YU ISSN 0522—8441

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PUBLIKACIJE

ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA

SERIJA:

MATEMATIKA I FIZIKA

№ 600 (1977)

BEOGRAD

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

Adresser les échanges contre ces *Publications* et toute correspondance à:
Katedra matematike, Elektrotehnički fakultet
11001 *Beograd, poštanski fah* 816, *Yougoslavie*

Ces *Publications* sont éditées par la Faculté d'Électrotechnique de Belgrade
avec le concoursde la Faculté d'Électronique de Niš

*

The Journal publishes papers up to four printed pages, as a rule, relevant to pure and applied mathematics in general, but, in particular, papers concerning differential and functional equations, special functions, inequalities, combinatorial and numerical analysis. The papers in Serbo-Croatian, Russian, French, English and German are accepted.

The Journal also publishes original contributions from general physics and especially in engineering physics.

*

Reprints are not supplied either free of charge or against payment.

Štampanje ovih Publikacija finansijski je pomogla *Republička zajednica nauke Srbije*

D. S. MITRINOVIĆ, P. S. BULLEN, P. M. VASIĆ

SREDINE
I SA NJIMA POVEZANE NEJEDNAKOSTI
I

Recenzenti:

Dr Borivoje Mihailović, redovni profesor
Dr Radosav Ž. Đorđević, redovni profesor
Dr Dušan D. Adamović, vanredni profesor
Dr Jovan D. Dečkić, docent

Izdavanje ove monografije finansijski je pomogla Republička Zajednica Nauke Srbije

PREDGOVOR

Ovo je prvi deo monografije koja se odnosi na sredine i na nejednakosti koje stoje u vezi sa sredinama. Pisci su sebi postavili zadatak da monografija (I i II deo) što potpunije obuhvati navedena pitanja i da pri tome poveže izolovane rezultate i stvori od njih koherentnu celinu. Pisci su uvereni da su u tome u znatnoj meri uspeli. Za ovo je bilo potrebno dugotrajno istraživanje po raznim bibliotekama u svetu, jer se sredine proučavaju još od VI veka pre naše ere.

Sakupljen je ogroman dokumentarni materijal koji je trebalo obraditi i zatim odabrati ono što je vredno za publikovanje. Rezultati su brižljivo i sistematski praćeni od njihovog otkrivanja do danas i pri tome utvrđeno je da ima dosta svesnog ili nesvesnog ponovnog pronalaženja odavno poznatih činjenica, i tako su utvrđeni prioriteti mnogih rezultata. Najteže je bilo sa člancima iz XIX veka od kojih ogromna većina nije referisana u časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, jer ovaj časopis izlazi od 1871, a referiše o radovima objavljenim počev od 1868. Druga teškoća sa radovima iz XIX veka je u tome što su oni objavljeni u nekim od časopisa koji više ne izlaze a mogu se naći samo u malom broju biblioteka u svetu. Osim toga mnogi članci su objavljeni pod naslovima koji ne nagoveštavaju da je u njima reč o sredinama.

Ova monografija je po sadržaju i kompletnosti prva u svetu. Monografija *Medie* od GINIa i više njegovih saradnika, publikovana u Italiji 1958. i u prevodu na ruski 1970. u SSSR, koncentrisana je na primene sredina u statistici, dok je o teoriji sredina u opštem smislu vrlo malo rečeno. Uprkos tome, monografija *Medie* bila je korisna pri izradi naše monografije.

Izgleda da ima dve vrste matematičkih knjiga. S jedne strane, postoje dela koja teže da obuhvate predmet u svim njegovim vidovima ili bar u većini. U takvim delima pisci se trude da navedu sve rezultate u njihovom najbolje mogućnom obliku, i da uz to izlože ili potpune dokaze ili nacrte dokaza, zajedno sa uputima gde se potpuni dokazi mogu naći. Takve knjige, namenjene onima koji se profesionalno bave čistom ili primenjenom matematikom, retke su. Prvo takvo delo iz teorije nejednakosti, koje je unelo nešto reda u ovo neuređeno polje, je klasično delo HARDY, LITTLEWOOD, PÓLYA: *Inequalities*, objavljeno 1934. Koliko god da je ovo značajno delo bilo i još je uvek važno, ono nije sastavljeno sa ciljem da sve obuhvati: sastojalo se iz onog ukupnog znanja koje su tri matematičara prvog reda imali u oblasti u kojoj je svaki od njih dao bitne doprinose. Ma koliko da je to združeno znanje bilo široko, neminovno su postojale izvesne praznine: neki važni rezultati, kao na primer Steffensenova nejednakost, nisu ni pomenuti; izostavljeni su radovi izvesnih škola matematičara, a mnoge značajne ideje nisu bile razvijene već su se pojavile u vidu vežbi ili primedbi na kraju pojedinih poglavlja. Docnije delo BECKENBACH, BELLMAN:

Inequalities, objavljeno 1961, popravlja mnoge od tih propusta. Pa ipak ta je knjiga daleko od toga da bi potpuno obuhvatila ovo polje bilo u dubini bilo u obimu. Mnogo potpunije je skorašnje delo MITRINOVIĆ: *Analytic Inequalites*, objavljeno 1970. Za ovo delo u više prikaza rečeno je da je skoro potpuno obuhvatilo jedan prostrani deo teorije nejednakosti.

S druge strane, ima više dela iz nejednakosti namenjenih studentima ili nematematičarima. Ova uvode čitaoca u neki poseban deo teorije nejednakosti dajući mu da shvati šta su to nejednakosti i osposobljavajući ga da ide dalje ka knjigama višeg stupnja i detaljnijeg izlaganja koje su ranije spomenute. Dok takve knjige višeg stupnja postoje samo na engleskom, dotle ima odličnih elementarnih knjiga na raznim jezicima.

Usled širine teorije nejednakosti i raznovrsnosti primene nijedna od gore tri pomenute knjige ne znači poslednju reč u svim temama koje su obrađene. Većina nejednakosti je u zavisnosti od mnogih parametara a ono što je najprirodniji domen za te parametre nije uvek očigledno i obično ne predstavlja najširi mogući oblik u kojem nejednakost važi. I stoga je i najbrižljiviji autor prinuđen da bira; a ono što je izostavljeno od uslova ili obima primene jedne nejednakosti upravo može biti baš ono što je potrebno za neku posebnu primenu. U stvari potrebna su dela koja će iz prostrane teorije nejednakosti odabrati jedno prilično ograničeno polje i ovo obraditi u dubinu. Dakle, potrebno je za to polje uraditi ono što je, na primer, knjigom ZYGMUND: *Trigonometric Series* urađeno na polju harmonijske analize. Takvi koherentni delovi ove discipline postoje, jer teoriju nejednakosti ne sačinjava samo izvesna kolekcija nepovezanih rezultata.

Kao što je već rečeno, predmet ove monografije je teorija sredina. To bi bila jedna zaokružena oblast iz nejednakosti. Sredine su osnova za teoriju nejednakosti i za mnoge primene ove teorije na drugim poljima. Da uzmemo samo jedan primer: osnovna nejednakost za aritmetičku i geometrijsku sredinu može se naći gde viri, često tako prerušena da se jedva može prepoznati, iza nejednakosti u svakoj oblasti teorije nejednakosti. Ideja sredina široko je korišćena u teoriji verovatnoće, u statistici, u sumiranju redova i drugde. U ovoj monografiji pisci su hteli da izlože osobine sredine koje se pojavljuju u teoriji nejednakosti onoliko potpuno koliko su to bili u stanju. Koren ovog izlaganja može se naći u znatno skromnijem spisu MITRINOVIĆ i VASIĆ: *Sredine*, objavljenom 1969, u kojem je dat elementaran i kratak prikaz ovog predmeta.

U ovoj monografiji biće pružen iscrpan prikaz raznih sredina koje se javljaju u literaturi zajedno sa istorijom porekla raznih nejednakosti koje povezuju te sredine. Takođe će biti dat, što je mogućno kompletniji, katalog svih značajnih dokaza za osnovne rezultate, pošto ovi ukazuju na mnogobrojna mogućna tumačenja i primene. Takođe, nadamo se, biće izložene sve poznate nejednakosti koje su u vezi sa sredinama.

Ova monografija napisana je vrlo konciznim stilom, sa mnogo skraćenica što će možda otežati njeno čitanje. Data dokumentacija je kritički izložena, mada je ona, u izvesnoj meri, enciklopedijskog karaktera.

Pisci se nadaju da će aktivna matematička disciplina, teorija sredina, dobiti ovom monografijom nov impuls za dalja istraživanja kao i za dublje povezivanje u koherentnu celinu mnogobrojnih rezultata do sada poznatih.

Monografija će bez sumnje biti od koristi studentima zainteresovanim i za discipline koje se ne predaju u redovnoj nastavi. Međutim, monografija će biti izvor za teme i dokumentaciju u poslediplomskoj nastavi koja se sve više razvija u nas i u svetu.

Kako je u prirodi stvari da se čine propusti i greške, nadamo se da će čitalac koji ih zapazi obavestiti autore kako bi u eventualnim sledećim izdanjima materija bila prikazana potpunije i tačnije. Želimo takođe da između tih revizija održavamo ovo izlaganje u toku poslednjih saznanja iz ove oblasti tako što bi povremeni pregled novih rezultata bio objavljivan u Publikacijama Elektrotehničkog fakulteta Beogradskog Univerziteta, serija: Matematika i fizika, ili u drugim časopisima.

U pronalaženju i prikupljanju originalne literature potrebne za izradu ove monografije piscima su pružili veliku i dragocenu pomoć mnogobrojni matematičari širom sveta slanjem separata svojih članaka o sredinama, kao i mnoge biblioteke u svetu od kojih izdvajamo sledeće:

Biblioteka za matematiku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu,

Univerzitetska biblioteka „Svetozar Marković" u Beogradu,

Gosudarstvenaja biblioteka imeni Lenina u Moskvi,

Biblioteka Matematičkog instituta Univerziteta u Kopenhagenu,

Biblioteka Matematičkog instituta Univerziteta u Stuttgartu,

Biblioteka Matematičkog instituta Univerziteta u Bonnu,

Biblioteka Matematičkog instituta Henri Poincaré u Parizu,

Biblioteka U.E.R. Mathématique Univerziteta u Parizu (Paris-Orsay),

Biblioteka École Normale Supérieure u Parizu,

Biblioteka Matematičkog Departmana Univerziteta u Vancouveru,

Biblioteka Matematičkog Instituta u Beogradu,

Biblioteka Matematičkog fakulteta u Skoplju,

Biblioteka Matematičkog zavoda Univerziteta u Zagrebu.

Takođe dugujemo priznanje i zahvalnost za pomoć u iznalaženju izvorne literature mnogobrojnim bibliotekarima i matematičarima u svetu od kojih posebno navodimo:

Madame MARINA LISSANT (Kopenhagen), prof. C. BENEDETTI (Roma), I. BRATIĆ (Beograd), dr L. COMTET (Paris), W. DENNINGER (Stuttgart), prof. D. DIMITROVSKI (Skoplje), prof. A. GHIZZETTI (Roma), dr W. HEINERMAN (Hannover), prof. S. LAZOVIĆ (Niš), V. POPOVIĆ (Beograd), docent N. ROZOV (Moskva), prof. D. ŠILJAK (Santa Clara, USA), prof. M. SKALSKY (Carbondale, USA), prof. R. TATON (Paris).

U vezi sa izradom ove monografije vođena je živa korespodencija sa mnogobrojnim matematičarima i bibliotekarima u svetu. Na tom važnom i velikom poslu uspešno je sarađivala NADA OBRADOVIĆ, korespondent Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu.

Beograd i Vancouver
1. maja 1977. godine

D. S. MITRINOVIĆ, P. S. BULLEN, P. M. VASIĆ

ORGANIZACIJA MONOGRAFIJE

Monografija je podeljena u dva dela i pojaviće se u dve posebne knjige.

Prva knjiga obuhvata veći deo materije koja je obrađena u monografiji.

Druga knjiga sadržaće aksiomatsko zasnivanje sredina, istorijski razvoj pojma sredine, Gaussove aritmetičko-geometrijske i sa njima povezane sredine. Biće reči takođe o sredinama u kompleksnom području, o integralnim sredinama i o raznim sredinama koje nisu ušle u prvi deo monografije.

Bibliografija u prvoj knjizi odnosi se takođe i na tekst u drugoj knjizi monografije. Bibliografija u drugoj knjizi biće dopunjena novim referencima. Na kraju druge knjige biće dati indeksi pojmova i imena kao i dopuna bibliografije.

Monografija je podeljena na poglavlja, a poglavlja na odeljke. Pododeljci nemaju svuda naslove, ali su i tada cifarskim oznakama navedeni u sadržaju monografije.

Prilikom pozivanja na formulu iz istog poglavlja navedena je samo oznaka formule, npr. (22). Ukoliko je reč o formuli iz drugog poglavlja, naveden je i redni broj poglavlja. Tako, na primer, formula (I.6) označava formulu (6) iz poglavlja I. Ista je stvar i prilikom pozivanja na neku od teorema ili definicija (na primer, teorema I.8 označava teoremu 8 iz poglavlja I). Kod primedbi naveden je, pored broja poglavlja, i broj odeljka i pododeljka, na primer, II.3.3.1° označava primedbu 1° iz II poglavlja pododeljak 3.3.

