristi H. RATSCHEK.)

Koristeći ove funkcionele možemo svaki nenula interval a napisati na sledeća dva načina:

(7) $$a = s(a) + r(a)[-1, 1],$$

(8) $$a = p(a)[q(a), 1],$$

gde je $|q(a)| \leqq 1$ i $p(a) \neq 0$. Kako je $s(0) = r(0) = 0$, takođe se i interval $0 = [0, 0]$ može napisati u obliku (7). Iz (4), (5) i (6) sleduje $p(0) = 0$, $t(0) = 0$, ali je $q(0)$ neodređeno. Kako $0 \in \mathbf{R}^\circ$, dogovorićemo se da bude $q(0) = 1$, jer je za svako $a \in \mathbf{R}$ $q(a) = 1$.

Iz (2) i (3) dobijamo

(9) $$a_1 = s(a) - r(a), \quad a_2 = s(a) + r(a),$$

a iz (4) i (5)

$$a_1 = t(a),\quad a_2 = p(a) \quad \text{za} \quad \operatorname{sgn}(a) = 1,$$
(10)
$$a_1 = p(a),\quad a_2 = -t(a) \quad \text{za} \quad \operatorname{sgn}(a) = -1.$$

Lako se dokazuju jednakosti

$$s(\lambda a + \mu b) = \lambda s(a) + \mu s(b),$$
(11)
$$r(\lambda a + \mu b) = |\lambda| r(a) + |\mu| r(b),$$

i

$$p(ab) = p(a)p(b),$$

(12) $$q(ab) = q(a)q(b), \quad t(ab) = t(a)t(b) \quad \text{za} \quad q(a),\ q(b) > 0,$$
$$= q(a), \qquad = t(a)|p(b)| \quad \text{za} \quad q(a) \leqq 0 \ \text{ i } \ q(a) \leqq q(b).$$

Sada treba naći uzajamni odnos funkcionela s, r sa jedne, i p, q, t sa druge strane. Neka je $a = p(a)[q(a), 1]$, $p(a) \neq 0$, proizvoljni interval, tada je

$$a = [p(a)q(a),\ p(a)] \quad \text{za} \quad p(a) > 0$$

i

$$a = [p(a),\ p(a)q(a)] \quad \text{za} \quad p(a) < 0.$$

Odavde dobijamo

$$s(a) = \frac{1}{2} p(a)\big(1 + q(a)\big) \quad \text{za} \quad p(a) \neq 0,$$

$$r(a) = \frac{1}{2} p(a)\big(q(a) - 1\big) \quad \text{za} \quad p(a) < 0$$

i

$$r(a) = \frac{1}{2} p(a)\big(1 - q(a)\big) \quad \text{za} \quad p(a) > 0.$$

Znači

$$s(a) = \frac{1}{2} p(a)\big(1 + q(a)\big) = \frac{1}{2}\big(p(a) + t(a)\operatorname{sgn}(a)\big),$$
(13)
$$r(a) = \frac{1}{2} |p(a)|\big(1 - q(a)\big) = \frac{1}{2}\big(|p(a)| - t(a)\big).$$

Iz (13) neposredno proizilazi

$$|p(a)| = |s(a)| + r(a) \quad \text{ili} \quad p(a) = s(a) + r(a)\operatorname{sgn}(a),$$
(14)
$$t(a) = |s(a)| - r(a).$$

3. Umesto (7) i (8) ubuduće ćemo često pisati

$$a = \big(s(a),\ r(a),\ +\big)$$

i

$$a = \big(p(a),\ q(a),\ \cdot\big).$$

Koristeći jednakosti (11) i (12), pravila za sabiranje i množenje intervala dobijaju drugačiji oblik. Naime, imamo

$$a+b=\big(s(a)+s(b),\ \ r(a)+r(b),\ +\big);$$

$$\begin{aligned} ab &= \big(p(a)\,p(b),\ \ q(a)\,q(b),\ \cdot\big) \ \text{ za } \ q(a),\ q(b)>0, \\ &= \big(p(a)\,p(b),\ \min\big(q(a),\ q(b)\big),\ \cdot\big) \ \text{ za } \ q(a)\leqq 0 \ \text{ ili } \ q(b)\leqq 0. \end{aligned}$$

Tek se sada može uočiti značaj uvođenja gornjih funkcionela, posebno funkcionela p i q, jer se sada pravila za množenje intervala svode na samo dva slučaja.

Interesantno je i korisno odrediti $s(ab)$, $r(ab)$, $p(a+b)$ i $t(a+b)$.

Teorema 2.1. (i) *Ako je* $q(a)$, $q(b)>0$, *tada je*

$$s(ab)=s(a)\,s(b)+r(a)\,r(b)\operatorname{sgn}(ab),$$

$$r(ab)=|s(a)|\,r(b)+|s(b)|\,r(a);$$

(ii) *Ako je, pak,* $q(a)=\min\big(q(a),\ q(b)\big)\leqq 0$, *onda je*

$$s(ab)=\big(s(b)+r(b)\operatorname{sgn}(b)\big)\,s(a),$$

$$r(ab)=\big(|s(b)|+r(b)\big)\,r(a).$$

Dokaz. (i) Imamo redom, za $q(a)$, $q(b)>0$,

$$\begin{aligned} s(ab) &= \frac{1}{2}\big(p(ab)+t(ab)\operatorname{sgn}(ab)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(p(a)\,p(b)+t(a)\,t(b)\operatorname{sgn}(ab)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big\{\big(s(a)+r(a)\operatorname{sgn}(a)\big)\big(s(b)+r(b)\operatorname{sgn}(b)\big) \\ &\quad+\big(s(a)\operatorname{sgn}(a)-r(a)\big)\big(s(b)\operatorname{sgn}(b)-r(b)\big)\operatorname{sgn}(ab)\big\} \\ &= s(a)(b)+r(a)\,r(b)\operatorname{sgn}(ab), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(ab) &= \frac{1}{2}\big(|p(ab)|-t(ab)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(|p(a)|\,|p(b)|-t(a)\,t(b)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big\{\big(|s(a)|+r(a)\big)\big(|s(b)|+r(b)\big) \\ &\qquad\qquad -\big(|s(a)|-r(a)\big)\big(|s(b)|-r(b)\big)\big\} \\ &= |s(a)|\,r(b)+|s(b)|\,r(a). \end{aligned}$$

(ii) Slično je, za $q(a) \leqq 0$ i $q(a) \leqq q(b)$

$$
\begin{aligned}
s(ab) &= \frac{1}{2}\big(p(ab) + t(ab)\operatorname{sgn}(ab)\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(p(a)\,p(b) + t(a)\,p(b)\operatorname{sgn}(a)\big)\\
&= \frac{1}{2}\,p(b)\big(p(a) + t(a)\operatorname{sgn}(a)\big)\\
&= \big(s(b) + r(b)\operatorname{sgn}(b)\big)\,s(a),\\
r(ab) &= \frac{1}{2}\big(|p(ab)| - t(ab)\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(|p(a)|\,|p(b)| - t(a)\,|p(b)|\big)\\
&= \frac{1}{2}\,|p(b)|\big(|p(a)| - t(a)\big)\\
&= \big(|s(b)| + r(b)\big)\,r(a). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nismo se dosad susreli sa jednakostima iz Teoreme 1.1; ipak, mogu se naći sledeće nejednakosti

$$|p(a)|\,r(b) \leqq r(ab) \leqq |p(a)|\,r(b) + |p(b)|\,r(a)$$

(G. ALEFELD, J. HERZBERGER, O. MAYER, [1]).

Teorema 2.2. (i) *Ako je* $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$, *tada je*

$$
\begin{aligned}
p(a+b) &= p(a) + p(b),\\
t(a+b) &= t(a) + t(b);
\end{aligned}
$$

(ii) *Ako je* $\operatorname{sgn}(a+b) = \operatorname{sgn}(a) = -\operatorname{sgn}(b)$, *onda imamo*

$$
\begin{aligned}
p(a+b) &= p(a) + t(b)\operatorname{sgn}(b),\\
t(a+b) &= t(a) - |p(b)|.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Iz (14) neposredno dobijamo

$$
\begin{aligned}
p(a+b) &= s(a+b) + r(a+b)\operatorname{sgn}(a+b),\\
t(a+b) &= |s(a+b)| - r(a+b).
\end{aligned}
$$

Na osnovu toga, ako je (i) $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$ imamo redom

$$
\begin{aligned}
p(a+b) &= s(a) + s(b) + r(a)\operatorname{sgn}(a) + r(b)\operatorname{sgn}(b)\\
&= p(a) + p(b),\\
t(a+b) &= |s(a)| + |s(b)| - r(a) - r(b)\\
&= t(a) + t(b);
\end{aligned}
$$

(ii) $\operatorname{sgn}(a+b)=\operatorname{sgn}(a)=-\operatorname{sgn}(b)$, tada je

$$\begin{aligned} p(a+b) &= s(a)+s(b)+r(a)\operatorname{sgn}(a)-r(b)\operatorname{sgn}(b) \\ &= p(a)+t(b)\operatorname{sgn}(b), \\ t(a+b) &= s(a)\operatorname{sgn}(a)-s(b)\operatorname{sgn}(b)-r(a)-r(b) \\ &= t(a)-p(b)\operatorname{sgn}(b). \end{aligned}$$

2.2. Primena funkcionela kod subdistributivnosti

0. Poznato je da u intervalnoj aritmetici ne važi distributivni zakon. Umesto distributivnog zakona važi opštiji, takozvani subdistributivni zakon (R. E. Moore, [1]):

Za proizvoljne intervale a, b, c važi

$$a(b+c)\subseteq ab+ac. \tag{15}$$

O. Spaniol u [1] i H. Ratschek u [5] su ispitivali u kojim slučajevima važi jednakost

$$a(b+c)=ab+ac. \tag{16}$$

U ovom odeljku ćemo odrediti interval x takav da je

$$a(b+c)+x=ab+ac. \tag{17}$$

Ş. Berti u [4] je odredio x u nekim jednostavnim sluačajevima.

1. H. Ratschek je dokazao sledeći rezultat:

Jednakost (16) važi ako i samo ako je

(i) $q(a)=1$;

ili (ii) $0\leqq q(a)<1$, a) $q(b),\ q(c)\geqq 0,\ p(b)p(c)\geqq 0$,

b) $q(b),\ q(c)\leqq 0$;

ili (iii) $q(a)<0$, a) $q(b),\ q(c)\geqq q(a),\ p(b)p(c)\geqq 0$,

b) $q(b),\ q(c)\leqq q(a)$.

Sledećom teoremom se uopštava gornji rezultat.

Teorema 2.3. *Interval x takav da važi* (17) *određen je sa:*

(i) *Ako je $q(a)>0$, onda je*

1° $r(x)=r(a)\{|s(b)|+|s(c)|-|s(b+c)|\}$,

$s(x)=r(a)\{r(b)\operatorname{sgn}(b)+r(c)\operatorname{sgn}(c)-r(b+c)\operatorname{sgn}(b+c)\}$, *za* $q(b),\ q(c),\ q(b+c)>0;$

$2^\circ\ r(x)=r(a)\{|s(b)|+r(c)-|s(b+c)|\},$

$s(x)=r(a)\{r(b)\operatorname{sgn}(b)+s(c)-r(b+c)\operatorname{sgn}(b+c)\},$

za $q(b),\ q(b+c)>0$ *i* $q(c)\leqq 0;$

$3^\circ\ r(x)=r(a)\{|s(b)|+|s(c)|-r(b+c)\},$

$s(x)=r(a)\{r(b)\operatorname{sgn}(b)+r(c)\operatorname{sgn}(c)-s(b+c)\},$

za $q(b),\ q(c)>0$ *i* $q(b+c)\leqq 0;$

$4^\circ\ r(x)=r(a)\{|s(b)|-r(b)\},$

$s(x)=r(a)\{r(b)\operatorname{sgn}(b)-s(b)\},$

za $q(b)>0$ *i* $q(c),\ q(b+c)\leqq 0;$

(ii) *Ako je* $q(a)\leqq 0$, *onda je*

$1^\circ\ r(x)=r(a)\{|s(b)|+|s(c)|-|s(b+c)|\},$

$s(x)=s(a)\{r(b)\operatorname{sgn}(b)+r(c)\operatorname{sgn}(c)-r(b+c)\operatorname{sgn}(b+c)\},$

za $q(b),\ q(c),\ q(b+c)\geqq q(a);$

$2^\circ\ r(x)=r(a)\{|s(b)|-|s(b+c)|\}+s(a)\,r(c),$

$s(x)=r(a)\,s(c)+s(a)\{r(b)\operatorname{sgn}(b)-r(b+c)\operatorname{sgn}(b+c)\},$

za $q(b),\ q(b+c)\geqq q(a)$ *i* $q(c)<q(a);$

$3^\circ\ r(x)=r(a)\{|s(b)|+|s(c)|\}-s(a)\{r(b)+r(c)\},$

$s(x)=s(a)\{r(b)\operatorname{sgn}(b)+r(c)\operatorname{sgn}(c)\}-r(a)\{s(b)+s(c)\},$

za $q(b),\ q(c)\geqq q(a)$ *i* $q(b+c)<q(a);$

$4^\circ\ r(x)=r(a)\,|s(b)|-s(a)\,r(b),$

$s(x)=r(b)\,s(a)\operatorname{sgn}(b)-r(a)\,s(b),$

za $q(b)\geqq q(a)$ *i* $q(c),\ q(b+c)<q(a).$

Dokaz. Iz $a(b+c)+x=ab+ac$ dobijamo

$$r(x)=r(ab)+r(ac)-r\big(a(b+c)\big),$$

$$s(x)=s(ab)+s(ac)-s\big(a(b+c)\big).$$

Neka je $q(a)>0$, $\operatorname{sgn}(a)=1$, $q(b)$, $q(c)$, $q(b+c)>0$. Tada je, na osnovu teoreme 1.1

$$\begin{aligned} r(x) &= s(a)\, r(b) + r(a)\,|\,s(b)\,| + s(a)\, r(c) + r(a)\,|\,s(c)\,| \\ &\quad - s(a)\, r(b+c) - r(a)\,|\,s(b+c)\,| \\ &= r(a)\,\{|\,s(b)\,| + |s(c)| + |\,s(b+c)\,|\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(x) &= s(a)\, s(b) + r(a)\, r(b) \operatorname{sgn}(b) + s(a)\, s(b) + r(a)\, r(c) \operatorname{sgn}(c) \\ &\quad - s(a)\, s(b+c) - r(a)\, r(b+c) \operatorname{sgn}(b+c) \\ &= r(a)\,\{r(b) \operatorname{sgn}(b) + r(c) \operatorname{sgn}(c) - r(b+c) \operatorname{sgn}(b+c)\}. \end{aligned}$$

Ako je $\operatorname{sgn}(a)=-1$ rezultat je isti.