SADRŽAJ

OZNAKE

$\boldsymbol{a}$ označava niz $(a_1, \ldots, a_n)$

$\vec{\alpha}$ označava niz $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$f(\boldsymbol{a})$ označava niz $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$

$\mathbf{0}$ označava niz $(0, \ldots, 0)$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ označava niz $(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$

$\boldsymbol{ab}$ označava niz $(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$

$\boldsymbol{a}_i' = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

Ako je $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, niz $A = (A_1, \ldots, A_n)$ je definisan pomoću $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$

C označava Cauchyevu nejednakost

H označava Hölderovu nejednakost

M označava nejednakost Minkowskog

GA označava nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine

N označava skup prirodnih brojeva

I označava interval

R označava skup realnih brojeva

SKRAĆENICE ZA KNJIGE KOJE SE U TEKSTU ČEŠĆE SPOMINJU

BB = BECKENBACH, E. F., R. BELLMAN: *Inequalities*. Berlin — Heidelberg — New York 1961, 1965, 1971 (u tekstu je pozivanje na drugo izdanje).

HLP = HARDY, G. H., J. E. LITTLEWOD, G. PÓLYA: *Inequalities*. Cambridge 1934, 1952, 1959, 1964, 1967; Moskva 1948; Peking 1965 (u tekstu je pozivanje na drugo englesko izdanje).

M = MITRINOVIĆ, D. S. (in cooperation with P. M. VASIĆ): *Analytic inequalities*. Berlin — — Heidelberg — New York 1970; *Analitičke nejednakosti*. Beograd 1970. (u tekstu je pozivanje na englesko izdanje).

P = POPOVICIU, T.: *Les fonctions convexes*. Actualités Sci. Ind. No. **922**. Paris 1944.

RV = ROBERTS, A. W., D. E. VARBERG: *Convex functions*. New York—London 1973.

S_1 = *Inequalities*, Proceedings of a symposium held at Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, August 19—27, 1965. Edited by O. SHISHA. New York—London 1967.

S_2 = *Inequalities* II, Proceedings of the second symposium on inequalities held at the United States Air Force Academy, Colorado, August 14—22, 1967. Edited by O. SHISHA. New York—London 1970.

S_3 = *Inequalities* III, Proceedings of the third symposium on inequalities held at the University of California, Los Angeles, September 1—9, 1969. Edited by O. SHISHA. New York—London 1970.

Poglavlje I:

Uvod

1. PREDMET UVODA

U ovom poglavlju izložićemo neke pojmove i rezultate koji će biti potrebni u ovoj monografiji, ali nećemo biti iscrpni. Štaviše ako je rezultat koji se navodi lako pristupačan, uputićemo čitaoca na literaturu, jugoslovensku i inostranu, u kojoj se mogu naći dokazi i potrebni detalji.

2. NEKE OSOBINE POLINOMA

Izvesne jednostavne osobine polinoma mogu se iskoristiti da bi se izvele neke od osnovnih nejednakosti koje će biti razmatrane u ovoj monografiji. Takođe, izvesne jednostavne nejednakosti, koje se pojavljuju na više mesta, mogu se jednostavno dobiti iz osobina nekih specijalnih polinoma. Ovi rezultati su skupljeni na jednom mestu, radi lakšeg pozivanja na njih.

Svi polinomi koje ćemo razmatrati su sa realnim koeficijentima. Najpre ćemo navesti neke njihove osnovne osobine i to bez dokaza. Dokazi se mogu naći u literaturi (videti na primer: Mitrinović i Đoković [1] ili Uspensky [2]).

Teorema 1. *Polinom stepena n ima najviše n realnih nula.*

Teorema 2. (*Dekartovo pravilo*). *Broj pozitivnih nula polinoma jednak je broju varijacija njegovih koeficijenata ili je za paran broj manji od broja ovih varijacija.*

Teorema 3. (*Rolleova teorema*). *Između dve uzastopne realne nule polinoma p nalazi se bar jedna nula polinoma p'.*

Teorema 4. *Ako je $p(a)\,p(b)<0$, gde su a i b $(a<b)$ realni brojevi, polinom p ima bar jednu nulu između a i b.*

Teorema 5. *Ako je p polinom i ako p i p' imaju zajedničku nulu, ta nula je bar dvostruka nula polinoma p.*

Sledeći rezultat je osnova za različite primene (videti: Dunkel [1], Kellog [1], Newton [1], Maclaurin [1], Sylvester [1]). Ovaj rezultat ćemo dati u obliku u kome je izložen u HLP, p. 104.

Teorema 6. *Ako su sve nule $\frac{x}{y}$ polinoma $\sum_{i=0}^{n} c_i x^i y^{n-i}$ realne, isti slučaj je i sa svim polinomima (čiji svi koeficijenti nisu nule) koji su dobijeni parcijalnim diferenciranjem datog polinoma po x ili y. Dalje, ako je nula tako dobijenog polinoma višestrukosti k (>1), ona je nula višestrukosti $k+1$ onog polinoma od koga je diferenciranjem dobijen.*

Dokaz. Dobija se uzastopnom primenom teorema 1 i 3.

Posledica 7. *Ako je $c_n \neq 0$ i ako su sve nule polinoma $\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \equiv \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i x^i$ realne, isti je slučaj i sa nulama polinoma $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} d_{k+i} x^i$ $(0 < m \leqq k+m \leqq n)$.*

Dokaz. Neka je $f(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i x^i y^{n-i}$. Kako je $d_n \neq 0$, $\frac{y}{x}$ nije koren jednačine $f(x, y) = 0$ pa, prema teoremi 6, nije višestruki koren nijedne od izvodnih jednačina. Stoga nema dva uzastopna koeficijenta d_i takva da se d_k i d_{k+1} anuliraju.

$\frac{\partial^{n-m} f}{\partial x^k \partial y^{n-k-m}}$ se razlikuje od $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} d_{k+i} x^i y^{m-i}$ samo za multiplikativnu konstantu. Ovaj poslednji izraz, na osnovu prethodne primedbe, nema sve svoje koeficijente jednake nuli. Stoga je ovaj rezultat posledica teoreme 6.

Posledica 8. *Ako je $c_n \neq 0$ i ako su sve nule polinoma $\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \equiv \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i x^i$ realne, tada je, za $1 \leqq k \leqq n-1$,*

(1) $d_k^2 \geqq d_{k-1} d_{k+1}$,

(2) $c_k^2 > c_{k-1} c_{k+1}$.

Nejednakost (1) je stroga osim ako su sve nule jednake.

Dokaz. Na osnovu posledice 7 sve nule jednačine $d_{k-1} + 2 d_k x + d_{k+1} x^2 = 0$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ su realne, odakle se dobija skup nejednakosti (1). Iz definicije d_k $(0 \leqq k \leqq n)$ neposredno imamo

$$c_k^2 \geqq \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} c_{k-1} c_{k+1} > c_{k-1} c_{k+1}.$$

Ako je $d_k^2 = d_{k-1} d_{k+1}$ za svako k, kvadratna jednačina ima dvostruku nulu pa, prema teoremi 6, polazna jednačina ima nulu reda n.

Kao primere posmatrajmo neke polinome koji će kasnije biti korišćeni.

(a) Neka je $p(x) = x^{n+1} - (n+1)x + n$. Tada je $x = 1$ jedina pozitivna nula polinoma p. Ovo sleduje iz Dekartovog pravila o znacima i činjenice da je $x = 1$ dvostruka nula. Na osnovu toga imamo nejednakost

(3) $x^{n+1} \geqq (n+1)x - n \quad (x \geqq 0)$,

sa jednakošću ako i samo ako je $x = 1$.

(b) Na sličan način, polazeći od polinoma $q(x) = (x+n-1)^n - n^n x$, dolazimo do nejednakosti

(4) $(x+n-1)^n \geqq n^n x \quad (x \geqq 0)$,

sa jednakošću ako i samo ako je $x = 1$.

(c) Nejednakost (4) može se interpretirati i na sledeći način: Stavljajući $a = \frac{1}{n}$, za $x \geqq 0$ imamo

(5) $x^a - 1 \leqq a(x-1)$,

sa jednakošću ako i samo ako je $x = 1$.

Nejednakost (5), međutim, važi za svako a $(0<a<1)$. O ovome videti: M, p. 34. Ako je $a>1$ ili $a<0$, važi suprotna nejednakost.

(d) Mogućno je dobiti preciznije nejednakosti. Tako, na primer, za $0<a<1$ i $x>1$ imamo

(6) $$\frac{1}{2}(1-a)\frac{(x-1)^2}{x^2}<x-1.$$

Iz (6) nije teško izvesti da je

(7) $$(1+y)^a=1+ay+O(y^2) \text{ kada } y\to 0,$$

(8) $$\big(1+O(a^2)\big)^{1/a}=1+O(a) \text{ kada } a\to 0$$

(primetimo da za $x>0$ imamo $x^a=1+O(a)$ kada $a\to 0$).

3. NEKE ELEMENTARNE NEJEDNAKOSTI

U ovom odeljku navešćemo još neke nejednakosti koje će kasnije biti korišćene a koje se ne mogu dobiti iz osobina polinoma.

3.1. Bernoullieva nejednakost. Nejednakost iz sledeće teoreme naziva se Bernoullieva nejednakost.

Teorema 9. *Ako je* $x>-1$ *i* $0<\alpha<1$, *tada je*

(9) $$(1+x)^\alpha\leqq 1+\alpha x.$$

Ako je $\alpha<0$ *ili* $\alpha>1$ *važi suprotna nejednakost. U svim slučajevima jednakost važi ako i samo ako je* $x=0$.

Dokaz. Videti, na primer, M, p. 34.

PRIMEDBA: 1° Drugi dokaz biće dat u II. 2.4.
2° Primetimo da je (9) ekvivalentno sa (5).

3.2. Ako je $x\neq e$, važi

(10) $$e^x>x^e.$$

Dokaz. Kriva $y=\log x$ je konkavna i za tangentu u tački $(e, 1)$ ima pravu $y=x/e$. Prema tome, važi nejednakost

(11) $$\frac{x}{e}>\log x \quad (x\neq e),$$

koja je ekvivalentna sa (10).

3.3. Ako je $x>0$, imamo

(12) $$\log x\leqq x-1$$

sa jednakošću ako i samo ako je $x=1$.

Dokaz. Ovo sleduje iz $\log x=\int\limits_1^x\frac{dt}{t}\leqq x-1.$

3.4. Ako je $x \neq 0$, važi

(13) $\qquad e^x > 1 + x.$

Dokaz. Funkcija f definisana sa $f(x) = e^x - 1 - x$ ima u tački $x = 0$ jedinstveni minimum.

3.5. Sledeću nejednakost dokazali su Tettamanti, Sárkóny, Králik, Stomfai [1]. Ako je $x > -1$, tada je

(14) $$\frac{2|x|}{2+x} < |\log(1+x)| < \frac{|x|}{(1+x)^{1/2}}.$$

Dokaz. Stavimo $f(x) = \log(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}$. Tada je $f(0) = 0$ i $f'(x) \geqq 0$. Ako je

(15) $$g(x) = \log(1+x) - \frac{x}{(1+x)^{1/2}},$$

tada je $g(0) = 0$ i $g'(x) \leqq 0$. Ove osobine f i g impliciraju nejednakosti (14).

4. NEKE OSOBINE NIZOVA

4.1. Konveksni nizovi i nizovi ograničene varijacije. Neka je $\boldsymbol{a}$ niz. Definišimo niz $\Delta^k \boldsymbol{a}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ pomoću rekurentnih relacija

$$\Delta^1 a_n = \Delta a_n = a_n - a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots);$$
$$\Delta^k a_n = \Delta(\Delta^{k-1} a_n) \quad (n = 1, 2, \ldots; \ k = 2, 3, \ldots).$$

Lako se proverava da je

(16) $$\Delta^k a_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+i}$$

i da je, za $1 \leqq j \leqq k$,

(17) $$\Delta^j a_n = \sum_{i=1}^{+\infty} \binom{i+k-j-2}{k-j-1} \Delta^k a_{i+n-1},$$

pri čemu se uzima da je $\dbinom{n+p-2}{p-1}$ jednako 1 ako je $p = 0$, $n = 1$ i da je 0 za $p = 0$, $n = 2, 3, \ldots$. Ova konvencija biće korišćena u celom odeljku.

Definicija 10. (a) *Niz* $\boldsymbol{a}$ *je k-konveksan ili konveksan reda k* $(k \geqq 1)$ *ako je niz* $\Delta^k \boldsymbol{a}$ *nenegativan.*

(b) *Niz* $\boldsymbol{a}$ *je ograničene k-varijacije ako je*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \binom{i+k-2}{k-1} |\Delta^k a_i| < +\infty.$$

PRIMEDBA: 1° Konveksnost reda 1 znači da je $\boldsymbol{a}$ rastući niz. Ograničena 1-varijacija znači da je $\sum_{i=1}^{+\infty} |\Delta a_i| < +\infty$.