Analogno se dokazuju ostali slučajevi. ∎

Neke nejednakosti, koje sleduju iz dokazanih jednakosti, mogu se naći kod R. Krawczyka ([**1**]) i G. Alefelda i J. Herzbergera ([**1**]).

3. KOMUTATIVNE POLUGRUPE

3.1. Neke klase komutativnih polugrupa

0. Ovde ćemo razmatrati jednu specijalnu klasu komutativnih polugrupa i neka njene podklase. Pored toga proučavaćemo i direktni proizvod grupe i polugrupe iz spomenute klase.

1. Neka su $E(*)$ i $F(*)$ dve komutativne polugrupe. Ako je $E \cap F = \emptyset$ i $\overline{H} = E \cup F$, definišući množenje „$\cdot$“ u $\overline{H}$ sa

$$a \cdot b = \begin{cases} a * b & \text{ako } a, b \in E \text{ ili } a, b \in F, \\ a & \text{ako } a \in E, b \in F, \\ b & \text{ako } a \in F, b \in E, \end{cases}$$

dobijamo komutativnu polugrupu $\overline{H}(\cdot)$.

(Ubuduće ćemo uvek izostavljati znak operacije ako ne može doći do zabune.)

Specijalno, ako je E komutativna polugrupa idempotenata a F grupa, označićemo polugrupu $\overline{H}$ jednostavno sa H. Za polugrupu sa gornjom osobinom rećićemo da je tipa $\overline{H}$ (odnosno tipa H).

Teorema 3.1. *Polugrupa $\overline{H}$ je regularna ako i samo ako su polugrupe E i F regularne.*

Dokaz. Ako je a regularan element polugrupe F, onda je, očigledno, a regularan element i u $\overline{H}$.

Obrnuto, neka je a regularan element u $\overline{H}$. Tada postoji element $x \in \overline{H}$ takav da važi $axa = a$. Neka je, najpre, $a \in F$ i pretpostavimo da $x \in E$, tada iz jednakosti $axa = a$ sleduje $x = a$, što je nemoguće. Prema tome, mora x da bude element skupa F. Odavde sleduje da je element $a \in F$, koji je regularan u $\overline{H}$, regularan i u F. Ako je, sada, $a \in E$ i $x \in F$, onda je $axa = a$ ekvivalentno sa $aa = a$, tj. važi ako i samo ako je a idempotent. Međutim, svaki idempotent je regularan element, te je a regularan element i u E. Ako a nije idempotent, onda mora x da bude element iz E, te je a regularan element u E. Znači, ako je $a \in E$ regularan u $\overline{H}$ biće regularan i u E. ∎

Teorema 3.2. *Polugrupa $\bar{H}$ je inverzna ako i samo ako su polugrupe E i F inverzne.*

Dokaz. U dokazu prethodne teoreme videli smo da je jednačina $axa=a$ nemoguća za $a \in E$, $x \in F$. Prema tome, ako je x rešenje sistema jednačina $axa=a$, $xax=x$ u polugrupi $\bar{H}$, onda je x rešenje istog sistema u polugrupi E ili polugrupi F, i obrnuto. Znači, ako je $x \in \bar{H}$ regularno-konjugovani sa $a \in \bar{H}$, biće $x \in E$ regularno-konjugovani sa $a \in E$ (odnosno $x \in F$ sa $a \in F$), i obrnuto. Odavde neposredno sleduje tvrđenje teoreme. ∎

Posledica 3.2.1. *Polugrupa H je inverzna polugrupa.*

To je očigledno, jer su komutativna polugrupa idempotenata i grupa inverzne polugrupe.

Teorema 3.3. *Označimo sa $\leqq'$ prirodno delimično uređenje na inverznim polugrupama E i F. Ako je $\leqq$ prirodno delimično uređenje na inverznoj polugrupi $\bar{H}$, onda je $a \leqq b$ ako i samo ako je:* (i) *$a \leqq' b$ gde $a, b \in E$ ili $a, b \in F$, ili* (ii) *$a \in E$ je idempotent i $b \in F$.*

Dokaz. Da je $a \leqq b$ ekvivalentno sa $a \leqq' b$ ako $a, b \in E$ ili $a, b \in F$ je očigledno, jer je $ab^{-1}=aa^{-1}$ ekvivalentno sa $a*b^{-1}=a*a^{-1}$. Neka je sada $a \in E$ i $b \in F$, tada je $a \leqq b \Leftrightarrow ab^{-1}=aa^{-1} \Leftrightarrow a=aa^{-1} \Leftrightarrow a=a*a^{-1}$. Kako je $a*a^{-1}$ idempotent, dobijamo da je $a \leqq b$ za $a \in E$, $b \in F$ ako i samo ako je a idempotent. ∎

Posledica 3.3.1. *U polugrupi H je $a \leqq b$ ako i samo ako je $a=b$ za $a, b \in F$ ili $ab=a$ za $a \in E$, $b \in H$.*

To je jasno, jer se prirodno delimično uređenje na inverznoj polugrupi E poklapa sa prirodnim delimičnim uređenjem na komutativnoj polugrupi idempotenata E, dok se u grupi F svodi na jednakost.

Teorema 3.4. *Ako $a \mid b$ u E ili u F, onda $a \mid b$ i u $\bar{H}$. Za svako $f \in F$ i svako $e \in E$ važi $f \mid e$. Ne postoji element $e \in E$ takav da $e \mid f$ za neko $f \in F$.*

Ako je x inverzni za a u odnosu na b u polugrupi E ili polugrupi F, onda je x inverzni za a u odnosu na b i u polugrupi $\bar{H}$. Element $x \in \bar{H}$ je inverzni za $a \in F$ u odnosu na $b \in E$ ako i samo ako je $x=b$.

Dokaz. Ako je $a*x=b$, onda je i $ax=b$. Prema tome, ako $a \mid b$ i x je inverzni za a u odnosu na b u polugrupama E ili F, tada ista tvrđenja važe za elemente a, b, x i u polugrupi $\bar{H}$. Kako je svaki element iz F jedinica za svaki element iz E, odnosno svaki element iz E nula za svaki element iz F, znači da svaki element iz F deli svaki element iz E a nijedan element iz E ne deli neki element iz F. Jednačina $ax=b$, $a \in F$, $b \in E$, je zadovoljena samo ako je $x=b$, čime je dokazan i poslednji deo teoreme. ∎

Posledica 3.4.1. *Ako je F polugrupa sa jedinicom* 1, *onda je* 1 *jedinica polugrupe $\bar{H}$. Slično, ako je E polugrupa sa nulom* 0, *onda je* 0 *nula polugrupe $\bar{H}$.*

Posledica 3.4.2. *U polugrupi H element $a \in E$ je delitelj svakog elementa $b \in E$ takvog da je $b \leqq a$. Inverzni element za a u odnosu na b je element:*

(i) $a^{-1}b, \quad a, b \in F,$

(ii) $b, \quad b \in E, \ b \leqq a,$

(iii) $x, \quad a = b \in E, \ b \leqq x.$

Posledica 3.4.3. *U polugrupi H jedinica svakog elementa iz F je jedino jedinica 1 grupe F. Međutim, jedinica elementa $a \in E$ je svaki element $b \in H$ takav da je $a \leqq b$.*

Teorema 3.5. *Ako su E i F separativne polugrupe, onda je i polugrupa $\overline{H}$ separativan, i obrnuto.*

Tvrđenje je očigledno na osnovu definicije separativne polugrupe i množenja u $\overline{H}$.

Teorema 3.6. *Element $x \in \overline{H}$ je skrativ u $\overline{H}$ ako i samo ako je skrativ u F. Nijedan element iz E nije skrativ u $\overline{H}$.*

Dokaz. Element $x \in E$ ne može biti skrativ element u $\overline{H}$, jer je, na primer, jednakost $ax = bx$ ispunjena za $a \neq b$, $a, b \in F$.

Neka je $x \in F$ skrativ element u $\overline{H}$, tj. neka iz $ax = bx$ sleduje $a = b$ za svako $a, b \in \overline{H}$; onda će tim pre iz $ax = bx$, što je ekvivalentno sa $a * x = b * x$, sledovati $a = b$ za svako a, $b \in F$, tj. element x će biti skrativ i u F. Obrnuto, ako je x skrativ element u F, onda će iz $ax = bx$ sledovati $a = b$ za svako a, $b \in F$. Kako je, pored toga, $ax = bx$ ekvivalentno sa $a = b$ za svako a, $b \in E$, znači da iz $ax = bx$ sleduje $a = b$ za svako a, $b \in \overline{H}$. Prema tome, element $x \in F$ je skrativ element u $\overline{H}$. ∎

2. Postoji jednostavna veza između ideala polugrupa E i $\overline{H}$.

Teorema 3.7. *Svaki ideal polugrupe E je sopstveni ideal polugrupe $\overline{H}$.*

Dokaz. Za proizvoljni podskup N polugrupe E uvek važi $NE \subseteq N\overline{H}$. Prema tome, ako je T ideal polugrupe E, onda je, zbog $T \subseteq TE \subseteq T\overline{H}$, skup T ideal i polugrupe $\overline{H}$. ∎

Teorema 3.8. *Polugrupa E je maksimalni ideal polugrupe H.*

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi skup E je ideal polugrupe H. Kako je faktor polugrupa Reesa H/E grupa sa nulom $0'$ (naime $H/E = F \cup \{0'\}$), gde je $0'$ spolja pridodata nula, a samim tim i 0-prosta polugrupa, to je polugrupa E maksimalni ideal polugrupe H. ∎

Direktna posledica poslednjih dveju teorema je sledeće tvrđenje.

Teorema 3.9. *Svaki ideal polugrupe E je sopstveni ideal polugrupe H, i obrnuto.*

Odredimo sve ideale inverzne polugrupe H. Odredićemo najpre sve glavne ideale polugrupe E. To su skupovi $T(a) = aE = \{x \mid x \in E, x \leqq a\}$. Dva različita elementa a, $b \in E$ određuju različite glavne ideale, te je svaki jednoelementni podskup polugrupe E idealni sloj.

Neka je $N \subseteq E$. Ideal određen skupom N, tj. skup NE, jednak je uniji glavnih ideala $a\bar{E} = T(a)\,(a \in N)$. Ako skup N ima supremum a, tj. $a = \sup N$, onda ćemo sa $K(a)$ označiti ideal NE. Ukoliko je $a = \sup N = \max N$, tj. skup N ima najveći element (maksimum), onda je $K(a) = T(a)$ glavni ideal polugrupe E određen maksimumom skupa N. (Ubuduće ćemo sa $K(a)$ označavati samo ideal određen skupom N koji nema maksimum ali ima supremum a.) Prema tome je $\{a\} = T(a) \setminus K(a)$. Kako je $\{a\}$ idealni sloj, ideali $T(a)$ i $K(a)$ su susedni.

Ako je $\hat{E}$ lanac, onda su ideali $T(a)$ i $K(a)$ $(a \in E)$ jedini sopstveni ideali polugrupe H. (Polugrupu H u kojoj je $\hat{E}$ lanac označićemo sa $\hat{H}$.) Prema tome, imamo sledeći vrlo važan rezultat.

Teorema 3.10. *Polugrupa $\hat{H}$ nema drugih ideala osim ideala oblika $T(a)$ i $K(a)$.*

Polugrupa E ima minimalni ideal M ako i samo ako u skupu E postoji najmanji element 0 (minimum), tj. $\min E = 0$ (nula polugrupe E), i tada je $M = 0$.

Teorema 3.11. *Polugrupa $\hat{H}$ je poluprosta i potpuno poluprosta polugrupa.*

Dokaz. Glavni faktor $T(a)\,/\,K(a)$ polugrupe H sastoji se samo od idempotenta a i spolja pridodate nule $0'$, tj. $T(a)\,/\,K(a) = \{0', a\}\,(a \neq 0$ i $a \neq 1)$. To je 0-prosta polugrupa sa primitivnim idempotentom a, tj. potpuno 0-prosta polugrupa. Dokazujući Teoremu 3.8 utvrdili smo da je H/E 0-prosta polugrupa, a kako poseduje primitivni idempotent, jedinicu polugrupe H, to je H/E potpuno 0-prosta polugrupa. Minimalni ideal $T(0)$ polugrupe H, ukoliko postoji, je grupa. Prema tome, polugrupa H je poluprosta i potpuno poluprosta.

Teorema 3.12. *Polugrupa $\hat{H}$ je kategorijska polugrupa.*

Dokaz. Ako je $\hat{E}$ lanac, onda i ideali polugrupe $\hat{H}$ obrazuju lanac u odnosu na relaciju inkluzije skupova. Kako je, pored toga, $\hat{H}$ komutativna inverzna polugrupa, to je $\hat{H}$ kategorijska polugrupa. ∎

Ako je $a \leqq b$, $a, b \in \hat{H}$, onda je, očigledno, $K(a) \subseteq T(a) \subseteq K(b) \subseteq T(b)$.

3. Neka je $G(\cdot)$ komutativna grupa. Polugrupa $\bar{L}(\cdot)$, gde je $\bar{L} = G \times \bar{H}$, je komutativna. Operacija „$\cdot$" u $\bar{L}$ definisana je kao što je uobičajeno, tj.

$$(\alpha, a) \cdot (\beta, b) = (\alpha\beta, ab), \; \alpha, \beta \in G, \; a, b \in \bar{H}.$$

(Elemente iz G i $\bar{H}$ ćemo redom označavati malim slovima grčke i latinske azbuke.)

Osobine polugrupe $\bar{L}$ se jednostavno ispituju korišćenjem stavova o direktnom proizvodu polugrupa G i $\bar{H}$. Iz razloga što je G grupa, polugrupe $\bar{L}$ i $\bar{H}$ su slične; zato dajemo većinu osobina polugrupe $\bar{L}$ bez dokaza.

Označavamo, prirodno, sa L i $\hat{L}$ redom polugrupe $G \times H$ i $G \times \hat{H}$.

Ako sa 1 označimo jedinicu i u G i u $\bar{H}$, ukoliko u $\bar{H}$ postoji, onda je $(1, 1)$ jedinica polugrupe $\bar{L}$.

Neka (α, a), $(\beta, b) \in \bar{L}$. Element (α, a) je delitelj elementa (β, b) tj. $(\alpha, a) \mid (\beta, b)$, ako i samo ako $a \mid b$. Ako je x inverzni za a u odnosu na b, onda je $(\alpha^{-1}\beta, x)$ inverzni za (α, a) u odnosu na (β, b).

Element $(\alpha, a) \in L$ je inverzibilan ako i samo ako $a \in F$.

Neka je (α, a) iz $\bar{L}$. Ako $a \in F$ i F sadrži jedinicu 1, onda je jedinstvena jedinica elementa (α, a) element $(1, 1)$. Ako je, međutim, $a \in E$, tada je, pored elementa $(1, 1)$, jedinica elementa (α, a) i svaki element $(1, x)$ $(a \leqq x)$.

Idempotenti polugrupe $\bar{L}$ su elementi oblika $(1, e)$, gde je e idempotent polugrupe $\bar{H}$. Ako je j primitivni idempotent polugrupe $\bar{H}$, onda je $(1, j)$ primitivni idempotent polugrupe $\bar{L}$.

Očigledno su komutativne polugrupe idempotenata polugrupe H polugrupe L izomorfne.

Polugrupa L je inverzna jer je direktni proizvod inverznih polugrupa G i H.

Označimo sa $G(a) \subseteq L$ $(a \in E)$ skup $G \times \{a\}$, a sa $G(1)$ skup $G \times F$. Kako su G, $\{a\}$ i F maksimalne podgrupe, biće i $G(a)$ $(a \in E$ ili $a = 1)$ maksimalne podgrupe polugrupe L. Za grupe $G(a)$ i $G(b)$ važi:

$$G(a)\,G(b) = \begin{cases} G(a) \text{ ako je } a \leqq b, \\ G(ab) \text{ u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Polugrupa L je separativna jer su G i H separativne polugrupe.

Ako je a skrativ element u $\bar{H}$, onda je (α, a) skrativ element u $\bar{L}$, i obrnuto.

U polugrupi L je $(\alpha, a) \leqq (\beta, b)$ ako i samo ako je $\alpha = \beta$ i $a \leqq b$.

4. Glavni ideal polugrupe L određen elementom (α, a) je polugrupa $(\alpha, a)\,L = a\,G \times aH = G \times T(a) = T'(a)$. Prema tome, između skupa svih ideala polugrupe H i skupa svih ideala polugrupe L postoji bijekcija $T(a) \to T'(a)$. Takođe postoji bijekcija između skupa svih ideala oblika $K(a)$ polugrupe H i skupa svih ideala oblika $K'(a) = G \times K(a)$ polugrupe L.

Ideali $T'(a)$ i $K'(a)$ $(a \in E)$ su jedini sopstveni ideali polugrupe $\hat{L}$.

Ako je M minimalni ideal polugrupe $\bar{H}$, onda je $G \times M$ minimalni ideal polugrupe $\bar{L}$.

Maksimalni ideal polugrupe L je ideal $G \times E$.

Idealni slojevi polugrupe L su skupovi $G \times \{a\}$ $(a \in E)$.

Polugrupa L je poluprosta i potpuno poluprosta.

Polugrupa L je kategorijska polugrupa.

3.2. Intervalne polugrupe

0. U ovom odeljku posmatramo multiplikativnu polugrupu intervala I° i jedno njeno proširenje, polugrupu J°. Dajemo naporedo najkarakterističnije osobine obeju polugrupa da bi videli dobre strane ovog potapanja.

1. Znamo da skup I° snabdeven operacijom množenje, definisancm sa (1) iz odeljka 1.2, obrazuje komutativnu polugrupu.

Polugrupu I° ispitivao je H. Ratschek ([2], [4]) koristeći pritom predstavljanje intervala $a = [a_1, a_2]$ u obliku

$$a = p(a)\,[q(a),\ 1] = (p(a),\ q(a),\ \cdot) \tag{1}$$

(odeljak 2.1).

Ako pokušamo da proširimo predstavljanje intervala u obliku (1) na sve uređene parove realnih brojeva različitih od para (0, 0) videćemo da to nije moguće. Pri tome elementi oblika $(\alpha, a, \cdot)$ $(1<a)$ su ustvari uređeni parovi realnih brojeva (a_1, a_2) sa $a_1 a_2>0$ i $a_1 \geqq a_2$. Dalje, skupovi

$$\{(\alpha, a, \cdot) \mid -1 \leqq a \leqq 0\} \text{ i } \{(\beta, b, \cdot) \mid b \leqq -1\}$$

se poklapaju. To znači da intervali iz skupa Z imaju dve različite reprezentacije oblika (1). Na primer, imamo

$$[-3, 6]=6\left[-\frac{1}{2}, 1\right]=-3[-2, 1].$$

Ostali parovi iz $\mathbf{R}^2$ ne mogu se predstaviti pomoću (1).

Prema tome, polugrupa I° može se proširiti u komutativnu polugrupu J° u kojoj je operacija definisana sa

$$(\alpha, a)\cdot(\beta, b)=\begin{cases}(\alpha\beta, ab) & a, b>0,\\ (\alpha\beta, \min(a, b)), & a \leqq 0 \text{ ili } b \leqq 0.\end{cases}$$

(Ovde smo pisali (α, a) umesto $(\alpha, a, \cdot)$.) Polugrupa J° je direktni proizvod multiplikativne polugrupe $\mathbf{R}^\circ(\cdot)$ realnih brojeva i polugrupe realnih brojeva $\mathbf{R}(*)$, gde je operacija „$*$“, definisana sa

$$a*b=\begin{cases}ab, & a, b>0,\\ \min(a, b), & a \leqq 0 \text{ ili } b \leqq 0.\end{cases}$$

Zbog prirode polugrupe I° parovi $(0, a)$ i $(0, b)$ $(a, b \in \mathbf{R})$ moraju se smatrati jednakim. Da bi se to izbeglo, bolje je najpre posmatrati skup $J=\{(\alpha, a) \mid \alpha, a \in \mathbf{R}, \alpha \neq 0\}$, a zatim skup $J^\circ=J \cup\{(0, 0)\}$. Sada je polugrupa J direktni proizvod multiplikativne grupe $\mathbf{R}(\cdot)$ realnih brojeva i polugrupe $\mathbf{R}(*)$ realnih brojeva.

Polugrupa $\mathbf{R}(*)$ je tipa $\hat{H}$, a polugrupa J tipa $\hat{L}$ iz prethodnog odeljka.

2. Sada dajemo neke osobine polugrupa I i J.

Zeroidi polugrupe I su svi elementi oblika $(\varepsilon, -1, \cdot)$, tj. elementi grupe $G(-1)$, dok polugrupa J nema zeroida.

Inverzibilni elementi polugrupe I su elementi oblika $(\varrho, 1, \cdot)$ tj. elementi multiplikativne grupe $\mathbf{R}(\cdot)$, dok su inverzibilni elementi polugrupe J svi elementi oblika $(\alpha, a, \cdot)$ $(0<a)$.

Obe polugrupe su polugrupe sa grupnim delom koji se razdvaja.

Idempotenti polugrupa I i J, osim jedinice $(1, 1, \cdot)$, su svi elementi oblika $(1, e, \cdot)$ gde je $-1 \leqq e \leqq 0$ u polugrupi I i $e \leqq 0$ u polugrupi J.

Primitivni idempotent polugrupe I° je element $(1, -1, \cdot)$, dok polugrupa J° nema primitivnih idempotenata.

Komutativne polugrupe idempotenata polugrupa I° i J° su kompletne distributivne strukture i linearno uređeni skupovi.

Regularni elementi polugrupe I° su, pored elemenata skupa **R**, i svi elementi skupa Z°, tj. svi nula-intervali. Polugrupe Z° i J° su inverzne.

Glavni ideali polugrupe I su skupovi $T'(a)=\bigcup G(i)\,(-1\leqq i\leqq a\leqq 1)$. Međutim, kod polugrupe J glavni ideali su samo skupvi $T'(a)=\bigcup G(i)\,(i\leqq a\leqq 0)$ i $T(1)=J$, dok skupovi $\bigcup G(i)\,(i\leqq a,\ 0<a<1)$ nisu ideali.

Polugrupa I ima minimalni ideal $T(-1)=G(-1)$ a polugrupa J nema minimalni ideal.

Nula polugrupa I i J je nerazloživa.

(Polugrupa $I^\circ(\cdot)$ je detaljnije ispitana u radu [**1**] Ž. M. Mitrovića.)

4. POLUGRUPE SA INVOLUCIJOM

4.1. Skorogrupe

0. U ovom odeljku uvodimo jednu novu algebarsku strukturu, takozvane skorogrupe, koje imaju mnogo zajedničkih osobina sa grupama.

1. Polugrupa S se naziva polugrupom sa involucijom, ako je u njoj, pored množenja, data još unarna operacija „f" pri čemu važe sledeći identiteti (pored asocijativnosti množenja):

$$f(f(a)) = a \quad \text{i} \quad f(ab) = f(a) f(b).$$

Polugrupe sa involucijom čine, prema tome, klasu polugrupa koje sadrže u sebi klasu inverznih polugrupa (A. G. KUROŠ, [**1**]).

Kako ćemo proučavati uglavnom komutativne polugrupe sa involucijom, koristićemo za operaciju u polugrupi aditivnu oznaku.

Ubuduće ćemo često pisati $-a$ umesto $f(a)$ i, jednostavnosti radi, $a-b$ umesto $a+(-b)$. U skladu sa time pišemo i $n(-a)$ kao $-na$ $(n \geqq 0)$. Kako je f automorfizam, biće $f(na) = nf(a)$, ili $-(na) = n(-a) = -na$.

Teorema 4.1. *U komutativnoj polugrupi S sa involucijom – važi*

(i) $na + nb = n(a+b)$,

(ii) $m(na) = (mn)a$,

(iii) $ma + na = (m+n)a \quad (mn \geqq 0)$.

Dokaz. Ako je $m, n \geqq 0$ gornje jednakosti važe u S jer važe u svakoj komutativnoj polugrupi.

Za $m = -r < 0$ i $n = s > 0$ imamo

$$m(na) = -r(sa) = -(r(sa)) = -((rs)a) = (-rs)a = (mn)a,$$

a za $m = r > 0$ i $n = -s < 0$

$$m(na) = r((-s)a) = r(s(-a)) = (rs)(-a) = (-rs)a = (mn)a.$$

Ako je $n = -s < 0$ biće

$$na + nb = -sa + (-sb) = s(-a) + s(-b) = s(-a + (-b)) = s(-(a+b))$$
$$= -s(a+b) = n(a+b).$$

Najzad, za $m=-r<0$ i $n=-s<0$ imamo redom

$$m(na)=-r((-s)a)=r(-(-(sa)))=r(sa)=(rs)a=(mn)a,$$

$$na+ma=-ra+(-sa)=r(-a)+s(-a)=(r+s)(-a)=-(r+s)a$$
$$=(m+n)a. \blacksquare$$

Definicija 4.1. *Polugrupu S sa fiksiranom involucijom f nazvaćemo f-polugrupom i označiti sa (S, f).*

Umesto f-polugrupa S govorićemo i polugrupa (S, f).

Definicija 4.2. *Ako je $T\subseteq S$, kažemo da je T f-podpolugrupa f-polugrupe S ako je T (f/T)-polugrupa.*

Ovde je f/T restrikcija preslikavanja f na skupu T. Stavimo $g=f/T$; iz jednakosti $f(f(x))=x$ za svako $x\in S$ sleduje $g(g(x))=x$ za svako $x\in T$ ako i samo ako $g(x)\in T$, tj. ako je g automorfizam u T; tada je $f(T)=T$. (f/T)-polugrupu T ćemo nazivati jednostavno f-polugrupom i označavati sa (T, f).

2. Komutativna grupa G se obično definiše kao skup sa tri operacije: binarnim sabiranjem, unarnom operacijom prelaska na suprotni element $-a$ i nularnom operacijom koja fiksira neutralni element 0 (nulu), pri čemu važe idantiteti:

(i) $(a+b)+c=a+(b+c)$, (ii) $a+b=b+a$,

(iii) $a+0=a$, (iv) $a-a=0$.

Iz ovih identiteta neposredno sleduje

(v) $a+x=a+y \Rightarrow x=y$ (zakon skraćivanja),

(vi) $-(a+b)=-a+(-b)$,

(vii) $-(-a)=a$.

$(-a+(-b)$ kraće pišemo kao $-a-b)$. Na osnovu identiteta (vi) i (vii) zaključujemo da je operacija prelaska na suprotni element u stvari involucija grupe G.

Posmatrajmo sada skup S sa tri operacije: binarnim sabiranjem, unarnom operacijom „f" i nularnom operacijom koja fiksira element 0, pri čemu važe svi identiteti (i)—(vii) osim identiteta (iv). Ovako dobijena algebarska struktura je očigledno komutativna f-polugrupa sa skraćivanjem i nulom 0.

Definicija 4.3. *Komutativna polugrupa (S, f) sa skraćivanjem i nulom naziva se skorogrupa (kraće: s-grupa).*

Neka je S aperiodička polugrupa, tj. neka je svaki njen element, sem jedinice, beskonačnog reda. Kako je S polugrupa sa skraćivanjem, to ne poseduje idempotente različite od jedinice, te je svaki element iz $S\backslash R'$, gde je R' maksimalna podgrupa polugrupe S, beskonačnog reda. Prema tome, polugrupa S je aperiodička ako i samo ako je R' aperiodička grupa, tj. ako i samo ako iz $nx=0$ $(x\in R')$ sleduje da je $x=0$.

Kod s-grupa ćemo pojam aperiodičnosti definisati drugačije.

Definicija 4.4. *Rećićemo da je s-grupa S aperiodička ako za svaki prirodni broj n i svako $x, y \in S$ važi*

$$nx = ny \Leftrightarrow x = y.$$

Očigledno je svaka aperiodička s-grupa istovremeno i aperiodička polugrupa, dok obrnuto ne važi.

U grupama se definiše pojam deljivosti prirodnim brojem (L. FUCHS, [1]). Analogno tome imamo:

Definicija 4.5. *Kažemo da je element a s-grupe S deljiv prirodnim brojem n (u oznaci $n \mid a$) ako jednačina*

$$nx = a \qquad (a \in S) \tag{1}$$

ima rešenja u S.

To znači da postoji skup $B \subseteq S$ takav da za svako $b \in B$ važi $nb = a$. Očigledno je postojanje rešenja jednačine (1) ekvivalentno tome da $a \in nS$.

Definicija 4.6. *Za s-grupu S kažemo da je deljiva ako $n \mid a$ za svako $a \in S$ i svaki prirodan broj n.*

Drugim rečima, S je deljiva s-grupa ako i samo ako je $nS = S$ za svaki prirodan broj n.

Teorema 4.2. *U aperiodičkoj deljivoj s-grupi S za svaki prirodan broj n i svako $a \in S$ postoji jedan i samo jedan element $x \in S$ takav da važi* (1).

Dokaz. Kako je S deljiva s-grupa, to je svaka jednačina oblika (1) rešiva u S. Neka $x, y \in B$, gde je B rešenje jednačine (1), tada iz $nx = a$ i $ny = a$ dobijamo da je $nx = ny$, odnosno $x = y$. Znači B je jednoelementni skup. ∎

Pisaćemo $x = \frac{a}{n} = \frac{1}{n} a$ za rešenje jednačine (1) u aperiodičkoj deljivoj s-grupi. U skladu sa time važi $n\left(\frac{1}{n} a\right) = a$ i $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$.