2° Jednostavna osobina apsolutno konvergentnih redova može se prikazati ovako: **a** je ograničene 1-varijacije ako i samo ako je razlika dva 1-konveksna niza. Glavni rezultat ovog odeljka, teorema 12, je generalizacija ovog jednostavnog rezultata. Ova generalizacija potiče od Dawsona [1].

Najpre ćemo dokazati sledeću lemu:

Lema 11. *Ako je* **a** *ograničen i k-konveksan niz (ograničene k-varijacije,* $k \geqq 2$), *tada*:

(a) **a** *je p-konveksan (ograničene p-varijacije)* $(1 \leqq p \leqq k-1)$;

(b) $$\lim_{p\to+\infty} \binom{p+j-1}{j} \Delta^j a_p = 0 \quad (1 \leqq j \leqq k-1);$$

(c) $$\sum_{p=1}^{+\infty} \binom{p+j-2}{j-1} \Delta^j a_p = a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_n \quad (1 \leqq j \leqq k).$$

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $k=2$ i da je **a** 2-konveksan niz.

Tada je Δa_n $(n=1, 2, \ldots)$ opadajući niz, pa stoga $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta a_n$ postoji. Kako je **a** ograničeno, ova granica mora da je nula, te je $\Delta a_n \geqq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$; na ovaj način dokazali smo (a) u ovom slučaju. Primetimo da je

$$a_1 - a_{n+1} = \sum_{p=1}^{n} \Delta a_p = \sum_{p=1}^{n-1} p\, \Delta^2 a_p + n\, \Delta a_n, \tag{18}$$

pa suma na levoj strani konvergira i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ postoji i nenegativan je. Ako bi ova granična vrednost bila pozitivna, niz **a** ne bi mogao da bude ograničen. Stoga je $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, \Delta a_n = 0$ i

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \Delta a_n = \sum_{p=1}^{+\infty} p\, \Delta^2 a_p = a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_n. \tag{19}$$

Na ovaj način završen je dokaz u ovom slučaju.

Pretpostavimo sada da je **a** niz ograničene 2-varijacije. Prema (18) niz $n\, \Delta a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ je ograničen. Dalje, kako je

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |\Delta a_p| \leqq \sum_{p=1}^{+\infty} p\, |\Delta^2 a_p| + n\, |\Delta a_n|,$$

red $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} |\Delta a_p|$ konvergira, što dokazuje (a), pa stoga $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ postoji. Neka je vrednost ove granice α i pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$. Tada postoji n_0 takvo da je

$$\frac{|\alpha|}{2} \sum_{p=n_0}^{+\infty} \left| 1 - \frac{\Delta a_{p+1}}{\Delta a_p} \right| \leqq \sum_{p=n_0}^{+\infty} p\, |\Delta a_p| \left| 1 - \frac{\Delta a_{p+1}}{\Delta a_p} \right| = \sum_{p=n_0}^{+\infty} p^2\, \Delta^2 a_p < +\infty.$$

Kako je tada $\sum\limits_{p=n_0}^{+\infty} \left| 1 - \dfrac{\Delta a_{p+1}}{\Delta a_p} \right| < +\infty$, proizvod $\prod\limits_{p=n_0} \dfrac{\Delta a_{p+1}}{\Delta a_p}$ apsolutno konvergira ka nekom broju različitom od nule. Ovo je u kontradikciji sa konvergencijom reda $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} |\Delta a_p|$, pa je stoga $\alpha=0$. Rezultat u ovom slučaju sleduje iz (18).

(ii) Pretpostavimo sada da je $k>2$ i da je **a** k-konveksan niz.

Kako je $\Delta^k a_n = \Delta^2(\Delta^{k-2} a_n) \geqq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$, niz $\Delta^{k-2} a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ je 2-konveksan i ograničen. Stoga na osnovu (i) imamo da je $\Delta^{k-2} a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ 1-konveksan, ili ekvivalentno, $\boldsymbol{a}$ je $(k-1)$-konveksan. Stoga (a) sleduje indukcijom.

Posebno, tada je niz $\boldsymbol{a}$ 2-konveksan i stoga na osnovu (i) dobijamo (b) i (c) za $j=1$ i $j=1, 2$ respektivno. Pretpostavimo da je $1<j_0<k$ i da (c) važi za takvu vrednost $j=j_0$. Kako je

$$(20) \qquad \sum_{p=1}^{n} \binom{p+j_0-2}{j_0-1} \Delta^{j_0} a_p = \sum_{p=1}^{n-1} \binom{p+j_0-1}{j_0} \Delta^{j_0+1} a_p + \binom{n+j_0-1}{j_0} \Delta^{j_0} a_n,$$

pretpostavka da (c) važi za $j=j_0$ povlači da je red $\sum_{p=1}^{+\infty} \binom{p+j_0-1}{j_0} \Delta^{j_0} a_p$ konvergentan i da $\lim_{n\to+\infty} \binom{n+j_0-1}{j_0} \Delta^{j_0} a_n$ postoji. Pretpostavimo da je ova granična vrednost jednaka α $(\alpha \geqq 0)$. Neka je $\alpha \neq 0$. Kako je

$$\binom{n+j_0-1}{j_0} \Delta^{j_0} a_n = \left(\sum_{p=1}^{n} \binom{p+j_0-2}{j_0-1}\right) \Delta^{j_0} a_n \leqq n \binom{n+j_0-2}{j_0} \Delta^{j_0} a_n,$$

zaključujemo da postoji prirodan broj n_0 takav da $n>n_0$ implicira

$$\frac{\alpha}{2n} \leqq \frac{1}{n} \binom{n+j_0-1}{j_0} \Delta^{j_0} a_n \leqq \binom{n+j_0-2}{j_0-1} \Delta^{j_0} a_n;$$

ali ovo je u kontradikciji sa konvergencijom reda $\sum_{p=1}^{+\infty} \binom{p+j_0-2}{j_0-1} \Delta^{j_0} a_p$, što je implicirano iskazom (c) u slučaju $j=j_0$. Stoga je $\alpha=0$, što znači da (b) važi za $j=j_0$ i prema tome iz (20) i (c) za $j=j_0$ dobijamo

$$(21) \qquad \sum_{p=1}^{+\infty} \binom{p+j_0-1}{j_0} \Delta^{j_0+1} a_p = \sum_{p=1}^{+\infty} \binom{p+j_0-2}{j_0-1} \Delta^{j_0} a_p = a_1 - \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Odavde sleduje da (c) važi kada je $j=j_0+1$. Ovim je završen dokaz.

Neka je sada $\boldsymbol{a}$ niz ograničene k-varijacije. Pretpostavimo da nijedan podniz niza $\binom{n+k-2}{k-1} \Delta^{k-1} a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ ne konvergira ka nuli. Tada postoji prirodan broj n_0 i $\alpha>0$, tako da je

$$\alpha \sum_{p=n_0}^{+\infty} \left|1 - \frac{\Delta^{k-1} a_{p+1}}{\Delta^{k-1} a_p}\right| \leqq \sum_{p=n_0}^{+\infty} \binom{p+k-2}{k-1} |\Delta^{k-1} a_p| \left|1 - \frac{\Delta^{k-1} a_{p+1}}{\Delta^{k-1} a_p}\right|$$

$$= \sum_{p=n_0}^{+\infty} \binom{p+k-2}{k-1} |\Delta^k a_p| < +\infty.$$

Teorema 12. *Neka je $\boldsymbol{a}$ ograničen niz. Tada je on ograničene k-varijacije ako i samo ako je razlika dva k-konveksna niza.*

Dokaz. Slučaj $k=1$ je dobro poznat (videti primedbu 2°), pa ćemo stoga pretpostaviti da je $k \geqq 2$.

(i) Neka je $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, gde su $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ k-konveksni. Tada je na osnovu leme 11 (c):

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-2}{k-1}|\Delta^k a_p| \leqq \sum_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-2}{k-1}\Delta^k b_p + \sum_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-2}{k-1}\Delta^k c_p < +\infty,$$

pa je $\boldsymbol{a}$ ograničene k-varijacije.

(ii) Pretpostavimo sada da je $\boldsymbol{a}$ ograničene k-varijacije. Tada na osnovu leme 11 (c) zaključujemo da $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ postoji. Neka je njegova vrednost jednaka a. Jednostavno uopštenje leme 11 (c) pokazuje da je $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-2}{k-1}\Delta^k a_{p+n}=a_{n+1}-a$.

Ako definišemo $b_{n+1}=\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-2}{k-1}\Delta^k a_{p+n}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, imamo

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-2}{k-1}\Delta^k a_{p+n-1} - \sum_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-2}{k-1}\Delta^k a_{p+n} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-3}{k-2}\Delta^k a_{p+n-1} \geqq 0, \end{aligned}$$

i očigledna indukcija daje

$$\Delta^j b_n = \sum_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-j-2}{k-j-1}\Delta^k a_{p+n-1} \geqq 0 \quad (1\leqq j\leqq k),$$

tako da je $\boldsymbol{b}$ k-konveksan niz. Stavimo sada $c_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}$. Tada za $1\leqq j\leqq k$ primenom (17) dobijamo

$$\begin{aligned} \Delta^j c_n &= \Delta^j b_n - \Delta^j a_n \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-j-2}{k-j-1}|\Delta^k a_{p+n-1}| - \sum_{p=1}^{+\infty}\binom{p+k-j-2}{k-j-1}\Delta^k a_{p+n-1} \geqq 0, \end{aligned}$$

čime je dokazana teorema.

4.2. Logaritamski konveksni nizovi. Dajmo prvo definiciju konvolucije dva niza.

Definicija 13. *Ako su data dva niza* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$, *tada se niz* $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$ *definisan sa*

$$c_n=\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{22}$$

ili proizvodom formalnih redova

$$\sum_{r=0}^{+\infty} c_r x^r = \left(\sum_{r=0}^{+\infty} a_r x^r\right)\left(\sum_{r=0}^{+\infty} b_r x^r\right), \tag{23}$$

naziva konvolucija nizova $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$.

Definicija 14. (a) *Pozitivan niz* $\boldsymbol{c}$ *naziva se* α*-logaritamski konveksan* ($\alpha\geqq 0$) *ako je*

$$c_n^2 \leqq \frac{\alpha+n-1}{\alpha+n}\,\frac{n+1}{n}\,c_{n+1}c_{n-1} \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{24}$$

Ako je $\alpha=1$, *reći ćemo samo logaritamski konveksan. Ako* $\alpha\to+\infty$, *uslov* (24) *svodi se na* $c_n^2<\frac{n+1}{n}c_{n+1}c_{n-1}$. *U tom slučaju reći ćemo da se radi o slaboj logaritamskoj konveksnosti.*

(b) *Ako u* (24) *važi suprotna nejednakost, reći ćemo da je niz* $\boldsymbol{c}$ α-*logaritamski konkavan, ili u slučaju* $\alpha=1$ *da je samo logaritamski konkavan. Međutim, ako je* $\alpha=+\infty$, *reći ćemo da se radi o jakoj logaritamskoj konkavnosti.*

PRIMEDBA: 1° U slučaju α-logaritamske konveksnosti smanjivanje α pooštrava uslove koje mora da zadovoljava $\boldsymbol{c}$. U slučaju α-logaritamske konkavnosti povećavanje α pooštrava uslove za $\boldsymbol{c}$.

2° Niz $\boldsymbol{d}$ definisan sa

$$(25)\qquad d_n=(-1)^n\binom{-\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}$$

je α'-logaritamski konveksan za svako $\alpha'\geqq\alpha$. Ovaj niz je α'-logaritamski konkavan za svako $\alpha'\leqq\alpha$. Niz je generiran pomoću $(1-x)^{-\alpha}=\sum_{r=0}^{+\infty}d_r x^r$. Niz $c_n=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\dots)$ je 0-logaritamski konkavan i α-logaritamski konveksan $(\alpha\geqq0)$. Niz $c_n=\frac{1}{n!}$ je slabo logaritamski konveksan i α-logaritamski konkavan za svako $\alpha<+\infty$.

3° Korisno je primetiti da je niz $\boldsymbol{c}$ α-logaritamski konveksan (konkavan) ako i samo ako je niz $\boldsymbol{d}$ logaritamski konveksan (konkavan), gde je, za $n=0,1,2,\dots$,

$$e_n=\frac{c_n}{d_n}\quad(0<\alpha<+\infty),\qquad e_n=nc_n\quad(\alpha=0),\qquad e_n=n!\,c_n\quad(\alpha=+\infty)$$

i $(d_0, d_1, d_2, \dots)$ je niz $\boldsymbol{d}$ definisan u (25).

4° U slučaju logaritamske konveksnosti (24) postaje

$$(26)\qquad c_n^2\leqq c_{n+1}c_{n-1}\qquad(n=1,2,\dots),$$

što je, u slučaju pozitivnih nizova, ekvivalentno sa

$$(27)\qquad \frac{c_{r+s}}{c_{r+s+1}}\leqq\frac{c_s}{c_{s-1}}\qquad(r,s=1,2,\dots);$$

u slučaju logaritamske konveksnosti u (26) i (27) važe suprotne nejednakosti.

Rezultati koje ćemo izložiti pokazuju da su osobine logaritamske konveksnosti nizova takođe osobine njihove konvolucije. Svi ovi rezultati nisu potrebni u daljem tekstu, ali su zbog kompletnosti navedeni.

Teorema 15. (a) *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *pozitivni slabo logaritamski konveksni nizovi, takva je i njihova konvolucija* $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$.

(b) *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *pozitivni strogo logaritamski konkavni nizovi, takva je i njihova konvolucija* $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$.

Primenjujući primedbu 3°, teoremu 15 možemo preformulisati na sledeću ekvivalentnu formu:

Teorema 16. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *pozitivni logaritamski konveksni (konkavni) nizovi, takav je i niz* $\boldsymbol{c}$, *gde je*

$$(28)\qquad c_n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a_r b_{n-r}\qquad(n=0,1,2,\dots).$$

Dokaz. (a) Logaritamski konveksan slučaj (Davenport i Pólya [1]). Dokaz nejednakosti (26) sprovodi se indukcijom po n. Za $n=1$ jednostavna izračunavanja daju, na osnovu logaritamske konveksnosti nizova $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$,

$$c_0 c_2 - c_1^2 = a_0^2 (b_0 b_2 - b_1^2) + b_0^2 (a_0 a_2 - a_1^2) \geqq 0.$$

Pretpostavimo da (26) važi za $1 \leqq n \leqq k-1$. Kako je $\binom{k}{r} = \binom{k-1}{r} + \binom{k-1}{r-1}$, imamo $c_k = c'_{k-1} + c''_{k-1}$, gde je c'_{k-1} definisano pomoću (28), primenom nizova $(a_1, a_2, \ldots)$ i $(b_0, b_1, \ldots)$, dok je c''_{k-1} definisano pomoću (28) primenom nizova $(a_0, a_1, \ldots)$ i $(b_1, b_2, \ldots)$. Tada je, na osnovu induktivne hipoteze i nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine,

$$\begin{aligned} c_k^2 &= (c'_{k-1} + c''_{k-1})^2 = c'^2_{k-1} + c''^2_{k-1} + 2c'_{k-1} c''_{k-1} \\ &\leqq c'_{k-2} c'_k + c''_{k-2} c''_k + 2 \left(c'_{k-2} c'_k c''_{k-2} c''_k\right)^{1/2} \\ &\leqq c'_{k-2} c'_k + c''_{k-2} c''_k + c'_{k-2} c''_k + c'_k c''_{k-2} \\ &= c_{k-1} c_{k+1}. \end{aligned}$$

(b) Logaritamski konkavan slučaj (Whiteley [3]). Definicija (28) može se predstaviti i na sledeći način

$$c_n = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} (a_{r+1} b_{n-r+1} + a_r b_{n-r}).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} c_n^2 - c_{n-1} c_{n+1} &= \left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r b_{n-r}\right) \left(\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} (a_{r+1} b_{n-r-1} + a_r b_{n-r})\right) \\ &- \left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (a_{r+1} b_{n-r} + a_r b_{n-r+1})\right) \left(\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} a_r b_{n-r-1}\right) = A + B, \end{aligned}$$

gde je A jednako izrazu

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n+1 \geqq r+s \\ r \geqq 1,\, s \geqq 1}} (b_0 b_{r+s+1} - b_{r+s} b_{s-1}) \Bigg(\binom{n}{r+s-1} \binom{n-1}{s-1} a_{n-r-s+1} a_{n-s} \\ - \binom{n}{s-1} \binom{n-1}{r+s-1} a_{n-s+1} a_{n-r-s} \Bigg). \end{aligned}$$

Sabirak B jednak je sabirku A, gde su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ izmenjali mesta. Kako je $\boldsymbol{b}$ logaritamski konkavno, na osnovu suprotne nejednakosti od (27) zaključujemo da je izraz u prvoj zagradi u A nenegativan. Dalje, kako je

$$\binom{n}{r+s-1} \binom{n-1}{s-1} > \binom{n}{s-1} \binom{n-1}{r+s-1},$$

izraz u drugoj zagradi u A premašuje sledeću vrednost

$$\binom{n}{s-1} \binom{n-1}{r+s-1} (a_{n-r-s+1} a_{n-s} - a_{n-s+1} a_{n-r-s}),$$

koja je, na osnovu logaritamske konkavnosti niza $\boldsymbol{a}$ i nejednakosti (27), nenegativna. Slično se dokazuje da je B nenegativno, čime je dokaz završen.

PRIMEDBA: 5° Nije teško zaključiti da se jednakost u (2) za $\boldsymbol{c}$ pojavljuje ako i samo ako se jednakost pojavljuje u (26) za $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

Kako su niz $\boldsymbol{c}$ i niz $\boldsymbol{d}$, koji je definisan sa

$$d_n = c_n x^n \qquad (n=0, 1, \ldots;\ x>0),$$

logaritamski konveksni (konkavni) istovremeno, možemo neposredno izvesti sledeću generalizaciju:

Posledica 17. *Ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ logaritamski konveksni (konkavni) nizovi, tada je, za svako $x, y>0$, niz $\boldsymbol{c}(x, y)$ iste prirode, gde je*

$$(29) \qquad c_n(x, y) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r b_{n-r} x^r y^{n-r} \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Teorema 18. (a) *Ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ pozitivni logaritamski konkavni nizovi, takva je i njihova konvolucija $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$.*

(b) *Ako je $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$ i ako je $\boldsymbol{a}$ α-logaritamski konveksan pozitivan niz i $\boldsymbol{b}$ pozitivan β-logaritamski konveksan niz, tada je konvolucija $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ logaritamski konveksan niz.*

Dokaz. (a) (Menon [4]). Ako je $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$, tada je

$$\begin{aligned}
c_n^2 - c_{n-1} c_{n+1} &= \Big(\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\Big)^2 - \Big(\sum_{r=0}^{n-1} a_r b_{n-r-1}\Big)\Big(\sum_{r=0}^{n+1} a_r b_{n-r+1}\Big) \\
&= \Big(\sum_{r=0}^{n-1} a_r b_{n-r}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) - \Big(\sum_{r=0}^{n-1} a_r b_{n-r-1}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k+1}\Big) \\
&\quad + a_n b_0 \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - a_{n+1} b_0 \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k-1} \\
&= A + B + C,
\end{aligned}$$

gde je

$$A = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} a_r a_k (b_{n-r} b_{n-k} - b_{n-r-1} b_{n-k+1}),$$

$$B = \sum_{r=0}^{n-1} a_r a_0 (b_{n-r} b_n - b_{n-r-1} b_{n+1}),$$

$$\begin{aligned}
C &= a_n b_0 \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - a_{n+1} b_0 \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k-1} \\
&= a_n b_n a_0 b_0 + b_0 \Big(\sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} (a_n a_{k+1} - a_{n+1} a_k)\Big).
\end{aligned}$$

Kako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ logaritamski konkavni nizovi, na osnovu suprotne nejednakosti od (27), zaključujemo da su B i C nenegativni.

Ako članove koji se pojavljuju u zbiru koji definiše A označimo sa $d_{r,k}$, tada je $d_{r,r+1}=0$, pa kombinujući članove $d_{r-1,k}$ i $d_{k-1,r}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{\substack{r,k=1 \\ r<k+1}}^{n} (d_{r-1,k} + d_{k-1,r}) \\
&= \sum_{\substack{r,k=1 \\ r<k+1}}^{n} (a_r a_{k-1} - a_{r-1} a_k)(b_{n-r} b_{n-k+1} - b_{n-r+1} b_{n-k}),
\end{aligned}$$

što je, na osnovu suprotne nejednakosti od (27), nenegativno. Ovim je završen dokaz.

(b) (Davenport i Pòlya [1]). Ako je $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$, koristeći oznake (25), dobijamo

$$(30)\qquad c_n=\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}=\sum_{r=0}^{n} \alpha_r \beta_{n-r} a'_r b'_{n-r},$$

gde su, prema primedbi 3° nizovi $\boldsymbol{a}'$ i $\boldsymbol{b}'$ logaritamski konveksni. Jednostavnim izračunavanjima iz (25) dobijamo

$$\alpha_r \beta_{n-r}=\binom{n}{r}\frac{\Gamma(\alpha+r)\,\Gamma(\beta+n-r)}{n!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}=\binom{n}{m}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha+r-1}(1-t)^{\beta+n-r-1}\,dt,$$

gde je Γ gama-funkcija.

Zamenjujući ovo u (30) i koristeći oznake (29), imamo

$$\begin{aligned} c_n&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}c'_n(t,\,1-t)\,dt\\ &\leqq\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\big(c'_{n-1}(t,\,1-t)\,c'_{n+1}(t,\,1-t)\big)^{1/2}dt\\ &\leqq\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}c'_{n-1}(t,\,1-t)\,dt\right)^{1/2}\\ &\times\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}c'_{n+1}(t,\,1-t)\,dt\right)^{1/2}=(c_{n-1}c_{n+1})^{1/2}, \end{aligned}$$

gde su primenjene posledica 17 i integralna forma nejednakosti $\boldsymbol{H}$ koja će kasnije biti dokazana.

Primedbe: 6° U delu (a) ove teoreme nejednakosti (26) za $\boldsymbol{c}$ uvek su striktne jer je član C uvek pozitivan.

7° U drugom delu nejednakosti (26) za $\boldsymbol{c}$ postaju jednakosti ako i samo ako u nejednakostima (24) za $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ važi jednakost.

Neka su $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$ dva niza definisana sa (25). Tada je $\vec{\alpha}*\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, što sleduje iz primedbe 2°. Ako je $\vec{\alpha}+\vec{\beta}>1$, konvolucija nije logaritamski konveksna već je samo $\vec{\alpha}'$ logaritamski konveksno $(\vec{\alpha}'\geqq\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.

Neka je $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=1$ $(n=1,\,2,\ldots)$. Tada je $\boldsymbol{a}$ 0-logaritamski konveksno, $\boldsymbol{b}$ je logaritamski konveksno (primedba 6°) ali $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, gde je $c_n=\sum_{r=1}^{n}\dfrac{1}{r}$, nije logaritamski konveksno.

4.3. Jedna relacija poretka kod nizova. Sada ćemo razmatrati jedan vrlo koristan pojam poretka.

Definicija 19. *Kvadratna matrica* $S = \|s_{ij}\|_{n\times n}$ *naziva se dvostruko stohastična ako je*

$$(31) \qquad \sum_{i=1}^{n} s_{ij} = 1 \quad (1 \leqq j \leqq n), \qquad \sum_{j=1}^{n} s_{ij} = 1 \quad (1 \leqq i \leqq n).$$

Definicija 20. *Jedna n-torka* $\vec{\beta}$ *naziva se sredina n-torke* $\vec{\alpha}$ *ako postoji nenegativna dvostruko stohastična matrica* S *takva da je* $\vec{\beta} = S\vec{\alpha}$.

PRIMEDBE: 1° Tvrđenje da je $\vec{\beta}$ sredina niza $\vec{\alpha}$ je nezavisno od poretka elemenata u nizovima $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$.

2° Definicija 20 je ekvivalentna tvrđenju da je svaki element niza $\vec{\beta}$ težinska aritmetička sredina (sa mogućnošću raznih težina) elemenata $\vec{\alpha}$ (videti definiciju II.3).

3° Relacija definisana iskazom „$\vec{\beta}$ je sredina od $\vec{\alpha}$" je tranzitivna. Dalje, $\vec{\beta}$ je sredina od $\vec{\alpha}$ i $\vec{\alpha}$ je sredina od $\vec{\beta}$ ako i samo ako je $\vec{\alpha}$ permutacija od $\vec{\beta}$.

4° Pretpostavimo da je $\vec{\beta} = (\vec{\beta}^{(1)}, \vec{\beta}^{(2)})$, $\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}^{(1)}, \vec{\alpha}^{(2)})$, gde je $\vec{\beta}^{(1)} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\vec{\beta}^{(2)} = (\beta_{m+1}, \ldots, \beta_n)$ i slično za $\vec{\alpha}^{(1)}$ i $\vec{\alpha}^{(2)}$. Tada, ako je $\vec{\beta}^{(1)}$ sredina od $\vec{\alpha}^{(1)}$ i $\vec{\beta}^{(2)}$ sredina od $\vec{\alpha}^{(2)}$, tada je $\vec{\beta}$ sredina od $\vec{\alpha}$. Do ovog neposredno dolazimo jer ako je $\vec{\beta}^{(1)} = S_1\vec{\alpha}^{(1)}$ i $\vec{\beta}^{(2)} = S_2\vec{\alpha}^{(2)}$, tada je $\vec{\beta} = S\vec{\alpha}$, gde je $S = \begin{Vmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{Vmatrix}$.

Definicija 21. (a) *Neka su* $\vec{\alpha}$ *i* $\vec{\beta}$ *dve opadajuće n-torke. Za n-torku* $\vec{\beta}$ *kažemo da je majorizovana n-torkom* $\vec{\alpha}$, *u oznaci* $\vec{\beta} \prec \vec{\alpha}$ *ako je*

$$(32) \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

i

$$(33) \qquad \sum_{i=1}^{k} \beta_i \leqq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \quad (1 \leqq k \leqq n).$$

(b) *U opštem slučaju* $\vec{\beta}$ *je majorizovana sa* $\vec{\alpha}$, *tj.* $\vec{\beta} \prec \vec{\alpha}$, *ako posle preuređenja u opadajućem poretku n-torke zadovoljavaju* (32) *i* (33).