Definicija 4.7. *Neka su A i B s-podgrupe s-grupe S takve da se svaki element $s \in S$ može na jedinstveni način predstaviti u obliku $s = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Tada pišemo $S = A \oplus B$.*

3. Označimo sa $\bar{x}$ element $x - x$, tj. $\bar{x} = x - x$, $x \in S$. Skup svih elemenata $\bar{x}$, $x \in S$, označavamo sa W, tj.

$$W = \{w \mid w = x - x, \ x \in S\}.$$

Teorema 4.3. *Skup W je s-podgrupa s-grupe S.*

Dokaz. Kako je $\bar{x} + \bar{y} = (x - x) + (y - y) = (x + y) - (x + y) = \overline{x + y}$, $-\bar{x} = -(x - x) = \bar{x}$ i $0 - 0 = 0$, to je W s-grupa. ∎

Iz dokaza prethodne teoreme se vidi da je $-\bar{x} = \bar{x}$, tj. elementi iz W su nepokretne tačke preslikavanja —. Naravno, preslikavanje — može imati i drugih nepokretnih tačaka u S. Označimo sa W' skup svih nepokretnih tačaka preslikavanja —, tj.

$$W' = \{x \mid -x = x, \ x \in S\},$$

tada je $W \subseteq W'$.

Teorema 4.4. *Skup W' je s-podgrupa s-grupe S.*

Dokaz. Ako $a, b \in W'$, onda sabiranjem jednakosti $a = -a$ i $b = -b$ dobijamo $a + b = -(a+b)$, tj. $a + b \in W'$. Pored toga $-a = a \in W'$ i $0 \in W'$, te je W' s-grupa. ∎

Označimo sa R skup svih elemenata $x \in S$, takvih da je $x - x = 0$, tj.

$$R = \{x \mid \bar{x} = 0,\ x \in S\}.$$

Teorema 4.5. *Skup R je Abelova podgrupa s-grupe S.*

Dokaz. Neka je $x, y \in R$. Kako je $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} = 0$, to i $x + y \in R$. Element x ima inverzni element $-x$. Pored toga je $0 - 0 = 0$, te $0 \in R$. Prema tome, R je Abelova grupa. ∎

Ako su a i b dva proizvoljna elementa iz S, definisaćemo relaciju μ na S sa $a \mu b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$.

Teorema 4.6. *Relacija μ je kongruencija na S.*

Dokaz. Relacija μ je ekvivalentnost jer je $\bar{a} = \bar{b}$ jednakost. Neka je $a \mu b \wedge c \mu d$, što je ekvivalentno sa $\bar{a} = \bar{b} \wedge \bar{c} = \bar{d}$; odatle sleduje $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} + \bar{d}$, odnosno $\overline{a+c} = \overline{b+d}$, tj. $(a+c)\mu(b+d)$. Prema tome, μ je kongruencija. ∎

Ako za neki element $a \in S$ postoji element $x \in S$ takav da je $a = x - a$, onda ćemo takav element x označiti sa $\hat{a}$. Neka postoji $\hat{a}$, tada sabiranjem jednakosti $a = \hat{a} - a$ i $-a = -\hat{a} + a$ dobijamo da je $\hat{a} - \hat{a} = 0$, tj. $\hat{a} \in R$. Znači, ako postoji $\hat{a}$ onda $\hat{a} \in R$. Ako postoje elementi $x, y \in R$ takvi da je $a = x - a$ i $a = y - a$, onda je $a - a = x - y + (a - a)$, tj. $x - y = 0$. Kako je R grupa, iz $x - y = 0$ sleduje $x = y$, što znači da je element $\hat{a}$ jednoznačno određen. Neka postoje $\hat{a}$ i $\hat{b}$, tada sabranjem jednakosti $a = \hat{a} - a$ i $b = \hat{b} - b$ dobijamo $a + b = \hat{a} + \hat{b} - (a+b)$. Kako je R grupa, postoji element $x = \hat{a} + \hat{b}$. Prema tome, postoji element $x = \hat{a} + \hat{b}$ takav da je $a + b = x - (a+b)$, tj. postoj $\widehat{a+b}$ i važi $\widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b}$. Time smo dokazali sledeću teoremu.

Teorema 4.7. *Ako za $a \in S$ postoji element $\hat{a} \in S$ takav da je $a = \hat{a} - a$, onda $\hat{a} \in R$ i $\hat{a}$ je jednoznačno određen. Ako postoje $\hat{a}$ i $\hat{b}$, onda postoji i $\widehat{a+b}$ i važi $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$.*

Teorema 4.8. *Element a pripada skupu W' ako i samo ako je $\hat{a} = 0$.*

Dokaz. Neka $a \in W'$, tada je $a = -a$, odnosno $a = 0 - a$. Znači postoji element $\hat{a} = 0$ takav da je $a = \hat{a} - a$. Obrnuto, ako za neko $a \in S$ postoji $\hat{a} = 0$, tada važi jednakost $a = 0 - a$, tj. $a = -a$, što znači da $a \in W'$. ∎

Označimo sa S' skup svih elemenata $x \in S$ takvih da postoji $\hat{x}$ tj.

$$S' = \{x \mid (\exists \hat{x} \in R)\, x = \hat{x} - x,\ x \in S\}.$$

Prema tome, element x je iz S' ako i samo ako jednačina $x = y - x$ ima rešenje u S. Svakako je $S' \subseteq S$, a iz prethodne teoreme sleduje da je $W' \subseteq S'$. Takođe je $R \subseteq S'$, jer je za svako $a \in R$ $a = 2a - a$.

Teorema 4.9. *Skup S' je s-podgrupa s-grupe S.*

Dokaz. Neka $a, b \in S'$. Prema teoremi 4.7, kako postoje $\hat{a}$ i $\hat{b}$, postoji i $\widehat{a+b}$, te $a+b \in S'$. Ako postoji $x \in S$ takav da je $a = x - a$, onda postoji i $-x \in S$ takav da je $-a = -x-(-a)$, te $-a \in S'$. Kako je $0-0=0$, to $0 \in S'$. Znači da je S' s-grupa. ∎

Posledica 4.8.1. *Neka $a, b \in S'$, tada $a - b \in W'$ ako i samo ako je $\hat{a} = \hat{b}$.*

Dokaz. Neka $a, b \in S'$ i neka je $\hat{a} = \hat{b}$, tada jednakosti $a = \hat{a} - a$ i $b = \hat{b} - b$, zajedno sa $\hat{a} = \hat{b}$, daju $a - b = -(a-b)$, tj. $a - b \in W'$. Obrnuto, ako $a - b \in W'$, tada je $\widehat{a-b} = 0$, odnosno $\hat{a} - \hat{b} = 0 = \hat{b} - \hat{b}$, odakle sleduje $\hat{a} = \hat{b}$. (Ovde smo koristili očiglednu vezu $\widehat{(-a)} = -\hat{a}$.) ∎

Ako su a i b dva proizvoljna elementa iz S', definisaćemo relaciju λ na S' sa $a \lambda b \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b}$.

Teorema 4.10. *Relacija λ je kongruencija na S'.*

Dokaz. Relacija λ je ekvivalentnost jer je $\hat{a} = \hat{b}$ jednakost. Neka je $a \lambda b \wedge c \lambda d$, što je ekvivalentno sa $\hat{a} = \hat{b} \wedge \hat{c} = \hat{d}$; odavde sleduje $\hat{a} + \hat{c} = \hat{b} + \hat{d}$, tj. $\widehat{a+c} = \widehat{b+d}$. Prema tome, λ je kongruencija. ∎

Klase ekvivalentnosti relacija λ i μ označavamo redom sa $L(a)$ i $M(a)$ tj.

$$L(a) = \{x \mid \hat{x} = \hat{a},\ x \in S\} \quad \text{i} \quad M(a) = \{x \mid \bar{x} = \bar{a},\ x \in S\}.$$

Očigledno je $L(0) = W'$ i $M(0) = R$.

4. Posmatrajmo sada još jednu relaciju na S', naime relaciju $\tau = \lambda \cap \mu$. (Ovde je μ u stvari μ / S'.) Kako su λ i μ kongruencije, biće i τ kongruencija.

Teorema 4.11. *Neka je S aperiodička s-grupa. Ako $a, b \in S'$, tada je*

$$a \tau b \Leftrightarrow a = b.$$

Dokaz. Iz jednakosti $a = \hat{a} - a$, dodavanjem obema stranama element a, dobijamo vezu $2a = \bar{a} + \hat{a}$. Kako je $a \tau b \Leftrightarrow a \lambda b \wedge a \mu b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} \wedge \hat{a} = \hat{b}$, to iz $a \tau b$ sleduje $2a = \hat{a} + \bar{b} = \hat{b} + \bar{b} = 2b$. Zbog aperiodičnosti, iz poslednje jednakosti sleduje $a = b$. Obrnuto, neka važi $a = b$, tada je $\hat{a} = \hat{a}$ i $\bar{a} = \bar{b}$, tj. $a \tau b$. ∎

Klase ekvivalentnosti relacije τ označićemo sa $T(a)$, tj.

$$T(a) = \{x \mid \hat{x} = \hat{a} \wedge \bar{x} = \bar{a},\ x \in S'\} = L(a) \cap M(a).$$

Teorema 4.12. *Ako je S aperiodička deljiva s-grupa, onda su i R, W, W', S', aperiodičke deljive s-grupe.*

Dokaz. Ako je S aperiodička s-grupa, jasno je da su i njene s-podgrupe R, W, W', S' aperiodičke s-grupe. Neka je S deljiva s-grupa, dokazaćemo da su R, W, W', S' takođe deljive s-grupe.

U deljivoj s-grupi S jednačina $nx = a$ ima rešenje $x = \frac{1}{n} a$ za svako $a \in S$ i svaki prirodan broj n.

Neka $a \in R$, tada iz $nx = a$ sleduje $n\bar{x} = \bar{a} = 0$, tj. $\bar{x} = 0$. Znači, iz $a \in R$ sleduje $\frac{1}{n} a \in R$.

Ako $a \in S'$ tada postoji element $u \in R$ takav da je $a = u - a$, odakle sleduje da postoji element $\frac{1}{n} u \in R$ takav da je $\frac{1}{n} a = \frac{1}{n} u - \frac{1}{n} a$, što znači da $\frac{1}{n} a \in S'$.

Neka, sada, $a \in W'$. Kako je $W' \subseteq S'$, jednačina $nx = a$ ima rešenje u S', tj. $x \in S'$. Prema tome, iz $nx = a$ sleduje $n\hat{x} = \hat{a} = 0$, tj. $\hat{x} = 0$, što znači da $\frac{1}{n} a \in W'$.

Najzad, ako $a \in W$, tada postoji element $v \in S$ takav da je $a = v - v$. Odavde sleduje da postoji element $\frac{1}{n} v \in S$ takav da je $\frac{1}{n} a = \frac{1}{n} v - \frac{1}{n} v$, tj. $\frac{1}{n} a \in W$.

Time je dokaz zvrešen. ∎

Teorema 4.13. *U aperiodičkoj deljivoj s-grupi S važi*

$$S' = W \oplus R.$$

Dokaz. Za svaki element $a \in S'$ važi $2a = \hat{a} + \bar{a}$. Prema tome, u deljivoj aperiodičkoj s-grupi S za svaki element $a \in S'$ važi $a = \frac{1}{2}(\hat{a} + \bar{a}) = \frac{\hat{a}}{2} + \frac{\bar{a}}{2} \in W + R$, jer $\frac{1}{2}\hat{a} \in R$ i $\frac{1}{2}\bar{a} \in W$.

Ako je $a + b = a' + b'$ gde $a, a' \in R$, $b, b' \in W$, onda je $\bar{b} = \bar{b}'$. Neka je $b = \bar{x}$ i $b' = \bar{y}$, onda je $\bar{b} = \bar{x} - \bar{x} = 2\bar{x} = 2\bar{y} = \bar{b}'$, tj. $\bar{x} = \bar{y}$, odakle sleduje da je $b = b'$. Kako je $b = b'$, iz $a + b = a' + b'$ sleduje da je i $a = a'$. Prema tome, predstavljanje $s = a + b$ je jedinstveno. ∎

5. Ako je S s-grupa, onda se polugrupa S može potopiti u neku Abelovu grupu $\bar{S}$, jer je S komutativna polugrupa sa skraćivanjem. Pri tome se involucija — s-grupe S može proširiti na čitavu grupu $\bar{S}$ i, naravno, involucija — s-grupe S, proširena na grupu $\bar{S}$, ne poklapa se sa prirodnom involucijom same grupe $\bar{S}$, tj. preslikavanjem u grupi koje svakom elementu dodeljuje njemu suprotni element.

4.2. Pojam kvazirešenja jednačina

0. Ovde uvodimo jedan novi pojam, takozvano kvazirešenje jednačina, koji je karakterističan za algebarske strukture sa involucijom.

1. Pod rešenjem jednačine

$$a + x = b \tag{1}$$

po promenljivoj x u proizvoljnoj aditivnoj polugrupi S podrazumevamo neprazan skup $C \subseteq S$ takav da za svako $c \in C$ važi $a + c = b$.

Ako je S grupa, onda je $C = \{b - a\}$, tj. jednačina (1) ima jedinstveno rešenje $x = b - a$.

U polugrupi S se rešenje ne može dobiti pomoću jedinstvene formule, kao kod grupe. Kao ilustracija za to može nam poslužiti posledica 3.4.2 iz odeljka 3.1.

Kod s-grupe $(S, -)$ ne interesuje nas rešenje jednačine (1), koje i ne mora da postoji, već element $b-a$, koji ćemo nazvati kvazirešenjem (kraće: k-rešenjem) jednačine (1). (U vezi sa ovim terminom koristićemo, mada ređe, i termin „k-rešiti" jednačinu kao skraćenicu za „odrediti k-rešenje".)

Ako obema stranama jednačine $x=b-a$ dodamo element a dobijamo jednačinu

$$a+x=b+\bar{a}, \tag{2}$$

čije je rešenje element $b-a$. Prema tome, k-rešenje jednačine (1) je u stvari rešenje jednačine (2).

Pojam k-rešenja u s-grupi S ćemo proširiti.

Neka je $L_p(ix)$ linearna kombinacija elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_p \in S$, tj. $L_p(ix)=i_1 x_1+i_2 x_2+\cdots+i_p x_p$, a $L_p(ix, a)=L_p(ix)+a$, $a \in S$.

Definicija 4.8. *Za dve linearne jednačine* (A) *i* (B) *kažemo da su kvaziekvivalentne* (k-*ekvivalentne*) *u* s-*grupi* S *u sledećim slučajevima*:

(i) *Ako su* (A) *i* (B) *ekvivalentne u* S.

(ii) (A): $L_p(ix, a)+L_q(jx, b)=L_r(kx, c)$,

(B): $L_p(ix, a)=L_r(kx, c)-L_q(jx, b)$.

(iii) (A): $nL_p(ix, a)+mL_p(ix, a)=L_q(jx, b)$,

(B): $(n+m)L_p(ix, a)+na+ma=L_q(jx, b)$,

gde su m *i* n *celi brojevi.*

Definicija 4.9. *Pod kvazirešenjem sistema linearnih jednačina u deljivoj* s-*grupi* $(S, -)$ *podrazumevamo rešenje kvaziekvivalentnog sistema linearnih jednačina.*

Koristeći ovu definiciju lako možemo dokazati da je u deljivoj s-grupi S k-rešenje jednačine

$$mx+a=nx+b \qquad (a, b, x \in S,\ m, n \text{ celi brojevi},\ m \neq n) \tag{3}$$

u stvari rešenje jednačine $(m-n)x=b-a$. Na osnovu toga je k-rešenje jednačine (3) u aperiodičkoj deljivoj s-grupi određeno sa

$$x=\frac{b-a}{m-n}. \tag{4}$$

2. Možemo posmatrati i sistem od više linearnih jednačina sa više nepoznatih sa koeficijentima iz skupa celih brojeva.

Za početak uzmimo samo dve jednačine sa dve nepoznate.

U deljivoj s-grupi S k-rešenje sistema jednačina

$$\begin{aligned} mx+ny&=a, \\ px+qy&=b \end{aligned} \tag{5}$$

je u stvari rešenje sistema jednačina

$$Dx = D_x \quad \text{i} \quad Dy = D_y,$$

gde je $D = mq - np$, $D_x = qa - nb$, $D_y = mb - pa$. Odista, kvazirešavanjem jednačina sistema (5) po x dobijamo sistem

$$(6) \qquad \begin{aligned} mx &= a - ny, \\ px &= b - qy \end{aligned}$$

ili

$$(6') \qquad mpx = p(a - ny) = m(b - qy).$$

Iz (6′) dobijamo

$$(7) \qquad pa - npy = mb - mqy.$$

Na osnovu definicije 4.9 k-rešenje jednačine (7) je u stvari rešenje jednačine

$$(mq - np)\,x = mb - pa,$$

odnosno jednačine

$$Dx = D_x.$$

Na isti način dobijamo i jednačinu $Dy = D_y$.

Prema tome, rešenje sistema (5) u aperiodičkoj deljivoj s-grupi dato je sa

$$x = D_x / D \quad \text{i} \quad y = D_y / D.$$

Analogno se može dobiti k-rešenje sistema od n linearnih jednačina sa n nepoznatih.

4.3. Intervalne s-grupe

0. Ovde dajemo nekoliko primera s-grupa, čime se opravdava potreba za uvođenjem pojma s-grupe.

1. Posmatrajmo aditivnu intervalnu polugrupu $I^\circ(+)$. Polugrupa $I^\circ(+)$ nije grupa, jer ni za jedan interval $a \in I \backslash R$ ne postoji interval $x \in I^\circ$ takav da je $a + x = 0$.

Definišimo preslikavanje — u I° na sledeći način:

$$-[a_1, a_2] = [-a_2, -a_1].$$

Sada je $(I^\circ(+), -)$ s-grupa.

Teorema 4.14. *Polugrupa $(I^\circ(+), -)$ je deljiva aperiodička s-grupa.*

Dokaz. U odeljku 1.2 smo videli da je $I^\circ(+)$ aditivna komutativna polugrupa sa nulom 0 i skraćivanjem. Kako je

$$-(-[a_1, a_2]) = -[-a_2, -a_1] = [a_1, a_2]$$

i

$$\begin{aligned} -[a_1, a_2] + (-[b_1, b_2]) &= [-a_2, -a_1] + [-b_2, -b_1] \\ &= [-a_2 - b_2, -a_1 - b_1] = -[a_1 + b_1, a_2 + b_2] \\ &= -([a_1, a_2] + [b_1, b_2]), \end{aligned}$$

zaključujemo da je preslikavanje — involucija. Prema tome, polugrupa $(I^\circ(+), -)$ je s-grupa.

Jednačina

$$n[x_1, x_2] = [a_1, a_2] \qquad (n \text{ prirodan broj}),$$

ima jedinstveno rešenje $[a_1/n, a_2/n]$, te i jednačina $n[x_1, x_2]=0$ takođe ima jedinstveno rešenje $[0, 0]$. To znači da je $I^\circ(+)$ deljiva aperiodička polugrupa. ∎

Neka je $a=[a_1, a_2]$, tada je $-a=[-a_2, -a_1]$. Kako je $s(a)=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$ i $r(a)=\frac{1}{2}(a_2-a_1)$, biće $s(-a)=\frac{1}{2}(-a_2-a_1)=-s(a)$ i $r(-a)=\frac{1}{2}(-a_1+a_2)$ $=r(a)$. Prema tome, ako interval a predstavimo u obliku $a=(s(a), r(a), +)$, onda je $-a=(-s(a), r(a), +)$.

Interesantno je odrediti skupove W i R. Neka je $a=[a_1, a_2]$, tada je

$$\bar{a}=a-a=(a_2-a_1)[-1, 1]=2r(a)[-1, 1]$$

a iz $a=\hat{a}-a$ sleduje

$$\hat{a}=(a_1+a_2)[1, 1]=2s(a).$$

Znači da se skup W poklapa sa skupom $G^\circ(-1)$ (odeljak 3.2), a skup R sa skupom svih realnih brojeva. Ako pišemo $a=(s(a), r(a), +)$, onda je očigledno, $\bar{a}=(0, 2r(a), +)$ i $\hat{a}=(2s(a), 0, +)$.

2. Multiplikativna polugrupa $I(\cdot)$ ne može biti s-grupa, jer u njoj ne važi zakon skraćivanja, dok polugrupa $N(\cdot)$ može postati s-grupa.

Ako definišemo preslikavanje $/$ u $N(\cdot)$ sa

$$/[a_1, a_2]=[1/a_2, 1/a_1],$$

tada važi sledeći stav.

Teorema 4.15. *Polugrupa $(N(\cdot), /)$ je s-grupa.*

Dokaz. Očigledno je $N(\cdot)$ komutativna polugrupa sa jedinicom 1 i skraćivanjem. Dokažimo da je $/(ab)=(/a)(/b)$. Neka je $a=[a_1, a_2]$, $b=[b_1, b_2]$. Ako je $a, b>0$ imamo

$$/(ab)=/[a_1b_1, a_2b_2]=[1/a_2b_2, 1/a_1b_1]=(/a)(/b),$$

za $a>0$, $b<0$ je

$$/(ab)=/[a_2b_1, a_1b_2]=[1/a_1b_2, 1/a_2b_1]=(/a)(/b),$$

i, najzad, ako je $a, b<0$ biće

$$/(ab)=/[a_2b_2, a_1b_1]=[1/a_1b_1, 1/a_2b_2]=(/a)(/b).$$

Tako smo dokazali da je preslikavanje $/$ automorfizam polugrupe N. Pored toga je

$$/(/a)=/(/[a_1, a_2])=/[1/a_2, 1/a_1]=[a_1, a_2]=a.$$

Prema tome, preslikavanje $/$ je involucija, te je $(N(\cdot), /)$ s-gupa. ∎

Kako je $(-1)^2=[-1, -1]^2=[1, 1]=1$, s-grupa $N(\cdot)$ nije aperiodička. Polugrupa $N(\cdot)$ nije ni deljiva, jer, na primer, jednačina $[-1, -1]^n=[1, 1]$ nema rešenje za svako n.

3. Neka je $J^\circ(\cdot)$ multiplikativna polugrupa iz odeljka 3.2. Svaki element iz J° može se napisati u obliku

$$a=(p(a),\ q(a),\ \cdot). \tag{1}$$

Uvedimo dve nove funkcionele iz J° u R° slično kao što smo to učinili u glavi 2, naime

$$\begin{aligned} s(a)&=\frac{1}{2}p(a)\,(1+q(a)),\\ r(a)&=\frac{1}{2}p(a)\,(1-q(a)). \end{aligned} \tag{2}$$

Svakom elementu $a=(p(a),\ q(a),\ \cdot)$ dodeljujemo element $a=(s(a),\ |r(a)|,\ +)$ a elementu $0=(0,\ 0,\ \cdot)$ element $0=(0,\ 0,\ +)$. Time je određeno jedno preslikavanje iz skupa svih uređenih parova realnih brojeva na isti skup. (Ovo preslikavanje nije obratno jednoznačno.)

Definišimo zbir dva elementa $a=(s(a),\ |r(a)|,\ +)$ i $b=(s(b),\ |r(b)|,\ +)$ sa $a+b=(s(a)+s(b),\ |r(a)|+|r(b)|,\ +)$. Tako smo dobili polugrupu $J^\circ(+)$.

U polugrupi $J^\circ(+)$ definišimo unarnu operaciju — sa

$$-a=(-s(a),\ |r(a)|,\ +) \quad \text{za} \quad a=(s(a),\ |r(a)|,\ +).$$

Lako se dokazuje sledeće tvrđenje.

Teorema 4.16. *Polugrupa $(J^\circ(+),\ -)$ je s-grupa.*

5. JEDNO UOPŠTENJE PRSTENA

5.1. Pojam i osobine s-prstena

0. U ovom odeljku definišemo pojam s-prstena, koji ima mnoge osobine komutativnog prstena. Međutim, nije nam cilj proučavanje s-prstena uopšte, već specijalnog s-prstena I°.

1. A. FRÖHLICH ([**1**]) je definisao distributivne elemente skoro-prstena. Slično se mogu definisati distributivni elementi u algebri $(S, +, \cdot)$.

Definicija 5.1. *Element a algebre $(S, +, \cdot)$ je distributivan u odnosu na par elemenata $b, c \in S$ ako je*

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Element $a \in S$, koji je distributivan u odnosu na svaki par elemenata b, $c \in S$, naziva se distributivnim elementom.

Sada možemo definisati s-prsten.

Definicija 5.2. *Algebru $(S, +, -, \cdot)$ nazivamo s-prstenom ako važi:*

(i) $(S(+), -)$ *je s-grupa.*

(ii) $(S, \cdot)$ *je komutativna polugrupa sa jedinicom* 1.

(iii) *Svi distributivni elementi algebre $(S, +, -, \cdot)$ obrazuju skup R.*

(iv) *Za svako $a \in S$ je $a \cdot 0 = 0$.*

(v) *Za svako $a \in S$ je $(-1)a = -a$.*

(*Skup R i element* 0 *su određeni kao u odeljku* 4.2.)

Teorema 5.1. *U s-prstenu $(S, +, -, \cdot)$ je*

(i) *Za svaki par elemenata $a, b \in S$*

$$(-a)b = -(ab) \quad i \quad (-a)(-b) = ab;$$

(ii) $1 \in R$.

Dokaz. (i) Prema osobini (v) imamo $(-a)b = ((-1)a)b = (-1)(ab) = -(ab)$, te je i $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$.

(ii) Kako je $1(a+b) = a + b = 1 \cdot a + 1 \cdot b$, dobijamo da $1 \in R$. ∎

Dajmo sada jedan primer s-prstena. Posmatrajmo s-grupu $(I^\circ(+), -)$ iz odeljka 4.3 i polugrupu $I^\circ(\cdot)$ iz odeljka 1.2. Lako je dokazati da je $I^\circ(+, -, \cdot)$ s-prsten.

2. Slično idealu prstena definišemo ideal s-prstena.

Definicija 5.3. *Ideal s-prstena S je aditivna s-podgrupa A s-prstena S takva da $ar \in A$ za svako $a \in A$ i $r \in S$, tj. takva da je $AS \subseteq A$.*

Da bi našli ideale s-prstena I° dokazaćemo prethodno jedan važan stav.

Teorema 5.2. *Ideal M polugrupe $I^\circ(\cdot)$ je podpolugrupa polugrupe $I^\circ(+)$ takva da je $M+M=M$.*

Dokaz. Neka su $a=(p(a), q(a), \cdot)$ i $b=(p(b), q(b), \cdot)$ iz $T'(e)$, tada je $q(a), q(b) \leq q(e)$, te je $T'(a), T'(b) \subseteq T'(e)$. Deljivost u $I^\circ(\cdot)$ je definisana sa $a|b$ ako i samo ako je $T'(b) \subseteq T'(a)$. H. Ratschek ([5]) je dokazao da iz $a|b$ sleduje $a|a+b$. Za proizvoljna dva elementa $a, b \in I^\circ$ uvek važi ili $a|b$ ili $b|a$. Prema tome, ili $a|a+b$ ili $b|a+b$, tj. ili je $T'(a+b) \subseteq T'(a)$ ili $T'(a+b) \subseteq T'(b)$. Znači, uvek je $T'(a+b) \subseteq T'(e)$, te je $T'(e)$ podpolugrupa polugrupe $I^\circ(+)$. (Podrazumeva se da $a+b \in T'(a+b)$.)

Kako je $T'(e)$ polugrupa važi $T'(e)+T'(e) \subseteq T'(e)$. Sa druge strane je $T'(e)+0=T'(e)$ i $0 \in T'(e)$. Prema tome je $T'(e)+T'(e)=T'(e)$.

Dokaz je sličan za ideale $K'(e)$, s tom razlikom što je sada $q(a), q(b) < q(e)$. ∎

Sada možemo dokazati važnu osobinu ideala s-prstena I°.

Teorema 5.3. *Svaki ideal polugrupe $I^\circ(\cdot)$ je istovremeno ideal s-prstena I°.*

Dokaz. Ideal $T'(e)$ polugrupe $I^\circ(\cdot)$ je podpolugrupa polugrupe $I^\circ(+)$. Pored toga, za proizvoljne elemente $a, b \in T'(e)$ važi $a-b \in T'(e)$, te je $T'(e)$ s-podpolugrupa s-grupe $(I^\circ(+), -)$. Prema tome, ideal $T'(e)$ polugrupe $I^\circ(\cdot)$ je ideal i s-prstena I°, jer je $T'I^\circ = T'$.

Potpuno isto se dokazuje i za ideale $K'(e)$. ∎

Da bi u komutativnom prstenu svaki ideal multiplikativne polugrupe prstena bio ideal samog prstena, potrebno je i dovoljno da za proizvoljna dva elementa jedan od njih bude delitelj drugog. U s-prstenu I° za proizvoljna dva elementa jedan je uvek delitelj drugog i svaki ideal $I^\circ(\cdot)$ je ideal s-prstena I°.

Neka su A i B ideali s-prstena S. Skupovi $A+B$ i AB definišu se kao obično. Definišimo još dve operacije sa idealima na sledeći način:

$$A * B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \,\middle|\, a_i \in A,\ b_i \in B \right\} \qquad \text{(proizvod)},$$

$$A : B = \{x \in S \mid xB \subseteq A\} \qquad \text{(količnik)}.$$

Specijalno, $0:B$ naziva se anulator ideala A i označava $\mathrm{Ann}(B)$; to je skup svih elemenata $x \in S$ za koje je $xB=0$. (U I° anulator proizvoljnog ideala je ideal 0.) Analogno kao kod prstena važi sledeće tvrđenje.