PRIMEDBE: 5° Relacija $\prec$ je jedna relacija poretka u skupu opadajućih n-torki.

6° Ako je $\vec{\beta} \prec \vec{\alpha}$ ili ako je $\vec{\beta}$ sredina od $\vec{\alpha}$, isto važi i za n-torke dobijene dodavanjem iste konstante svim članovima.

Teorema 22. *Neka su* $\vec{\alpha}$ *i* $\vec{\beta}$ *dve n-torke. Tada je* $\vec{\beta}$ *sredina od* $\vec{\alpha}$ *ako i samo ako je* $\vec{\beta} \prec \vec{\alpha}$.

Dokaz. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$ opadajuće n-torke.

(i) Pretpostavimo najpre da za neku dvostruko stohastičku matricu S važi $\vec{\beta} = S\vec{\alpha}$, tj. da je

$$(34) \qquad \beta_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\alpha_j \quad (1 \leqq i \leqq n).$$

Ako je $t_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_{ij}$ $(1 \leqq k \leqq n)$, iz (34) dobijamo

$$(35) \qquad \sum_{i=1}^{k} \beta_i = \sum_{j=1}^{n} t_j^{(k)} \alpha_j .$$

Ako je $k=n$, tada iz (31) nalazimo $t_j^{(n)}=1$ $(1 \leqq j \leqq n)$ i stoga se (35) svodi na (32). Preostaje još da se izvede (33).

Ako je $1 \leqq k < n$, tada (31) daje $0 \leqq t_j^{(k)} \leqq 1$ $(1 \leqq j \leqq n)$ i

$$(36) \qquad \sum_{j=1}^{n} t_j^{(k)} = k.$$

Stoga je, na osnovu (36),

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \alpha_k) + \sum_{i=1}^{n} t_i^{(k)} (\alpha_k - \alpha_i) \geqq 0.$$

Ovo je upravo (33) i time je dokazano da je $\vec{\beta} \prec \vec{\alpha}$.

(ii) Pretpostavimo sada da je $\vec{\beta} \prec \vec{\alpha}$, tj. da važe (32) i (33). Na osnovu primedbe 6° možemo, bez smanjenja opštosti, zameniti (32) sa

$$(37) \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0.$$

Kako je rezultat trivijalan za $\vec{\alpha} = \mathbf{0}$, možemo pretpostaviti da je

$$(38) \qquad \alpha_1 > 0 > \alpha_n .$$

Dokaz se može izvesti indukcijom. Ako je $n=2$, uvedene pretpostavke daju $0 \leqq \beta_1 \leqq \alpha_1$, $\beta_2 = -\beta_1$, $\alpha_2 = -\alpha_1$ pa se određivanje jednog $\boldsymbol{S}$ takvog da je $\vec{\beta} = \boldsymbol{S} \vec{\alpha}$, $\boldsymbol{S} = \begin{Vmatrix} 1-s & s \\ s & 1-s \end{Vmatrix}$ svodi na nalaženje jednog s $(0 \leqq s \leqq 1)$ takvog da je $\beta_1 = (1-2s)\alpha_1$, što je zadovoljeno za neko s takvo da je $0 \leqq s \leqq \frac{1}{2}$.

Pretpostavimo sada da je teorema tačna za prirodne brojeve manje od n. Tada su ili sve nejednakosti (32) striktne, ili za neko m $(1 \leqq m \leqq n)$ važi jednakost.

Ako pretpostavimo da su poslednje pretpostavke tačne, tada (32) i (33) impliciraju da je $\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}^{(1)}, \vec{\alpha}^{(2)})$, $\vec{\beta} = (\vec{\beta}^{(1)}, \vec{\beta}^{(2)})$ (videti oznake u primedbi 4°) i $\vec{\beta}^{(1)} \prec \vec{\alpha}^{(1)}$, $\vec{\beta}^{(2)} \prec \vec{\alpha}^{(2)}$. Prema tome, na osnovu induktivne pretpostavke $\vec{\beta}^{(1)}$ je sredina od $\vec{\alpha}^{(1)}$ i $\vec{\beta}^{(2)}$ je sredina od $\vec{\alpha}^{(2)}$. Stoga, na osnovu primedbe 2°, $\vec{\beta}$ je sredina od $\vec{\alpha}$.

Sada dolazimo do težeg slučaja kada su sve nejednakosti (32) striktne. Polazeći od $\vec{\alpha}$, konstruisaćemo $\vec{\gamma}$ sa sledećim osobinama:

(a) $\vec{\gamma} \prec \vec{\alpha}$, (b) $\vec{\beta} \prec \vec{\gamma}$, (c) $\vec{\gamma}$ je sredina od $\vec{\alpha}$.

Dalje, možemo izabrati $\vec{\gamma}$ tako da

(d) sve nejednakosti (32) primenjene na $\vec{\beta}$ i $\vec{\gamma}$ nisu striktne ili

(e) $\vec{\gamma}$ sadrži više nula-elemenata nego $\vec{\alpha}$.

Ako slučaj (d) važi, iz (b) i gornjih obrazloženja sleduje da je $\vec{\beta}$ sredina od $\vec{\gamma}$ i stoga na osnovu primedbe 3° i (c), $\vec{\beta}$ je sredina od $\vec{\alpha}$.

Ako slučaj (e) važi, postupak se ponavlja, što je mogućno na osnovu iste primedbe 3° i primedbe 5°, sve dok ne dobijemo da važi (d) ili dok ne dobijemo n-torku $\mathbf{0}$. U oba slučaja dokaz je završen.

Preostaje da se konstruiše niz $\vec{\gamma}$. Neka je α_p najmanje pozitivno α_i i α_q najveće negativno α_i i definišimo $\vec{\gamma}$ sa

$$\gamma_p = \alpha_p - \varepsilon, \qquad \gamma_q = \alpha_q + \varepsilon, \qquad \gamma_i = \alpha_i \quad (i \neq p, q),$$

gde je $0 \leqq \varepsilon \leqq \min(\alpha_p, -\alpha_q)$. Očigledno $\vec{\gamma}$ zadovoljava (a) i za pogodno izabrano ε, (b), (d) ili (e) važe. Da bismo konstatovali da važi (c), izaberimo $\boldsymbol{S} = \|s_{ij}\|$, gde je

$$s_{ii} = 1 \ (i \neq p, q), \quad s_{pp} = 1 - \frac{\varepsilon}{\alpha_p - \alpha_q}, \quad s_{pq} = 1 - s_{pp}, \quad s_{qq} = s_{pp},$$

$$s_{pq} = s_{qp}, \qquad s_{ij} = 0 \ (\text{u ostalim slučajevima}),$$

tada je očigledno $\boldsymbol{S}$ nenegativna dvostruko-stohastička matrica i $\vec{\gamma} = \boldsymbol{S}\vec{\alpha}$. Ovim je završen dokaz teoreme 22.

PRIMEDBA: 7° Razmatranjem gornjeg dokaza možemo zaključiti da je u definiciji 20 uvek mogućno izabrati dvostruku stohastičku matricu $\boldsymbol{S} = \|s_{ij}\|$ takvu da je

$$\begin{aligned} &s_{ij} = 1 \quad (i \neq p, q), \qquad s_{pp} = s_{qq} = \lambda \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1), \\ &s_{pq} = s_{qp} = 1 - \lambda, \qquad s_{ij} = 0 \quad (\text{u ostalim slučajevima}). \end{aligned} \tag{39}$$

Jedna interesantna primena pojma poretka je:

Teorema 23. *Neka su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ dve n-torke sa elementima iz nekog intervala* $\mathbf{I}$. *Tada je*

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(b_i)$$

za svaku neprekidnu konveksnu funkciju $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ ako i samo ako je $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$.

PRIMEDBA: 8° Za dokaz ove teoreme čitaoci se upućuju na HLP, pp. 88—91, M, pp. 162—170 i BB, pp. 30—32, gde se takođe mogu naći druge reference. O pojmu konveksnosti videti odeljak 5.

Jednu drugu primenu dao je Kong-Ming Chong [1]:

Lema 24. *Ako je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, $\boldsymbol{a}'$ jedno preuređenje od $\boldsymbol{a}$, tada je* $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i'}{a_i} \geq n$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti, bez smanjenja opštosti, da je $a_1 \geqq \cdots \geqq a_n$. Ako je tada $i < j$ i $a_i' < a_j'$

$$\frac{a_i'}{a_i} + \frac{a_j'}{a_j} > \frac{a_j'}{a_i} + \frac{a_i'}{a_j}.$$

Stoga je $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i'}{a_i} \geqq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i} = n.$

Teorema 25. *Neka su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *nenegativne n-torke. Tada, ako je* $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$, *važi*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq \sum_{i=1}^{n} b_i$$

sa jednakošću ako i samo ako je $\boldsymbol{a}$ *preuređenje od* $\boldsymbol{b}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{b} > 0$, jer u drugom slučaju nema šta da se dokazuje. Dalje, primenom teoreme 22 i primedbe 7° možemo pretpostaviti da je $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b} + (1-\lambda)\boldsymbol{b}'$, gde je $\boldsymbol{b}'$ neko preuređenje od $\boldsymbol{b}$. Tada je

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda + (1-\lambda)\frac{b_i'}{b_i}\right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k}(1-\lambda)^k \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq n} \frac{b_{i_1}' \cdots b_{i_k}'}{b_{i_1} \cdots b_{i_k}}$$

$$\geqq \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k}(1-\lambda)^k \binom{n}{k} = 1,$$

gde je primenjena lema 24. Slučaj jednakosti se neposredno dobija.

PRIMEDBE: 9° Kako je

$$\left(1+\frac{x}{n},\ 1+\frac{x}{n}, \ldots,\ 1+\frac{x}{n}\right) \prec \left(1+\frac{x}{n-1}, \ldots,\ 1+\frac{x}{n-1},\ 1\right),$$

iz teoreme 25 sleduje

$$\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1} \leqq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

i odatle indukcijom zaključujemo da za $m \leqq n$ važi

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m \leqq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

sa jednakošću ako i samo ako je $m=n$ ili $x=0$.

10° Takođe je očigledno da, ako je $a_i > 0$ ili $0 > a_i > -1$ $(1 \leqq i \leqq n)$, tada važi

$$(1+a_1, \ldots, 1+a_n) \prec \left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i,\ 1, \ldots,\ 1\right),$$

pa na osnovu teoreme 25 imamo sledeći, dobro poznati, rezultat (HLP, p. 60; M, p. 210)

$$1+\sum_{i=1}^{n} a_i \leqq \prod_{i=1}^{n}{}'(1+a_i).$$

5. KONVEKSNE FUNKCIJE

Pojam konveksnosti je od velike važnosti za teoriju sredina. Ovaj pojam je međutim, detaljno obrađivan u više knjiga koje su lako dostupne, pa stoga u ovom odeljku nećemo davati dokaze, već ćemo samo navesti rezultate koji će nam kasnije trebati. Dokazi i druge pojedinosti mogu se naći u knjigama P i RV kao i u HLP (pp. 70—74 i 76—83), M (pp. 10—22), Bourbaki (1, chapter 1)).

5.1. Konveksne funkcije jedne promenljive. Navešćemo najpre definiciju konveksnosti.

Definicija 26. *Ako je* **I** *interval iz* **R**, *tada se za funkciju* $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ *kaže da je konveksna ako za svako* $x, y, \in \mathbf{I}$ *i svako* $\lambda\,(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ *važi*

$$(40) \qquad f\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \leqq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Ako u (40) *za svako* $x \neq y$ *i* $\lambda \neq 0, 1$ *važi striktna nejednakost, kaže se da je* f *striktno konveksna. Ako u* (40) *važi suprotna nejednakost,* f *je konkavna, a ako je za* $x \neq y$ *i* $\lambda \neq 0, 1$ *ta suprotna nejednakost striktna, kažemo da je* f *striktno konkavna funkcija.*

Primedbe: 1° Poznato je da je f istovremeno konveksna i konkavna ako i samo ako je afina, tj. ako je $f(x) = mx + c$ ($x \in \mathbf{I}$, $m, c \in \mathbf{R}$). O ovome videti: Aczél [21] ili RV, p. 55.

2° Jednostavna geometrijska interpretacija (40) je da grafik funkcije leži ispod odgovarajuće tetive.

3° Ako su x_1, x_2, x_3 tri proizvoljne tačke iz **I** takve da je $x_1 < x_2 < x_3$, (40) je ekvivalentno sa

$$f(x_2) \leqq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} f(x_3)$$

ili, simetričnije, sa

$$(41) \qquad \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \geqq 0.$$

Jedan drugi način pisanja (41) je takođe instruktivan:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}.$$

Stoga, ako je f konveksna funkcija na **I** i ako je $x_1 \leqq x_2$, $y_1 \leqq y_2$, $x_1 \leqq y_1$, $x_2 \leqq y_2$, imamo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1}.$$

Teorema 27. *Neka je* $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ *konveksna funkcija. Tada:*

(a) f *zadovoljava Lipschitzov uslov na svakom segmentu iz* $\mathring{\mathbf{I}}$;

(b) f'_+ *i* f'_- *postoje i rastući su u* $\mathring{\mathbf{I}}$ *ako je* f *striktno konveksna, tada su ovi izvodi striktno rastući;*

(c) f' *postoji osim na prebrojivom skupu;*

(d) f'' *postoji i nenegativno je skoro svuda.*

Dokaz. Videti RV, pp. 4—7.

Teorema 28. (a) $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ *je (striktno) konveksna ako i samo ako postoji (striktno) rastuća funkcija* $g: (a, b) \to \mathbf{R}$ *i* $c\,(a < c < b)$ *tako da je, za svako* $x\,(a < x < b)$,

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) *Ako* f'' *postoji na* (a, b), *tada je* f *konveksna funkcija ako i sumo ako je* $f'' \geqq 0$; *ako je* $f'' > 0$, *tada je* f *striktno konveksna funkcija.*

Dokaz. Videti RV, pp. 9—11 ili M, pp. 17—18.

Teorema 29. *Ako je $f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}$ konveksna funkcija, $\boldsymbol{a}\in\mathbf{I}^n$ $(n\geqq 2)$, $\boldsymbol{p}$ pozitivna n-torka, tada je*

$$(42)\qquad f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)\leqq\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(a_i)\qquad\left(P_n=\sum_{i=1}^{n} p_i\right).$$

Ako je f striktno konveksna funkcija, tada je (42) *striktno osim ako je* $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. Daćemo dokaz indukcijom po n. Za $n=2$, (42) se svodi na (40). Pretpostavimo da (42) važi za svako k $(2\leqq k\leqq n-1)$. Tada je, na osnovu slučaja $n=2$ i induktivne pretpostavke,

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)=f\left(\frac{p_n}{P_n}a_n+\frac{P_{n-1}}{P_n}\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i\right)$$

$$\leqq\frac{p_n}{P_n}f(a_n)+\frac{P_{n-1}}{P_n}f\left(\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i\right)\leqq\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(a_i).$$

Bez teškoće se razmatraju slučajevi jednakosti i striktne konveksnosti.

Primedbe: 5° Nejednakost (42) je poznata kao Jensenova nejednakost. U ovoj knjizi obeležavaćemo je sa J. Kao što smo primetili, (42) je ekvivalentno sa (40), pa se J može uzeti kao alternativna definicija konveksnosti.

6° Drugi dokaz teoreme 29 dat je u RV, p. 189. O istorijatu ove nejednakosti videti članak Mitrinović i Vasić [13].

Sledeće jednostavno rafiniranje J-nejednakosti dali su Vasić i Mijalković [1].

Teorema 30. *Neka je $\boldsymbol{p}$ pozitivan niz i $\boldsymbol{x}$ realan niz i $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. Definišimo sledeću funkciju konačnog podskupa* $\mathbf{I}$ *od* $\mathbf{N}$:

$$F(\mathbf{I})=\sum_{i\in\mathbf{I}} p_i f\left(\frac{\sum_{i\in\mathbf{I}} p_i x_i}{\sum_{i\in\mathbf{I}} p_i}\right)-\sum_{i\in\mathbf{I}} p_i f(x_i).$$

Ako je f konveksna funkcija na $[a,b]$, i ako su $\mathbf{I}$ *i* $\mathbf{J}$ *dva konačna podskupa od* $\mathbf{N}$ *takva da je* $\mathbf{I}\cap\mathbf{J}=\varnothing$, *tada je, za* $x_i\in[a,b]$,

$$(43)\qquad F(\mathbf{I}\cup\mathbf{J})\leqq F(\mathbf{I})+F(\mathbf{J}).$$

Ako je f striktno konveksna funkcija, tada je (43) *striktno osim za*

$$\frac{\sum_{i\in\mathbf{I}} p_i x_i}{\sum_{i\in\mathbf{I}} p_i}=\frac{\sum_{i\in\mathbf{J}} p_i x_i}{\sum_{i\in\mathbf{J}} p_i}.$$

Dokaz. Na osnovu J-nejednakosti je $F(\mathbf{I}\cup\mathbf{J})\leqq 0$. Ako izvršimo supstitucije

$$x_j\to\frac{\sum_{i\in\mathbf{I}} p_i x_i}{\sum_{i\in\mathbf{I}} p_i}\quad(j\in\mathbf{I}),\qquad x_j\to\frac{\sum_{i\in\mathbf{J}} p_i x_i}{\sum_{i\in\mathbf{J}} p_i}\quad(j\in\mathbf{J}),$$

dobijamo

$$\sum_{i\in \mathbf{I}\cup \mathbf{J}} p_i f\left(\frac{\sum_{i\in \mathbf{I}\cup \mathbf{J}} p_i x_i}{\sum_{i\in \mathbf{I}\cup \mathbf{J}} p_i}\right) - \sum_{i\in \mathbf{I}} p_i f\left(\frac{\sum_{i\in \mathbf{I}} p_i x_i}{\sum_{i\in \mathbf{I}} p_i}\right) - \sum_{i\in \mathbf{J}} p_i f\left(\frac{\sum_{i\in \mathbf{J}} p_i x_i}{\sum_{i\in \mathbf{J}} p_i}\right)$$

$$- \sum_{i\in \mathbf{I}\cup \mathbf{J}} p_i f(x_i) + \sum_{i\in \mathbf{I}} p_i f(x_i) + \sum_{i\in \mathbf{J}} p_i f(x_i) \leqq 0,$$

tj. (43). Slučaj jednakosti sleduje iz slučaja jednakosti u J.

Posledica 31. *Uz iste pretpostavke o* $\mathbf{p}$, $\mathbf{x}$ *i* f *kao u teoremi* 30 *imamo*

(44) $\quad F(\mathbf{I}_n) \leqq F(\mathbf{I}_{n-1}) \leqq F(\mathbf{I}_{n-2}) \leqq \cdots \leqq F(\mathbf{I}_2) \leqq 0,$

gde je $\mathbf{I}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$.

PRIMEDBA: 7° U nizu nejednakosti (44) ekstremni slučaj $F(\mathbf{I}_n) \leq 0$ daje J. Interesantno je primetiti da je pri interpoliranju niza nejednakosti između $F(\mathbf{I}_n)$ i 0 korišćena samo nejednakost J.

Jedno proširenje nejednakosti J dao je Steffensen [2]:

Teorema 32. *Ako je* $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ *konveksna funkcija,* n $(n \geqq 2)$ *brojeva* $a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$ *iz* $\mathbf{I}$ i $\mathbf{p}$ *realna* n-*torka takva da je*

(45) $\quad P_n \neq 0, \quad 0 \leqq \dfrac{P_k}{P_n} \leqq 1 \quad (1 \leqq k \leqq n),$

važi nejednakost (42); *ako je* f *striktno konveksna funkcija, tada je* (42) *striktna osim ako je* $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Za $n=2$ nejednakosti (45) impliciraju da je ili $p_1 > 0$ i $p_2 > 0$ ili da je $p_1 = 0$ ili $p_2 = 0$. Stoga možemo pretpostaviti da je $n \geqq 3$.

(i) Pretpostavimo najpre da je $n=3$ i $p_1 \geqq 0$, $p_3 \geqq 0$, $p_2 = -p_1 + p$, $p \geqq 0$. Tada je $P_3 = p + p_3$ i $\dfrac{p_1}{p+p_3} \leqq 1$. Stavimo $\bar{a} = \dfrac{pa_2 + p_3 a_3}{p+p_3}$; tada je $a_2 \leqq \bar{a} \leqq a_3$ i (42) se svodi na

$$f\left(\bar{a} - \frac{p_1}{p+p_3}(a_2 - a_1)\right) \leqq \frac{pf(a_2) + p_3 f(a_3)}{p+p_3} - \frac{p_1}{p+p_3}\big(f(a_2) - f(a_1)\big).$$

Primenjujući J za $n=2$ na desnu stranu ove nejednakosti, vidimo da je dovoljno dokazati nejednakost

(46) $\quad f\left(\bar{a} - \dfrac{p_1}{p+p_3}(a_2 - a_1)\right) \leqq f(\bar{a}) - \dfrac{p_1}{p+p_3}\big(f(a_2) - f(a_1)\big).$

Ako je $a_2 = a_1$, ovo je trivijalno. Ako je $a_2 > a_1$, ova nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \leqq \frac{f(\bar{a}) - f\left(\bar{a} - \dfrac{p_1}{p+p_3}(a_2 - a_1)\right)}{\bar{a} - \left(\bar{a} - \dfrac{p_1}{p+p_3}(a_2 - a_1)\right)}.$$

Međutim, kao što smo videli, $\bar{a} \geqq a_2$. Lako se zaključuje da je $\bar{a} - \dfrac{p_1}{p+p_3}(a_2 - a_1) \geqq a_1$, pa je ova nejednakost posledica primedbe 4°.

(ii) Pre nego što pređemo na opšti slučaj, primetimo da s obzirom na $\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = a_n - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{P_k}{P_n}(a_{k+1}-a_k)$, pretpostavke iz teoreme impliciraju da je $a_1 \leqq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \leqq a_n$. Pretpostavimo sada da je $n>3$ i da je rezultat dokazan za svako $k(2\leqq k<n)$. Neka je $p_k \geqq 0$ $(1\leqq k<m)$, $p_m<0$; tada je $p_m = -P_{m-1}+p$ $(p\geqq 0)$. Ako je tada $\bar{a} = \frac{1}{P_n}\left(pa_m + \sum_{i=m+1}^{n} p_i a_i\right)$, na osnovu prethodne primedbe imamo $a_m \leqq \bar{a} \leqq a_n$. Takođe, ako je $\tilde{a} = \frac{1}{P_{m-1}}\sum_{i=1}^{m-1} p_i a_i$, imamo $a_1 \leqq \tilde{a} \leqq a_{m-1}$. S ovim oznakama (42) se svodi na

$$f\left(\frac{P_{m-1}}{P_n}\tilde{a} - \frac{P_{m-1}}{P_n}a_m + \bar{a}\right)$$

$$\leqq \frac{P_{m-1}}{P_n}\left(\frac{1}{P_{m-1}}\sum_{i=1}^{m-1} p_i f(a_i)\right) - \frac{P_{m-1}}{P_n}f(a_m) + \frac{1}{P_n}\left(pf(a_m) + \sum_{i=m+1}^{n} p_i f(a_i)\right).$$

Na osnovu J za $n=m-1$ i induktivnih pretpostavki ovo povlači da je dovoljno dokazati da je

$$f\left(\frac{P_{m-1}}{P_n}\tilde{a} - \frac{P_{m-1}}{P_n}a_m + \bar{a}\right) \leqq \frac{P_{m-1}}{P_n}f(\tilde{a}) - \frac{P_{m-1}}{P_n}f(a_m) + f(\bar{a}).$$

Ova nejednakost je neposredna posledica slučaja $n=3$. Ovim je dokaz završen. Slučajevi jednakosti i striktne konveksnosti se bez teškoće posmatraju.

PRIMEDBA: 8° Ovo je Bullenov dokaz [8]. Steffensenov dokaz je potpuno drukčiji.

Teorema 33. *Ako je $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$, $f(x)>0$, $f''(x)>0$ za $x \in \mathbf{I}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{I}^n$ $n \geqq 2$, $\boldsymbol{p}$ pozitivna n-torka, tada je*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \leqq \lambda f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right) \tag{47}$$

gde su: $m=\min(x)$, $M=\max(x)$ *i* λ *rešenje jednačine*

$$\lambda f\left(f'^{-1}\left(\frac{f(M)-f(m)}{\lambda(M-m)}\right)\right) = \frac{f(M)-f(m)}{M-m}f'^{-1}\left(\frac{f(M)-f(m)}{\lambda(M-m)}\right) + \frac{Mf(m)-mf(M)}{M-m}. \tag{48}$$

Dokaz. Dokazaćemo nejednakost (47) metodom centroida. Skup ograničen lukom krive $y=f(x)$ i tetivom AB, gde je $A=(m, f(m))$, $B=(M, f(M))$, je konveksan. Ako izdvojimo iz familije krivih $y=\lambda f(x)$ onu koja dodiruje segment AB, centroid skupa tačaka $P_1, \ldots, P_n$, gde je P_i tačka sa koordinatama $(x_i, f(x_i))$ i masom p_i $(i=1, \ldots, n)$, leži ispod krive $y=\lambda f(x)$, pa važi nejednakost (47), gde je λ parametar koji treba odrediti.