Teorema 5.4. *Ako su A i B ideali s-prstena I°, tada su $A+B$, AB, $A*B$, $A:B$ i $A \cap B$ ideali u I°.*

Dokaz. Neka je, na primer, $B \subseteq A$. Kako je $A+A=A$, sleduje da je $A+B \subseteq A+A=A$. Sa druge strane je $A=0+A \subseteq B+A$. Prema tome, ako je $B \subseteq A$, tada je $A+B=A$, tj. $A+B$ je ideal.

Iz $B \subseteq A$ sleduje $A \cap B=B$, te je $A \cap B$ ideal.

Znamo da je AB ideal polugrupe $I^\circ(\cdot)$, te je AB ideal i s-prstena I°.

Kako je $A*B=AB+\cdots+AB=AB$, biće i $A*B$ ideal.

Za $B \subseteq A$ je $A:B=I^\circ$. Ako je $A \subseteq B$ i $A \subseteq Z^\circ$, onda je $A:B=A$. U poslednjem slučaju, kad je $A \subseteq B$ i $Z^\circ \subseteq A$, neka $A(a)$ označava $T'(a)$ ili $K'(a)$, a $B(b)$ neka osnačava $T'(b)$ ili $K'(b)$. Sada je $A(a):B(b)=A(ab^{-1})$. Prema tome, $A:B$ je ideal. ∎

Iz dokaza prethodne teoreme zaključujemo:

Teorema 5.5. *Ako su A i B ideali s-prstena I°, tada je*

$$A*I^\circ=A, \quad A:I^\circ=A, \quad A:A=I^\circ, \quad A*B \subseteq A \cap B.$$

Potpuno isti stav važi i kod proizvoljnog prstena.

Unija ideala A i B prstena, uopšte govoreći, nije ideal. Međutim, unija ideala A i B s-prstena I° je ideal, jer je $A \cup B=A$ za $B \subseteq A$.

3. Element a komutativnog prstena je reverzibilan ako i samo ako se ne sadrži ni u kakvom sopstvenom idealu; to je ekvivalentno tome da se a ne sadrži ni u kakvom maksimalnom (sopstvenom) idealu. Reverzibilni elementi s-prstena I° su jedino svi elementi iz R (realni brojevi različiti od nule) a jedini maksimalni ideal je skup $K(1)=I^\circ \backslash R$. Prema tome, nijedan reverzibilni element iz I° se ne sadrži u maksimalnom idealu $K(1)$.

Definicija 5.4. *s-prsten S se naziva s-polje ako je svaki nenula element reverzibilan, a s-integralni domen ako je* 0 *jedinstveni delitelj nule.*

Očigledno je s-prsten I° s-integralni domen, ali nije s-polje.

Ideal M komutativnog prstena R je maksimalan ako i samo ako je R/M polje. (Tačnije, $I^\circ/K(1)$ je polje.)

Sopstveni ideal M komutativnog prstena R je maksimalan ako i samo ako za svako $r \notin M$ postoji takvo $x \in R$ da $1-rx \in M$. Kod s-prstena I° za svako $r \notin K(1)$ i svako $x \in K(1)$ važi $1-rx \in K(1)$.

Slično kao kod komutativnog prstena definišemo radikal s-prstena i radikal ideala s-prstena.

Definicija 5.5. *Radikalom* (JACOBSONA) *M s-prstena S nazivamo presek svih njegovih maksimalnih ideala. Radikalom ideala A s-prstena S nazivamo skup*

$$r(A)=\{x \in S \mid x^n \in A \quad za\ neko \quad n>0\}.$$

Kod s-prstena I° jedinstveni maksimalni ideal je skup $K(1)$ i to je radikal s-prstena I°.

Radikal $r(A)$ ideala A komutativnog prstena je ideal. Neka je $A(a)$ proizvoljni ideal s-prstena I°. Ako je $-1 \leqq q(a) \leqq 0$, tada je $r(A(a))=A(a)$, a za $0<q(a)<1$ imamo $r(A(a))=K(1)$; pored toga je $r(0)=0$ i $r(I^\circ)=I^\circ$.

Stvarno, za $q(a) \leqq 0$, $x^n \in T(a)$ $(x^n \in K(a))$ ako i samo ako $x \in G(i)$ $(q(i) \leqq q(a))$ (odnosno $q(i) < q(a)$), međutim, za $q(a) > 0$, $x^n \in T(a)$ $(x^n \in K(a))$ za svako $q(x) < 1$, jer se uvek može naći takvo $n > 0$ da je $q(x)^n \leqq q(a)$ $(q(x)^n < q(a))$. Prema tome, radikal ideala s-prstena I° je ideal.

Definicija 5.6. *s-psten S naziva se lokalnim ako S poseduje samo jedan maksimalni ideal.*

Neka je R komutativni prsten. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Prsten R poseduje jedinstveni maksimalni ideal M.

(ii) Svi nereverzibilni elementi prstena R pripadaju sopstvenom idealu M.

(iii) Nereverzibilni elementi obrazuju ideal M.

Očigledno je s-prsten I° lokalni i zadovoljava sva tri uslova (i) – (iii).

4. Kao kod skoro-prstena (A. FRÖHLICH, [**1**]) važi sledeći stav.

Teorema 5.6. *Neka su A i B ideali u s-prstenu S. Elementi iz S koji su distributivni u odnosu na sve parove a, b, $a \in A$, $b \in B$, obrazuju multiplikativnu polugrupu $D(A, B)$ i $0 \in D(A, B)$. Specijalno, distributivni elementi iz S obrazuju polugrupu $D(S)$ i $0 \in D(S)$.*

Dokaz. Ako $x, y \in D(A, B)$, onda je za $a \in A$, $b \in B$

$$(xy)(a+b) = x\left(y(a+b)\right) = x(ya+yb) = xya + xyb,$$

jer $ya \in A$, $yb \in B$, te $xy \in D(A, B)$. Takođe je $0(a+b) = 0 = 0a + 0b$.

Definicija 5.7. *Neka su x, a, b elementi s-prstena S. Definišemo distributor elemenata a, b za x sa*

$$[x \mid a, b] = xa + xb - x(a+b).$$

U odeljku 2.2 određeno je $x \in I^\circ$ takvo da je

$$a(b+c) + x = ab + ac.$$

Na isti način možemo odrediti distributor elemenata b, c za a, tj. element $x = [a \mid b, c] = ab + ac - a(b+c)$, $a, b, c \in I^\circ$.

Odredimo sada polugrupe $D(A, B)$ s-prstena I°.

Teorema 5.7. *Ako su A i $B \subseteq A$ ideali s-prstena I°, tada je*

(i) $D(A, B) = (I^\circ \backslash A) \cup 0$ *za* $A \subseteq Z^\circ$,

(ii) $D(A, B) = \mathbf{R}^\circ$ *za* $Z^\circ \subset A$.

Dokaz. U dokazu koristimo rezultat H. RATSCHEKA, naveden u odeljku 2.2. Neka su $A(a)$ i $B(b)$ ideali s-prstena I° određeni redom elementima a i b. Kako je $B \subseteq A$, biće $q(b) \leqq q(a)$. Ako je $A \subseteq Z^\circ$, tada je svaki element x takav da je $q(x) \geqq q(a)$ distributivan u odnosu na par a, b, te je $D(A, B) = (I^\circ \backslash A) \cup 0$. Međutim, ako je $Z^\circ \subset A$, ne postoje u $I \backslash R$ distributivni elementi u odnosu na svaki par a, b, $a \in A$, $b \in B$ (na primer, ako je $q(a)\,q(b) < 0$) te je $D(A, B) = \mathbf{R}^\circ$.

5.2. Kvazirešavanje linearnih jednačina u s-prstenu

0. Posmatra se s-prsten sa delimičnom involucijom i, kao kod s-grupa, uvodi pojam kvazirešenja jednačina.

1. Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa i $N(\cdot)$ njena podpolugrupa sa involucijom f, tj. polugrupa (N, f). Polugrupa $S(\cdot)$ sa f-polugrupom (N, f) kao podpolugrupom možemo nazvati polugrupom sa delimičnom involucijom i označiti sa $(S, N(f))$.

Posmatrajmo sada s-prsten $(S, +, -, \cdot)$, čija je multiplikativna polugrupa $(S, \cdot)$ polugrupa sa delimičnom involucijom. Neka to bude polugrupa $(S, N(/))$. Takav s-prsten možemo nazvati s-prstenom sa delimičnom involucijom i označiti sa $(S, +, -, \cdot, N(/))$.

Preglednosti radi dajemo na jednom mestu osobine operacija s-prstena $(S, +, -, \cdot, N(/))$:

$$
\begin{array}{ll}
a+(b+c)=(a+b)+c, & a(bc)=(ab)c, \\
a+b=b+a, & ab=ba, \\
a+0=a, & 1\cdot a=a, \\
-(a+b)=-a+(-b), & /(ab)=(/a)(/b) \quad (a, b\in N), \\
-(-a)=a, & /(/a)=a \quad (a\in N), \\
a+x=b+x \Rightarrow a=b, & \\
(-a)b=-(ab), & (-a)(-b)=ab,
\end{array}
$$

$a(b+c)=ab+ac$ ako je a distributivan u odnosu na b, c.

Slično kao kod s-grupa uvešćemo pojam kvazirešenja (k-rešenja) linearnih jednačina u s-prstenu.

Neka je, ponovo, $L_p(\alpha x)$ linearna kombinacija elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_p \in S$, ali sada u s-prstenu S, tj. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in S$, i

$$L_p(\alpha x, a)=L_p(\alpha x)+a \quad (a\in S).$$

Definicija 5.8. *Za dve linearne jednačine* (A) *i* (B) *kažemo da su kvaziekvivalentne u s-prstenu* $(S, +, -, \cdot, N(/))$ *u sledećim slučajevima:*

(i) *Ako su* (A) *i* (B) *kvaziekvivalentne u smislu definicije* 4.8, *gde su sada* i, j, k, m, n *iz* S.

(ii) (A): $\quad \gamma L_p(\alpha x, a)=L_q(\beta x, b)$,

(B): $\quad L_p(\alpha x, a)=L_q(\beta x, b)/\gamma \qquad (\gamma\in N)$.

Definicija 5.9. *Pod kvazirešenjem sistema linearnih jednačina u s-prstenu* $(S, +, -, \cdot, N(/))$ *podrazumevamo rešenje kvaziekvivalentnog sistema linearnih jednačina.*

Na primer, k-rešenje jednačina $a+x=b$ i $cy=d\,(c\in N)$ su redom elementi $x=b-a$ i $y=d/c$. $\left(\text{Umesto } d/c \text{ pisaćemo i } \frac{d}{c}\right)$.

2. Odredimo k-rešenje nekih jednostavnijih jednačina i sistema jednačina. Posmatrajmo najpre jednačinu

$$ax+b=cx+d. \tag{1}$$

Kvazirešenje jednačine (1) dato je sa $x=\frac{d-b}{a-c}$ ako je $a-c\in N$. Zaista, iz (1) redom dobijamo

$$ax-cx=d-b,$$

$$(a-c)\,x=d-b, \tag{2}$$

te je $x=\frac{d-b}{a-c}$ za $a-c\in N$.

Posmatrajmo sada sistem jednačina

$$\begin{aligned} ax+by&=u,\\ cx+dy&=v. \end{aligned}$$

Iz (3) dobijamo

$$\begin{aligned} by&=u-ax,\\ dy&=v-cx, \end{aligned}$$

odakle je

$$bdy=d(u-ax)=b\,(v-cx). \tag{4}$$

Razlikovaćemo tri slučaja:

I. Neka $b\in N$, tada (4) možemo pisati kao

$$\frac{d}{b}(u-ax)=v-cx. \tag{5}$$

Ako je $\frac{d}{b}$ distributivan u odnosu na u i $-ax$, onda (5) postaje

$$\frac{d}{b}u-\frac{d}{b}ax=v-cx,$$

odakle dobijamo, koristeći prethodni rezultat, da je

$$x=\frac{v-\frac{d}{b}u}{c-\frac{d}{b}a} \quad \text{ako} \quad c-\frac{d}{b}a\in N. \tag{6}$$

Prema tome, ako $b\in N$ i ako je $\frac{d}{b}$ distributivan u odnos na u i

$$a\left(v-\frac{d}{b}u\right)\Big/\left(a\frac{d}{b}-c\right),$$

onda je k-rešenje sistema (3) dato sa (6).

II. Slično imamo, ako $d\in N$ i ako je $\frac{b}{d}$ distributivan u odnosu na v i

$$c\left(u-\frac{b}{d}v\right)\Big/\left(c\frac{b}{d}-a\right),$$

onda je k-rešenje sistema (3) dato sa

$$x=\frac{u-\frac{b}{d}v}{a-\frac{b}{d}c}, \quad \text{ako} \quad a-\frac{b}{d}c\in N.$$

III. Najzad, neka b, $d \notin N$. Ako je b distributivan u odnosu na v i $-cx$, a d distributivan u odnosu na u i $-ax$, tada (4) postaje

$$du - adx = bv - bcx,$$

tj.

(7) $$x = \frac{du - bv}{ad - bc}, \quad \text{ako} \quad ad - bc \in N.$$

Znači, ako je b distributivan u odnosu na v i $c(bv - du)/(ad - bc)$, a d distributivan u odnosu na u i $a(bv - du)/(ad - bc)$ i b, $d \notin N$, onda je k-rešenje sistema (3) element dat sa (7).

Na isti način bi odredili i k-rešenje y sistema (3).

Dok jednačina (1) uvek može da se k-reši, to nije slučaj sa sistemom (3). Može se desiti da sistem (3) možemo k-rešiti po x, a ne možemo po y, ili obrnuto. Specijalno, ako a, b, c, $d \in R$, tada sistem (3) uvek može da se k-reši ako je $ad - bc \neq 0$.

6. REŠAVANJE NEKIH INTERVALNIH JEDNAČINA

0. U ovom odeljku pokazujemo, na primerima, da je od interesa uvesti pojam kvazirešenja intervalnih jednačina, i određujemo prava i k-rešenja nekih intervalnih jednačina.

1. Posmatrajmo sistem linearnih intervalnih jednačina

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1}$$

u s-prstenu $I^\circ(+,-,\cdot,N(/))$ i odgovarajući sistem realnih linearnih jednačina

$$\alpha_{i1}\chi_1+\alpha_{i2}\chi_2+\cdots+\alpha_{in}\chi_n=\beta_i, \tag{2}$$

gde $\chi_j\in x_j$, $\alpha_{ij}\in a_{ij}$, $\beta_i\in b_i$ $(j=1,\ldots,n)$.

Ako je

$$(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n)$$

rešenje sistema (2), onda n-torku intervala

$$([\min\chi_1,\max\chi_1],\ldots,[\min\chi_n,\max\chi_n])$$

nazivamo „pravim" rešenjem sistema (1).