Jednačina tetive AB je

$$y = \frac{f(M)-f(m)}{M-m}x + \frac{Mf(m)-mf(M)}{M-m}. \tag{49}$$

Uslovi da prava (49) bude tangenta krive $y=\lambda f(x)$ su

$$\lambda f(x)=\frac{f(M)-f(m)}{M-m}\,x+\frac{Mf(m)-mf(M)}{M-m}, \tag{50}$$

$$\lambda f'(x)=\frac{f(M)-f(m)}{M-m}. \tag{51}$$

Ako eliminišemo λ iz (50) i (51), dobijamo

$$\begin{aligned} g(x) &= \big(f(M)-f(m)\big)f(x) \\ &\quad -f'(x)\Big(\big(f(M)-f(m)\big)\,x+Mf(m)-mf(M)\Big)=0. \end{aligned}$$

Rešenje ove jednačine je apscisa dodirne tačke. Dokazaćemo najpre da ova jednačina ima tačno jedno rešenje $x_0\in(m, M)$. Najpre imamo

$$g'(x)=-\Big(\big(f(M)-f(m)\big)\,x+Mf(m)-mf(M)\Big)f''(x)=h(x)f''(x).$$

Kako je $f''(x)>0$, $f(x)>0$, $m<M$, h linearna funkcija i

$$h(m)=(m-M)f(m)\leqq 0, \qquad h(M)=(m-M)f(M)\leqq 0,$$

grafik funkcije g može seći x-osu u najviše jednoj tački intervala (m, M).

Dalje je

$$\begin{aligned} &g(m)\,g(M) \\ &=\left(f'(m)-\frac{f(M)-f(m)}{M-m}\right)\left(f'(M)-\frac{f(M)-f(m)}{M-m}\right)f(m)f(M)\,(M-m)^2, \end{aligned}$$

pa na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti i činjenice da je f' rastuća funkcija (jer je $f''(x)>0$), imamo

$$g(m)\,g(M)\leqq 0,$$

čime je tvrđenje dokazano. Eliminacijom x iz (50) i (51) za određivanje λ dobijamo jednačinu (48).

PRIMEDBE: 9° Prethodni rezultat dobili su Mitrinović i Vasić [13]. O njegovoj primeni videti III 5.

10° Iz navedenog dokaza sleduje da jednakost u (47) važi ako i samo ako se centroid sistema tačaka $P_1, \ldots, P_n$ poklapa sa tačkom dodira krive $y=f(x)$ i segmenta AB. Ovo će biti ako postoje dva podniza $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ i $(x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n})$ niza $(x_1, \ldots, x_n)$ takva da je svaki element prvog podniza jednak m, a svaki element drugog podniza jednak M i

$$x_0=\frac{m\sum_{r=1}^{k}p_{i_r}+M\sum_{r=k+1}^{n}p_{i_r}}{\sum_{i=1}^{n}p_i}, \quad f(x_0)=\frac{f(m)\sum_{r=1}^{k}p_{i_r}+f(M)\sum_{r=k+1}^{n}p_{i_r}}{\sum_{i=1}^{n}p_i},$$

gde je x_0 jedino rešenje jednačine $g(x)=0$ na (m, M).

Sledeći rezultat (Mitrinović i Vasić [1]) dokazuje se na sličan način:

Teorema 34. Ako je $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$, $f(x) > 0$, $f''(x) > 0$ za $x \in \mathbf{I}$, tada, ako je p pozitivna n-torka i $x \in \mathbf{I}^n$, važi

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \leqq \mu + f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right),$$

gde je

$$\mu = \frac{f(M)-f(m)}{M-m} f'^{-1}\left(\frac{f(M)-f(m)}{M-m}\right) + \frac{Mf(m)-mf(M)}{M-m}$$
$$-f\left(f'^{-1}\left(\frac{f(M)-f(m)}{M-m}\right)\right).$$

Definicija 35. *Funkcija* $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}_+^*$ *naziva se logaritamski konveksna, ili multiplikativno konveksna, ako je* $\log \circ f$ *konveksna, ili, ekvivalentno, ako za svako* $x, y \in \mathbf{I}$ *i svako* λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ *važi*

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqq f(x)^{\lambda} f(y)^{1-\lambda}.$$

PRIMEDBA: 11° Ako su f i g konveksne i g rastuća, tada je $g \circ f$ konveksna (RV, p. 16). Kako je $f = \exp \circ \log \circ f$, sleduje da je logaritamski konveksna funkcija istovremeno i konveksna.

Definicija 36. *Ako je g striktno monotona, tada se f naziva (striktno) konveksna u odnosu na g ako le* $f \circ g^{-1}$ *(striktno) konveksna.*

PRIMEDBA: 12° Iako uslovi da f bude konveksna u odnosu na g sleduju iz uslova za konveksnost izvesni kasniji rezultati daju ove uslove direktno. Posebno, lema IV. 10 i posledica IV. 11 koja potiče od Mikusińskog [1]. Isti autor je takođe dokazao da ako f'' i g'' postoje i neprekidni su i ako f' i g' nisu nikad nule, tada, ako je $\frac{g''}{g'} \geqq \frac{f''}{f'}$, f je konveksna u odnosu na g. Ovaj rezultat je dobio drugim putem Cargo [1].

Definicija 37. *Ako je* $\mathbf{I}$ *jedan interval iz* $\mathbf{R}$, $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ *se naziva Jensen-konveksna funkcija ako za svako* x, y *iz* $\mathbf{I}$ *važi*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{52}$$

PRIMEDBA: 13° Za racionalno p nejednakost (52) implicira (42), pa su neprekidne Jensen-konveksne funkcije i konveksne. Obrnuto ne važi (M, p. 14; RV, p. 216), ali veoma slaba ograničenja o Jensen-konveksnim funkcijama impliciraju konveksnost. Drugim rečima, Jensen-konveksne funkcije koje se sreću u praksi skoro uvek su i konveksne.

Teorema 38. *Ako je* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{I}$ *Jensen-konveksna funkcija koja je ograničena odozgo, tada je ona neprekidna.*

Dokaz. Videti RV, p. 215.

5.2. Konveksne funkcije više promenljivih. Zamenjujući $\mathbf{I}$ konveksnim skupom $\mathbf{U}$ iz $\mathbf{R}^n$ i x, y tačkama iz $\mathbf{U}$, definicije 26, 36 i 37 se neposredno proširuju na funkcije $f: \mathbf{U} \to \mathbf{R}$ (ili $\mathbf{R}_+^*$ u slučaju definicije 35). Tada teoreme 29 i 38 ostaju u važnosti sa istim dokazima kao u jednodimenzionalnom slučaju.

Teorema 39. *Ako je* $f: \mathbf{U} \to \mathbf{R}$ *konveksna funkcija na otvorenom konveksnom podskupu* $\mathbf{U}$ *od* $\mathbf{R}^n$, *tada je f Lipschitzova funkcija u svakom kompaktnom podskupu* *od* **U** *i ima parcijalne izvode prvog reda skoro svuda u* **U**, *i ovi izvodi su neprekidni na skupu, gde svi oni postoje.*

Dokaz. Videti RV, pp. 93 i 116—117.

Teorema 40. *Ako f ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda f_{ij}'' $(1 \leqq i, j \leqq n)$ na otvorenom konveksnom skupu $\mathbf{U} \subset \mathbf{R}^n$, tada je funkcija f konveksna na* **U** *ako i samo ako je Hessian $H = \|f_{ij}''\|$ nenegativno definitan; ako je H pozitivno definitan na* **U**, *tada je f striktno konveksna.*

Dokaz. Videti RV, p. 103.

PRIMEDBA: 1° Ako je $n=2$, Hessian $H = \begin{Vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{12}'' & f_{22}'' \end{Vmatrix}$ je nenegativno definitan ako i samo ako je

(53) $\quad f_{11}'' \geqq 0 \quad (\text{ili } f_{22}'' \geqq 0) \quad \text{i} \quad f_{11}'' f_{22}'' - (f_{12}'')^2 \geqq 0;$

H je pozitivno definitan ako i samo ako su nejednakosti u (53) striktne. Za dokaz videti HLP, pp. 80—81.

5.3. Konveksnost višeg reda. Neka $a_0, a_1, \ldots, a_n$ označavaju $n+1$ različitih tačaka iz $[a, b]$. Tada, ako je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, n-ta devidirana razlika f u tih $n+1$ tačaka definisana je sa

$$V_n(f) = V_n(f; \boldsymbol{a}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(a_i)}{\omega_n'(a_i)} \qquad \left(\omega_n(x) = \omega_n(x; \boldsymbol{a}) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)\right).$$

Definicija 41. *Ako je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, funkcija f se naziva n-konveksna na $[a, b]$ ako je za svaki izbor $n+1$ različitih tačaka iz $[a, b]$ ispunjeno $V_n(f; \boldsymbol{a}) \geqq 0$; ako važi suprotna nejednakost, f se naziva n-konkavnom.*

PRIMEDBE: 1° Za $n=2$ definicija 41 je ekvivalentna sa definicijom 26 u obliku (41), pa je stoga 2-konveksna funkcija u stvari konveksna funkcija. 1-konveksna funkcija je monotono rastuća funkcija dok je 0-konveksna funkcija u stvari nenegativna funkcija.

2° Ove funkcije detaljno je ispitivao Popoviciu. Više detalja može se naći u knjizi P od istog autora. Videti takođe: Bullen [11].

3° Poznato je da je f istovremeno n-konveksna i n konkavna ako i samo ako je polinom stepena manjeg od n.

Teorema 42. *Ako je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ n-konveksna funkcija $(n \geqq 2)$, tada funkcija $f^{(k)}$ postoji i ona je $(n-k)$-konveksna $(1 \leqq k \leqq n-2)$.*

Dokaz. Videti Bullen [11].

PRIMEDBA: 4° Posebno, ako je f n-konveksna, $f^{(n-2)}$ je konveksna i $f_+^{(n-1)}$ i $f_-^{(n-1)}$ postoje osim na prebrojivom skupu i $f^{(n)}$ postoji skoro svuda.

Teorema 43. (a) *$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je n-konveksna ako i samo ako je $(n-1)$ puta ponovljen integral od te funkcije monotona funkcija.*

(b) *Ako $f^{(n)}$ postoji, tada je f n-konveksna funkcija ako i samo ako je $f^{(n)} \geqq 0$.*

Dokaz. Videti: Bullen [11].

Poglavlje II:

Aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina

1. DEFINICIJE I JEDNOSTAVNIJE OSOBINE

1.1. Aritmetička sredina. Daćemo najpre definiciju koja se skoro nameće.

Definicija 1. *Ako je* $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ *pozitivna n-torka, aritmetička sredina* $\boldsymbol{a}$ *je definisana sa*

$$A_n(\boldsymbol{a}) = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}. \tag{1}$$

Ovo je najjednostavnija sredina i stoga se ona najviše primenjuje. U stvari za većinu nematematičara to je jedina mogućnost za nalaženje srednje, tj. prosečne, vrednosti. Definicija aritmetičke sredine dva broja pojavljuje se vrlo rano, još kod Pitagorejaca (VI vek pre nove ere). Aristotel (VI vek pre nove ere) upotrebljavao je aritmetičku sredinu, ne koristeći doduše taj naziv, na sledeći način: Ako je, na primer, 10 suviše veliko, 2 suviše malo, reći ćemo, sa našeg gledišta, da je šest sredina, jer je za istu vrednost veće od 2 i manje od 10. Pojam aritmetičke sredine sreće se u Arhimedovoj definiciji težišta (III vek pre nove ere). Pojam aritmetičke sredine je takođe blisko povezan sa aritmetičkom proporcijom koju su primenjivali Pitagora i njegovi učenici. Ova proporcija ima sledeći oblik $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{a}$, gde su a, b, c realni brojevi (najverovatnije je da su Pitagorejci upotrebljavali ovu proporciju samo u slučaju kada su a, b, c prirodni brojevi). Određivanje člana b, tzv. srednjeg člana ove proporcije, dovodi do aritmetičke sredine brojeva a i c, tj. do $b=\dfrac{a+c}{2}$. Aritmetička sredina se takođe sreće u tzv. muzičkoj proporciji $a:\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2ab}{a+b}:b$. Pitagorejci su takođe ispitivali ovu proporciju.

PRIMEDBE: 1° U oznakama korišćenim u definiciji 1 niz $\boldsymbol{a}$ može se zameniti potpunijom oznakom, kao što je $A_n(a_1, \ldots, a_n)$ ili $A_n(a_i;\ 1\leq i\leq n)$. Dalje, u slučajevima kada nema dilema, može se izostaviti $\boldsymbol{a}$ ili n ili $\boldsymbol{a}$ i n.

2° Očigledno je da (1) ne zavisi od pretpostavke da su članovi $\boldsymbol{a}$ pozitivni brojevi, pa se mnoge osobine broja A_n mogu izvesti bez ove pretpostavke. Međutim, ako se drukčije ne kaže, uvek ćemo pretpostavljati da su članovi n-torke $\boldsymbol{a}$ pozitivni brojevi. Pitanje opštijih nizova biće razmatrano kasnije (poglavlje IV).