Pravo rešenje sistema intervalnih jednačina (1) različito je, u opštem slučaju, od „algebarskog" rešenja (tj. rešenja) sistema (1). Sistem jednačina (1) može imati algebarsko rešenje a da nema pravo rešenje. Na primer, jednačina $\left[-\frac{1}{3},1\right]x=[-1,2]$ nema pravo rešenje, jer $0\in\left[-\frac{1}{3},1\right]$, ali ima algebarsko rešenje $x=[-1,2]$ (G. Alefeld, J. Herzberger, [1]). Može da se desi i obrnuto, tj. da sistem (1) ima pravo rešenje a da nema algebarsko rešenje. Na primer, jednačina $x+[1,5]=[2,4]$ nema algebarsko rešenje, jer iz $r(x+[1,5])=r([2,4])$ sleduje $r(x)+2=1$, što je nemoguće, ali ima pravo rešenje $x=[-4,3]$. (Algebarskim rešavanjem intervalnih jednačina bavio se Ş. Berti ([1], [2], [3], [4], [5]).)

2. Vidimo da se pravo rešenje i algebarsko rešenje neke intervalne jednačine ne moraju poklapati. Na žalost, ne moraju se poklopiti ni pravo i kvazirešenje neke intervalne jednačine. Dajmo nekoliko primera.

Posmatrajmo intervalnu jednačinu

$$ax+b=cx+d, \tag{3}$$

gde $a-c\in N$. Pravo rešenje jednačine (3) biće interval $x=[\min\chi, \max\chi]$, gde je χ rešenje jednačine

$$\alpha\chi+\beta=\gamma\chi+\delta,\ (\alpha\in a,\ \beta\in b,\ \gamma\in c,\ \delta\in d,\ \chi\in x).$$

Lako se može dokazati da je za $a-c\in N^+$

(i) $$x=\left[\frac{d_1-b_2}{a_2-c_1},\ \frac{d_2-b_1}{a_1-c_2}\right],\ d-b\in N^+,$$

(ii) $$x=\left[\frac{d_1-b_2}{a_1-c_2},\ \frac{d_2-b_1}{a_2-c_1}\right],\ d-b\in N^-,$$

(iii) $$x=\left[\frac{d_1-b_2}{a_1-c_2},\ \frac{d_2-b_1}{a_1-c_2}\right],\ d-b\in Z^\circ.$$

Neposredno se može utvrditi da je svaki od izraza (i) – (iii), pod datim uslovima, jednak sa $x=\dfrac{d-b}{a-c}$.

Ako $a-c\in N^-$, množenjem jednačine (3) sa -1 dobijamo prethodni slučaj.

Na taj način smo dokazali da je pravo rešenje jednačine (3) jednako njenom kvazirešenju.

Poznato je da je takođe pravo rešenje sistema jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n, \end{aligned}$$

gde $a_{ij}\in R$, $b_i\in I^\circ$ $(i,\ j=1,\ldots,n)$, jednako njegovom kvazirešenju.

3. Odredimo rešenje sistema intervalnih jednačina

(4) $$\begin{aligned} ax+by&=u,\\ cx+dy&=v, \end{aligned}$$

u nekim specijalnim slušajevima. Da bi sistem (4) imao jedinstveno pravo rešenje potrebno je i dovoljno da bude $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ za svako $\alpha\in a$, $\beta\in b$, $\gamma\in c$, $\delta\in d$, tj. da važi $ad-bc\in N$. Odredimo bliže taj uslov.

Uvedimo oznaku $D=ad-bc$. Da bi utvrdili kada $D\in N$ treba da odredimo znak funkcionele $t(D)$ (odeljak 2.1), jer $D\in N$ ako i samo ako je $t(D)>0$. Pri tome ćemo koristiti formule iz teoreme 2.2.

Primetimo, najpre, da $D\in Z^\circ$ uvek kada su elementi jedne vrste ili jedne kolone intervalne matrice

(5) $$\begin{Vmatrix} a & b\\ c & d \end{Vmatrix}$$

iz skupa Z°. Razmotrimo zatim ostale slučajeve.

Neka je prvo $\operatorname{sgn}(ad) = -\operatorname{sgn}(bc)$, tada je $t(D) = t(ad) + t(-bc) = t(ad) + t(bc)$. Ako $a, b, c, d \in N$, biće $t(D) = t(a)\,t(d) + t(b)\,t(c) > 0$. Međutim, ako $a, b, c \in N$, a $d \in Z^{\circ}$, onda je $t(D) = |p(a)|\,t(d) + t(b)\,t(c)$, te je $t(D) > 0$ ako i samo ako je $|p(a)|\,t(d) + t(b)\,t(c) > 0$, odakle, korišćenjem relacije $t(a) = q(a)\,|p(a)|$, dobijamo ekvivalentni uslov $|p(ad)|\,q(d) + |p(bc)|\,q(bc) > 0$. Isti uslov važi ako $a, d \in Z^{\circ}$, a $b, c \in N^{\circ}$ i pored toga je $q(d) \leqq q(a)$.

U drugom slučaju, kada je $\operatorname{sgn}(ad) = \operatorname{sgn}(bc) = \operatorname{sgn}(D)$, biće $t(D) = t(ad) - |p(-bc)| = t(ad) - |p(bc)|$. Odavde sleduje da je $t(D) \leqq 0$ ako je bar jedan od intervala a, d iz skupa Z°, jer je, na primer, $t(D) = t(d)\,|p(a)| - |p(bc)| \leqq 0$ za $d \in Z^{\circ}$ i $q(d) \leqq q(a)$. Prema tome posmatramo samo slučaj $a, d \in N$, kada je $t(D) = t(a)\,t(d) - |p(bc)|$ i važi $t(D) > 0$ ako i samo ako je

$$|p(ad)|\,q(ad) > |p(bc)|.$$

Time smo dokazali da sistem intervalnih jednačina (4) ima jedinstveno pravo rešenje samo u sledećim slučajevima:

(i) Tri od elemenata matrice (5) su istog znaka, a četvrti je suprotnog. Pri tome ili 1° $a, b, c, d \in N$, ili 2° elementi na jednoj dijagonali matrice (5) su iz skupa N, a bar jedan od ostalih je iz Z°, pri čemu mora da važi

$$\left|\frac{p(ad)}{p(bc)}\right| + \frac{\min(q(b),\, q(c))}{q(ad)} > 0 \quad \text{ako } a, d \in N.$$

(ii) Po dva od elemenata matrice (5) su istog znaka i elementi na jednoj dijagonali matrice (5) su iz N, pri čemu mora da važi

$$\left|\frac{p(ad)}{p(bc)}\right| > \frac{1}{q(ad)} \quad \text{ako } a, d \in N.$$

4. Sada ćemo odrediti kvazirešenje sistema (4) u slučaju (i) pod uslovom 1°. Da bi olakšali posao, umesto sistema (4) posmatraćemo sistem

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} ax - by &= u, \\ cx + dy &= v, \end{aligned} \qquad a, b, c, d \in N^{+}, \quad u, v \in I^{\circ}.$$

(Ovaj sistem uvek ima pravo rešenje.)

Pretpostavimo da sistem (6) ima kvazirešenje

$$\text{(7)} \qquad x = \frac{X}{D}, \quad X = \frac{d}{b}\,u + v, \quad D = \frac{d}{b}\,a + c.$$

To je moguće ako i samo ako je interval $\frac{d}{b}$ distributivan u odnosu na intervale u i $-ax$. Sa druge strane, interval $\frac{d}{b}$ je distributivan u odnosu na intervale u i $-ax$ ako i samo ako je 1′ $u, -ax \in N$ i $\operatorname{sgn}(u) = \operatorname{sgn}(-ax)$, ili 2′ $u, -ax \in Z^{\circ}$. Ova dva uslova su ekvivalentni redom sledećim uslovima 1″ $u, x \in N$ i $\operatorname{sgn}(u) = -\operatorname{sgn}(X)$, 2″ $u, x \in Z^{\circ}$.

Kvazirešenje (7) sistema (6) može da se razvije, tj. napiše u jednom od oblika:

$$\text{(i)}\qquad x=\left[\frac{\frac{d_1}{b_1}u_1+v_1}{\frac{d_1}{b_1}a_1+c_1},\ \frac{\frac{d_2}{b_2}u_2+v_2}{\frac{d_2}{b_2}a_2+c_2}\right]\quad \text{ako } u\in N^+,$$

$$\text{(ii)}\qquad x=\left[\frac{\frac{d_2}{b_1}u_1+v_1}{\frac{d_2}{b_1}a_2+c_2},\ \frac{\frac{d_1}{b_2}u_2+v_2}{\frac{d_1}{b_2}a_1+c_1}\right]\quad \text{ako } u\in N^-,$$

$$\text{(iii)}\qquad x=\left[\frac{\frac{d_2}{b_1}u_1+v_1}{\frac{d_1}{b_2}a_1+c_1},\ \frac{\frac{d_2}{b_1}u_2+v_2}{\frac{d_1}{b_2}a_1+c_1}\right]\quad \text{ako } u\in Z^\circ.$$

Pravo rešenje sistema (6), kao što znamo, dobijamo određivanjem najveće i najmanje vrednosti funkcije

$$\text{(8)}\qquad \chi=\frac{\delta\xi+\beta\eta}{\alpha\delta+\beta\gamma},$$

gde $\alpha\in a$, $\beta\in b$, $\gamma\in c$, $\delta\in d$, $\xi\in u$, $\eta\in v$, $\chi\in x$. Kako funkcija (8) dostiže svoju najmanju i najveću vrednost na granicama oblasti definisanosti, i to baš u temenima, to ne mogu u izrazima za $\min\chi$ i $\max\chi$, na primer, veličine a_1 i a_2 istovremeno da se pojave. Isto važi i za krajeve ostalih intervala.

Na osnovu toga možemo zaključiti da kvazirešenje (iii) ne može biti pravo rešenje sistema (6), dok kvazirešenja (i) i (ii) to mogu biti.

Odredimo pravo rešenje x sistema (6) u slučaju $u\in N^+$, $v\in N^-$, $du+bv\in N^-$. Jednostavno se dobija da je pravo rešenje u ovom slušaju

$$x=[\chi(a_1,\ b_2,\ c_1,\ d_1,\ u_1,\ v_1),\ \chi(a_2,\ b_1,\ c_2,\ d_2,\ u_2,\ v_2)]$$

$$=\left[\frac{d_1u_1+b_2v_1}{a_1d_1+b_2c_1},\ \frac{d_2u_2+b_1v_2}{a_2d_2+b_1c_2}\right]=\left[\frac{\frac{d_1}{b_2}u_1+v_1}{\frac{d_1}{b_2}a_1+c_1},\ \frac{\frac{d_2}{b_1}u_2+v_2}{\frac{d_2}{b_1}a_2+c_2}\right]$$

$$=\frac{\left[\frac{d_1}{b_2}u_1+v_1,\ \frac{d_2}{b_1}u_2+v_2\right]}{\left[\frac{d_1}{b_2}a_1+c_1,\ \frac{d_2}{b_1}a_2+c_2\right]}=\frac{\left[\frac{d_1}{b_2}u_1,\ \frac{d_2}{b_1}u_2\right]+[v_1,\ v_2]}{\left[\frac{d_1}{b_2}a_1,\ \frac{d_2}{b_1}a_2\right]+[c_1,\ c_2]}$$

$$=\frac{\left[\frac{d_1}{b_2},\ \frac{d_2}{b_1}\right][u_1,\ u_2]+[v_1,\ v_2]}{\left[\frac{d_1}{b_2},\ \frac{d_2}{b_1}\right][a_1,\ a_2]+[c_1,\ c_2]}=\frac{\frac{[d_1,\ d_2]}{[b_1,\ b_2]}[u_1,\ u_2]+[v_1,\ v_2]}{\frac{[d_1,\ d_2]}{[b_1,\ b_2]}[a_1,\ a_2]+[c_1,\ c_2]}=\frac{\frac{d}{b}u+v}{\frac{d}{b}a+c},$$

što je istovremeno i kvazirešenje.

Na isti način bismo mogli dokazati da je kvazirešenje (ii) u isto vreme i pravo rešenje sistema (6).

Evo i jednog primera da pravo rešenje ne mora biti i k-rešenje. Kvazi-rešenje sistema jednačina

$$[1,\ 2]\,x-[1,\ 3]\,y=[-1,\ 2],$$

$$[2,\ 5]\,x+[1,\ 4]\,y=[0,\ 3]$$

je interval $x_k=[-12/7,\ 33/7]$, dok je pravo rešenje $x_p=[-2/3,\ 11/6]$. Primetićemo da je $x_p \subset x_k$.

7. BIBLIOGRAFIJA

ALEFELD G.

[1] *Über Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten einer komplexen Intervallarithmetik.* ZAMM **50** (1970), 455—465.

[2] *Bemerkungen zur Einschliessung der Lösung eines linearen Gleichungssytems.* ZAMM **50** (1970), 33—35.

ALEFELD G. und J. HERZBERGER

[1] *Einführung in die Intervallrechnung.* Zürich 1974.

ALEFELD G., J. HERZBERGER und O. MAYER

[1] *Über neuere Gesichtspunkt beim numerischen Rechnen.* Math. und naturwiss. Unterr. **24** (1971), 458—467.

APOSTOLATOS N. und U. KULISCH

[1] *Grundlagen einer Maschinenintervallarithmetik.* Computing **2** (1967), 89—104.

[2] *Approximation der erweiterten Intervallarithmetik durch die einfache Maschinenintervallarithmetik.* Computing **2** (1967), 181—194.

ATIYAN M. F. and I. G. MACDONALD

[1] *Introduction to Commutative Algebra* (na ruskom). Moskva 1972.

BEECK H.

[1] *Über intervallanalytische Methoden bei linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoefizienten und Zusammenhänge mit der Fehleranalysis.* Diss., Univ. München, 1971.

BERTI Ş.

[1] *The Solution of an Interval Equation.* Mathematica **11** (34) (1969), 189—194.

[2] *Intervalele şi aritmetica lor în analiza numerică.* Gazeta Matematica *A* **75** (1970), 309—313.

[3] *Some Relations Between Interval Functions,* I. Mathematica **14** (37) (1972), 9—26.

[4] *Aritmetica şi analiza intervalelor.* Revista de analiză numerică şi teoria aproximaţiei **1** (1972), 21—39.

[5] *On the Generalized Sum of Intervals.* Revue d'analyse numérique et de la théorie de l'approximation **3** (1974), 11—21.

BOURBAKI N.

[1] *Algèbre commutative* (na ruskom). Moskva 1971.

CHRIST H.

[1] *Realisierung einer Maschinen-Intervallarithmetik mit beliebigen Algol-60-Compilern.* Electron. Rechenanl. **10** (1968), 217—222.

CLIFFORD A. H. and G. B. PRESTON

[1] *The Algebraic Theory of Semigroups,* I—II (na ruskom). Moskva 1972.

ČUPONA Đ. i B. TRPENOVSKI

[1] *Predavanja po algebra,* II. Skopje 1973.

FISCHER H.
[1] *Intervall-Arithmetiken für komplexe Zahlen.* ZAMM **53** (1973), 190—191.
[2] *Normbälle in der Intervallrechnung.* ZAMM **54** (1974), 217—218.

FRÖHLICH A.
[1] *Distributively Generated Near-Rings,* I. Proc. London Math. Soc. **8** (1958), 76—108.

FUCHS L.
[1] *Infinite Abelian Groups,* I (na ruskom). Moskva 1974.

GARGANTINI I. and P. HENRICI
[1] *Circular Arithmetic and the Determination of Polynomial Zeros.* Numer. Math. **18** (1972), 305—320.

HAHN W.
[1] *Intervallarithmetik in normierten Räumen und Algebren.* Institut für angew. Math. Univ. Graz, 1971.

HANSEN E.
[1] *Topics in Interval Analysis.* Oxford 1969.

KAPLANSKY I.
[1] *Commutative Rings.* Chicago 1974.

KRACHT M. und G. SCHRÖDER
[1] *Zur Intervallrechnung in linearen Räumen.* Computing **11** (1973), 73—79.

KRAWCZYK R.
[1] *Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken.* Computing **4** (1969), 187—201.

KULISCH U.
[1] *An Axiomatic Approach to Rounded Computations.* Math. Research Center Univ. Wisconsin, 1020, 1969.
[2] *On the Concept of a Screen.* Ibid. 1084, 1970.
[3] *Rounding Invariant Structures.* Ibid. 1103, 1970.
[4] *Interval Arithmetic Over Completely Ordered Ringoids.* Ibid. 1105, 1970.
[5] *An Axiomatic Approach to Rounded Computation.* Numer. Math. **18** (1971), 1—17.
[6] *Axiomatik des Numerischen Rechnens.* ZAMM **52** (1972), 211.

КУРОШ А. Г.
[1] *Общая алгебра.* Москва 1974.

LAMBEK J.
[1] *Lectures on Rings and Modules* (na ruskom). Moskva 1971.

LJAPIN E. S.
[1] *Semigroups.* Providence 1974.

MAYER O.
[1] *Über Eigenschaften von Intervallprozessen.* ZAMM **48** (1966), 86—87.
[2] *Algebraische und metrische Strukturen in der Intervallrechnung und einige Anwendungen.* Computing **5** (1970), 144—162.
[3] *Über eine Klasse komplexer Intervallgleichungssysteme mit iterationsfähiger Gestalt.* Ibid. **6** (1970), 104—106.
[4] *Über die Bestimmung von Einschliessungsmengen für die Lösungen linearer Gleichungssysteme mit fehler-behafteten Koeffizienten.* Elektron. Datenverarb. **12** (1970), 164—167.
[5] *Über intervallmässige Iterationsverfahren bei linearen Gleichungssystemen und allgemeineren Intervallssystemen.* ZAMM **51** (1970), 117—124.

McMORRIS F. R. and M. SATYANARAYANA
[1] *Categorical Semigroups.* Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972), 271—277.

MITROVIĆ Ž. M.

[1] *Interval Semigroups*. These Publications № **544**—№ **576** (1976), 127—143.

MOORE R. E.

[1] *Interval Analysis*. New Jersey 1966.

ORTOLF H. J.

[1] *Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik*. Ber. Ges. Math. Datenverarb. **11** (1969).

PETRICH M.

[1] *On a Class of Completely Semisimple Inverse Semigroup*. Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970), 671—676.

PETROVIĆ M.

[1] *Računanje sa brojnim razmacima*. Beograd 1969.

RATSCHEK H.

[1] *Über einige Intervallarithmetische Grundbegriffe*. Computing **4** (1969), 43—55.

[2] *Über die algebraischen Grundlagen der Intervallarithmetik*. Institut für angew. Math. Univ. Graz, 1970.

[3] *Die binären Systeme der Intervallarithmetik*. Computing **6** (1970), 295—308.

[4] *Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik*. J. reine argew. Math. **252** (1970), 128—138.

[5] *Die Subdistributivität der Intervallarithmetik*. ZAMM **51** (1971), 189—192.

[6] *Gleichheit von Product und Formalproduct bei Intervallpolynomen*. Computing **10** (1972), 245—254.

[7] *Intervallarithmetik-mit Zirkel und Lineal*. Elem. Math. **28** (1973), 93—96.

[8] *Über einige Wesenszüge der Intervallarithmetik*. Math. Phys. Semesterber. **21** (1974), 67—79.

ROKNE J. and P. LANCASTER

[1] *Complex Interval Arithmetic*. Comm. ACM **14** (1971), 111—112.

SPANIOL O.

[1] *Die Distributivität in der Intervallarithmetik*. Computing **5** (1970), 6—16.

SUNAGA T.

[1] *Theory of an Interval Algebra and Its Applications to Numerical Analysis*. RAAG Memoirs **2** (1958), 29—46.

ULLRICH CH.

[1] *Zur Axiomatik des numerischen Rechnens*. ZAMM **53** (1973), 209—211.

WERNER J.

[1] *Grundlagen einer Intervallarithmetik*. Institut für angew. Math. Univ. Graz, 1968.

WIPPERMANN H. W.

[1] *Realisierung einer Intervallarithmetik in einem* ALGOL-60-*System*. Elektron. Rechenanl. **9** (1967), 224—233.

YOUNG R. C.

[1] *The Algebra of Many-Valued Quantities*. Math. Ann. **104** (1931), 260—290.

SUMMARY

This paper contains the following chapters.

0. Introduction.

1. The first chapter does not contain new results. Here we explain the importance of the interval calculus in short. We also give the survey of the attained results in the interval arithmetic. Within that we yield the fundamental notions and the most essential properties of the various interval arithmetics, and also a new algebraic structure — the quasilinear space.

2. The first part of this chapter gives three different interval representations: The first representation by the ends of an interval, the second by the middle and half-width and the third one by the functionals p and q.

Then we introduce a new functional t which is more convenient for practical use than the functional q, and give the mutual relations between this new functional and those known ones.

In accordance with these relations we prove two theorems which have a big practical consideration.

In the second part we generalize one RATSCHEK's result in connection with the distributive law.

3. In the first part of the third chapter we study a special class of commutative semigroups. Namely, if $E(*)$ and $F(*)$ are two commutative semigroups such that $E\cap F=\emptyset$ and $\bar{H}=E\cup F$, and if we define the operation „$\cdot$“ in $\bar{H}$ by

$$a\cdot b=\begin{cases} a*b & \text{if} \quad a, b\in E \quad \text{or} \quad a, b\in F, \\ a & \text{if} \quad a\in E,\ b\in F, \\ b & \text{if} \quad a\in F,\ b\in E, \end{cases}$$

we get a commutative semigroup $\bar{H}(\cdot)$. After that we interrogate some properties of the semigroup $\bar{H}$ according to properties of the semigroups E and F. Thus, for example, the semigroup $\bar{H}$ is regular (inverse) if and only if the semigroups E and F are regular (inverse). Particularly, if E is a commutative band and F is an abelian group, then the semigroup H, of the class $\bar{H}$, is inverse.

After that we observe a semigroup $\bar{L}$ which is the direct product of any commutative group G and the semigroup $\bar{H}$, and yield its properties.

In the second part we observe two semigroups of the class H: the multiplicative interval semigroup $I^{\circ}(\cdot)$ and one its extension, the semigroup $J^{\circ}(\cdot)$.

4. In this chapter we introduce a new algebraic structure, so-called near-group (s-group).

The first part studies the most important properties of a semigroup with involution, and then we define a s-group like a commutative semigroup with involution, cancellation and zero. Particularly, we discuss an aperiodic divisible s-group and prove an important statement that an aperiodic divisible s-group S is the direct sum of its s-subgroups W and R, where

$$W = \{x - x \mid x \in S\} \quad \text{and} \quad R = \{x \mid x - x = 0,\ x \in S\}.$$

In the second part we introduce two new notions: quasi-equivalent linear equations and quasi-solution of a linear system.

For two linear equations (A) and (B) we say they are quasi-equivalent in a s-group S if:

(i) (A) and (B) are equivalent in S,

(ii) (A): $L_p(ix, a) + L_q(jx, b) = L_r(kx, c)$,

(B): $L_p(ix, a) = L_r(kx, c) - L_q(jx, b)$.

(iii) (A): $nL_p(ix, a) + mL_p(ix, a) = L_q(jx, b)$,

(B): $(n+m)L_p(ix, a) + na + ma = L_q(jx, b)$,

where $L_p(ix) = i_1 x_1 + i_2 x_2 + \cdots + i_p x_p$ and $L_p(ix, a) = L_p(ix) + a$, $x_1, x_2 \ldots, x_p$, $a \in S$.

Under the quasi-solution of a linear system in a divisible s-group we understand the solution of a quasi-equivalent linear system.

The third part gives some examples of s-groups. We show that

$$(I^{\circ}(+), -), \quad (N(\cdot), /) \quad \text{and} \quad (J^{\circ}(+), -)$$

are s-groups.

5. Here we also introduce a new algebraic structure — s-ring.

In the first part we define s-ring as an algebra $(S, +, -, \cdot)$ such that:

(i) $(S(+), -)$ is a s-group.

(ii) $(S, \cdot)$ is a commutative semigroup with the identity 1.

(iii) All the distributive elements of the algebra $(S, +, -, \cdot)$ form the set R.

(iv) $a0 = 0$ for each $a \in S$.

(v) $(-1)a = -a$ for each $a \in S$.

However, we do not study a s-ring in general, but only the s-ring $(I^{\circ}, +, -, \cdot)$. We compare a s-ring and an ordinary commutative ring with identity, and find similarities and differences out.

In the second part we also introduce the notion quasi-solution and quasi-solve particular equations. We demonstrate, for example, that the quasi-solution x of the linear sistem

$$ax + by = u,$$
$$cx + dy = v$$

may have some of following three forms:

(i) $$x=\frac{v-\frac{d}{b}u}{c-\frac{d}{b}a}, \quad c-\frac{d}{b}a\in N,$$

(ii) $$x=\frac{u-\frac{b}{d}v}{a-\frac{b}{d}c}, \quad a-\frac{b}{d}c\in N,$$

(iii) $$x=\frac{du-bv}{ad-bc}, \quad ad-bc\in N.$$

6. In this chapter we compare an (algebraic) solution, true solution and quasi-solution of interval equations. We demonstrate, on examples, that, in general, an algebraic and a true solution are different. However, we demonstrate, also on examples, that a true and a quasi-solution of interval equations often coincide.

7. Finally, literature at the end of this thesis is given in alphabetical order.

SADRŽAJ

0. *Uvod* | 1

1. ***Razvitak intervalnog računa*** | 2
   1.1. Važnost intervalnog računa | 2
   1.2. Obična intervalna aritmetika | 4
   1.3. Proširena intervalna aritmetika | 5
   1.4. Mašinska intervalna aritmetika | 7
   1.5. Kvazilinearni prostori | 8
   1.6. Kompleksna intervalna aritmetika | 10

2. ***Različiti načini predstavljanja intervala*** | 15
   2.1. Intervalne funkcionele i veze između njih | 15
   2.2. Primena funkcionela kod subdistributivnosti | 20

3. ***Komutativne polugrupe*** | 23
   3.1. Neke klase komutativnih polugrupa | 23
   3.2. Intervalne polugrupe | 27

4. ***Polugrupe sa involucijom*** | 30
   4.1. Skorogrupe | 30
   4.2. Pojam kvazirešenja jednačina | 35
   4.3. Intervalne s-grupe | 37

5. ***Jedno uopštenje prstena*** | 40
   5.1. Pojam i osobine s-prstena | 40
   5.2. Kvazirešavanje linearnih jednačina u s-prstenu | 44

6. ***Rešavanje nekih intervalnih jednačina*** | 47

7. ***Bibliografija*** | 52

Summary | 55

TABLE DES MATIÈRES

№ **577**	D. S. MITRINOVIĆ — P. M. VASIĆ:	*Addenda to the monograph „Analytic inequalities“* I | 3
№ **578**	O. BOTTEMA — J. T. GROENMAN:	*On some triangle inequalities* | 11
№ **579**	P. M. VASIĆ — I. B. LACKOVIĆ:	*Notes on convex functions* I: *A new proof of Hadamard's inequalities* | 21
№ **580**	H. GUPTA — S. P. KHARE:	*On* $\binom{k}{k^2}$ *and the product of the first k primes* | 25
№ **581**	J. D. KEČKIĆ:	*Additiones to Kamke's treatise*, VIII: *On singular solutions of generalised Clairaut's equations* | 30
№ **582**	P. M. VASIĆ — I. MILOVANOVIĆ:	*On the ratio of means* | 33
№ **583**	V. LJ. KOCIĆ:	*A few remarks on a previous paper regarding the convergence of certain sequences* | 38
№ **584**	G. BENNETT:	*Multiple triangle inequalities* | 39
№ **585**	V. LJ. KOCIĆ:	*Theorems on nonlinear superpositions: The general first order equation* | 45
№ **586**	D. V. SLAVIĆ:	*Transformation of the continued fraction into a rational function* | 49
№ **587**	L. N. ĐORĐEVIĆ:	*Proof of a combinatorial identity* | 53
№ **588**	L. CARLITZ:	*A theorem on linear exponential sums* | 55
№ **589**	M. BECKER — E. L. STARK:	*An extremal inequality for the Fourier coefficients of positive cosine polynomials* | 57
№ **590**	G. S. LESSELLS — M. J. PELLING:	*An inequality for the sum of two angle bisectors and a median* | 59

№ **591** L. N. ĐORĐEVIĆ: *Proof of a combinatorial identity using multiple integration* | 63

№ **592** B. G. PACHPATTE: *On some fundamental finite difference inequalities* | 65

№ **593** A. IVIĆ: *A property of Ramanujan's sums concerning totally multiplicative functions* | 74

№ **594** A. LUPAS: *Inequalities for the roots of a class of polynomials* | 79

№ **595** L. CARLITZ: *A combinatorial identity of L. N. Đorđević* | 86

№ **596** V. BOTTERI: *Some sums involving fractional parts or* $[x]$ | 89

№ **597** R. E. SHAFER: *Analytic inequalities obtained by quadratic approximation* | 96

№ **598** D. S. MITRINOVIĆ: *Tiberiu Popoviciu — In memoriam* | 98

№ **599** G. MILOVANOVIĆ: *O nekim funkcionalnim nejednakostima* | 1–64

№ **600** D. S. MITRINOVIĆ — P. S. BULLEN — P. M. VASIĆ: *Sredine i sa njima povezane nejednakosti*

№ **601** Ž. M. MITROVIĆ: *Prilozi teoriji intervalnog računa i njenoj primeni*