Neke elementarne osobine broja A_n navedene su u sledećoj teoremi:

Teorema 2. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *pozitivne n-torke, aritmetička sredina ima sledeće osobine:*

(a) *važi nejednakost*

$$\min(\boldsymbol{a}) \leq A(\boldsymbol{a}) \leq \max(\boldsymbol{a}), \tag{2}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$;

(b) *simetrija, tj.* $A(a_1, \ldots, a_n)$ *ne zavisi od poretka brojeva* $a_1, \ldots, a_n$;

(c) *homogenost, tj. ako je* $\lambda > 0$, *tada je* $A(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda A(\boldsymbol{a})$;

(d) *aditivnost, tj.* $A(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = A(\boldsymbol{a}) + A(\boldsymbol{b})$;

(e) *neprekidnost, tj.* $\lim\limits_{\substack{h_1 \to 0 \\ \vdots \\ h_n \to 0}} A(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) = A(a_1, \ldots, a_n)$;

(f) *monotonost, tj. ako je* $\boldsymbol{a} \leqq \boldsymbol{b}$, *tada je* $A(\boldsymbol{a}) \leqq A(\boldsymbol{b})$ *sa jednakošću ako i samo ako je* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$;

(g) *asocijativnost, tj. za* $m < n$

$$A_n(a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n) = A_n(A, \ldots, A, a_{m+1}, \ldots, a_n),$$

gde je $A = A_m(A, \ldots, A) = A_m(a_1, \ldots, a_m)$.

Dokaz ove teoreme zahteva samo jednostavnu primenu osobina pozitivnih brojeva.

PRIMEDBE: 3° Dok teorema 2 (d) daje jednostavnu vezu između $A(\boldsymbol{a})$, $A(\boldsymbol{b})$ i $A(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, znatno je teže dobiti odnos između $A(\boldsymbol{a})$, $A(\boldsymbol{b})$ i $A(\boldsymbol{ab})$. Ovaj odnos je dat kasnije u teoremi V.14, nejednakost (V. 12), koja je poznata kao Čebiševljeva nejednakost.

4° Nejednakost (2) kazuje da je funkcija $A: \mathbf{R}^{+n} \to \mathbf{R}^+$, definisana sa $A(a_1, \ldots, a_n) = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, sredina u smislu Cauchyeve definicije o čemu će biti govora u drugoj knjizi ove monografije. Nije teško proveriti da nejednakost (2) važi i u slučaju kada se pretpostavi da je $\boldsymbol{a}$ niz realnih brojeva. Prema tome, i u tom slučaju radi se o sredini.

Sledeće osobine aritmetičke sredine se bez teškoće direktno proveravaju:

(a) Algebarski zbir odstupanja pojedinih članova niza $\boldsymbol{a}$ od aritmetičke sredine tog niza je nula, tj. $\sum\limits_{i=1}^{n} \big(a_i - A_n(\boldsymbol{a})\big) = 0$.

(b) Zbir kvadrata odstupanja pojedinih članova niza $\boldsymbol{a}$ od aritmetičke sredine manji je od zbira kvadrata odstupanja od bilo koje druge veličine, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - A_n(\boldsymbol{a}))^2 < \sum_{i=1}^{n} (a_i - B)^2 \quad \big(B \neq A_n(\boldsymbol{a})\big).$$

Prirodno proširenje definicije 1 sugerirano je slučajem kada se neki od brojeva u nizu $\boldsymbol{a}$ pojavljuju više puta ili kada je neki od brojeva iz niza $\boldsymbol{a}$ važniji od drugih.

Definicija 3. *Ako su date pozitivne n-torke* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$, *težinska sredina n-torke* $\boldsymbol{a}$ *sa težinama* $\boldsymbol{p}$ *definisana je sa*

$$(3) \qquad A_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) = \frac{a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n}{p_1 + \cdots + p_n} = \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} a_i p_i.$$

PRIMEDBA: 5° Ova opštija sredina ima sve osobine navedene u teoremi 2.

1.2. Geometrijska i harmonijska sredina. Sledeće dve jednostavne sredine bile su u upotrebi istovremeno sa aritmetičkom sredinom. Slično aritmetičkoj sredini i one se prirodno pojavljuju u nekim jednostavnim algebarskim i geometrijskim problemima.

Definicija 4. *Neka su date pozitivne n-torke* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$.

(a) *geometrijska sredina n-torke* $\boldsymbol{a}$ *definisana je sa*

(4) $$G_n(\boldsymbol{a}) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n};$$

(b) *harmonijska sredina n-torke* $\boldsymbol{a}$ *definisana je sa*

(5) $$H_n(\boldsymbol{a}) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}};$$

(c) *težinska geometrijska i harmonijska sredina n-torke* $\boldsymbol{a}$ *sa težinama* $\boldsymbol{p}$ *definisane su respektivno sa*

(6) $$G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{1/P_n},$$

(7) $$H_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) = \frac{P_n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}},$$

gde je $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

PRIMEDBE: 1° Varijante označavanja i naziva koje su korišćene kod aritmetičke sredine slično će biti korišćene kod geometrijske i harmonijske sredine (videti primedbu 1.1°).

2° Sledeći jednostavni identiteti korisni su za primene:

(8) $$H_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) = A_n\left(\frac{1}{\boldsymbol{a}};\, \boldsymbol{p}\right)^{-1},$$

(9) $$G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) = \exp A_n(\log \boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}).$$

Kako je jednakost (8) veoma jednostavna, osobine harmonijske sredine nećemo ispitivati u detalje. Na ovu sredinu, kao specijalan slučaj opštijih potencijalnih sredina, vratićemo se kasnije (poglavlje III).

Teorema 5. *Geometrijska i harmonijska sredina imaju osobine* (a), (b), (c) *navedene u teoremi* 2. *Pored toga je*

(10) $$G_n(\boldsymbol{ab};\, \boldsymbol{p}) = G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})\, G_n(\boldsymbol{b};\, \boldsymbol{p}).$$

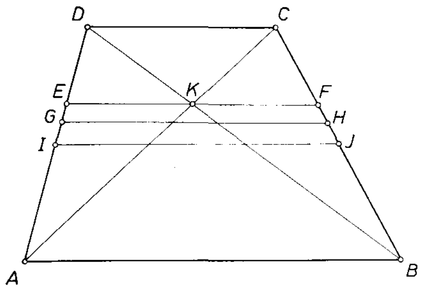
PRIMEDBE: 3° Nejednakost (2) i odgovarajuće nejednakosti za H i G mogu se generalisati na sledeći način. Ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ dve pozitivne n-torke i $m \leqq \frac{a_i}{b_i} \leqq M$ $(1 \leqq i \leqq n)$, tada je $mb_i \leqq a_i \leqq Mb_i$ pa množenjem sa p_i, i sabiranjem dobijamo

$$\min\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right) \leqq \frac{A_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})}{A_n(\boldsymbol{b};\, \boldsymbol{p})} \leqq \max\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right).$$

4° Odnos između $G(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b};\, \boldsymbol{p})$, $G(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})$ i $G(\boldsymbol{b};\, \boldsymbol{p})$ mnogo teže je odrediti nego (10). Taj odnos biće određen kasnije (teorema III. 22, posebno videti: nejednakost (III. 32)).

1.3. Interpretacije i primene

1.3.1. Sredine A_2, G_2, H_2 sa jednakim težinama imaju jednostavnu geometrijsku interpretaciju. Neka je $ABCD$ trapez (slika 1) kod koga su $AB(=a_1)$ i $CD(=a_2)$ paralelne strane. Neka su I i J tačke na stranama AD i BC respektivno, takve da je IJ paralelno sa AB i da polovi stranu AD (pa prema tome i BC); tada je $IJ=A_2$. Ako su G i H tačke na stranama AD i BC respektivno takve da su trapezi $ABHG$ i $GHCD$ slični, tada je $GH=G_2$. Najzad, ako prava, koja je paralelna sa AB i prolazi kroz tačku preseka dijagonala AC i BD, seče strane AD i BC u tačkama E i F respektivno, tada je $EF=H_2$.



Sl. 1

Slika sugerira da je

$$\min\{a_1, a_2\} \leqq H_2(a_1, a_2) \leqq G_2(a_1, a_2) \leqq A_2(a_1, a_2) \leqq \max\{a_1, a_2\} \tag{11}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=a_2$. Ovo je važan rezultat i na njega ćemo se vratiti u odeljku 2.

1.3.2. Aritmetička i harmonijska sredina imaju interesantne interpretacije pomoću grešaka (Pólya [1]).

Neka su data dva pozitivna broja a, b $(a \leqq b)$ i neka je x neki broj $(a \leqq x \leqq b)$. Ako umesto x uzmemo približnu vrednost y, tada je greška $|y-x|$, dok je relativna greška $\frac{|y-x|}{x}$. Kako treba izabrati y da bi minimizirali maksimalnu mogućnu vrednost greške ili relativne greške? Klasična Čebiševljeva teorema daje metod za rešavanje takvih problema: izabrati y tako da greške (relativne greške) u dva ekstremna slučaja budu jednake po apsolutnim vrednostima ali suprotnog znaka.

Prvi problem je da se izračuna $\varepsilon = \min_y (\max_x |y-x|)$ i ovo nastupa za y koje zadovoljava uslov $y-a=-(y-b)$, odakle je $y=\frac{a+b}{2}$, pa je $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$.

U drugom problemu treba izračunati $\rho=\min_y\left(\max_x \frac{|y-x|}{x}\right)$. Odavde je $\frac{y-a}{a}=\frac{b-y}{b}$, što daje $y=\frac{2ab}{a+b}$ i $\rho=\frac{b-a}{a+b}$.

Prema tome, aproksimacije koje dovode do minimuma maksimalne mogućne vrednosti greške (relativne greške) su aritmetička (harmonijska) sredina granica.

1.3.3. Dobro je poznata upotreba srednjih vrednosti u statistici (videti, na primer, Moroney [1], posebno glavu 4).

Ako, kao što je uobičajeno u statistici, označimo sa $\bar{a}$ aritmetičku sredinu sa jednakim težinama od $\boldsymbol{a}$, tada je varijansa od $\boldsymbol{a}$ definisana sa $A_n((\boldsymbol{a}-\bar{a})^2)$. Standardna devijacija (kvadratni koren iz varijanse) bolje se uklapa u odeljak o potencijalnim sredinama (poglavlje III). Prema oznakama iz tog poglavlja standardna devijacija definisana je sa $M_n^{[2]}(\boldsymbol{a}-\bar{a})$.

U statici i dinamici sistema tačaka razne standardne veličine su primeri korišćenja aritmetičke sredine. Tako, na primer, ako n-torku $\boldsymbol{a}$ čine koordinate n tačaka na pravoj, i n-torku $\boldsymbol{p}$ čine mase ovih tačaka, tada $A_n(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})$ predstavlja koordinatu težišta ovog sistema tačaka. $A_n(\boldsymbol{a}^2;\ \boldsymbol{p})$ predstavlja kvadrat poluprečnika rotacije ovog sistema tačaka oko koordinatnog početka. Primetimo da poluprečnik rotacije može bolje da se predstavi pomoću $M_n^{[2]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})$ (videti Ramsey [2], posebno odeljak X, i [1], odeljak XIII).

U oba slučaja nije dato ograničenje da je n-torka pozitivna; u stvari, u poslednjem slučaju može biti govora o n-torki vektora.

1.3.4. Jedna veoma stara primena aritmetičke i harmonijske sredine je Heronov metod za izračunavanje kvadratnog korena (Petrović [1], Ory [1]). Pretpostavimo da je $x>0$ i izaberimo dva pozitivna broja a i b takva da je $a<b$ i $ab=x$. Stavimo $a_0=a$ i $b_0=b$ i definišimo a_n i b_n pomoću

$$a_n=H_2(a_{n-1},\ b_{n-1})=\frac{2\,a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}},\quad b_n=A_2(a_{n-1},\ b_{n-1})=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

$(n\geqq 1)$.

Odavde je $a_n=\dfrac{x}{b_n}\ (n\geqq 0)$. Iz (11) sleduje $a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$. Dalje je

$$b_n-a_n=\frac{(b_{n-1}-a_{n-1})^2}{2\,(b_{n-1}+a_{n-1})}\leqq\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}.$$

Prema tome,

$$b_n-a_n\leqq\frac{b-a}{2^n}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=\sqrt{x}.$$

Primedbe: 1° Druge iteracije sredina pojavljuju se u teoremi 37. Ova materija biće detaljnije obrađena u drugoj knjizi ove monografije.

2° Heronov metod su proširili na korene višeg reda Ory [1] i Nikolajev [1].

3° Prethodni rezultat može se interpretirati na sledeći način: iteracija aritmetičke i geometrijske sredine dva broja konvergira ka njihovoj geometrijskoj sredini.

1.3.5. Čuvene Cesàroove sredine koje se koriste pri sumiranju redova, posebno Fourierovih, primeri su aritmetičkih sredina (Hardy [2, p. 96]).

Za dati niz $\boldsymbol{a}$ definišimo A_j^k $(k,\ j=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ na sledeći način:

$$A_j^0=a_j,\quad A_j^k=\sum_{i=0}^{j}A_i^{k-1}\ (k\geqq 1);$$

tada je k-ta Cesàroova sredina niza $\boldsymbol{a}$ definisana sa

$$C_n^k(\boldsymbol{a})=\frac{A_n^k}{\binom{n+k}{k}}.$$

PRIMEDBA: 4° Primetimo da je $A_n^k = \binom{n+k}{k}$ ako je $a_j = 1$ za svako j. Jednostavna izračunavanja daju

$$C_n^k(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+k+1}{k+1} a_i,$$

te je

$$C_n^k(\boldsymbol{a}) = A_{n+1}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) \quad \left(\boldsymbol{p} = \left(\binom{n-i+k+1}{k+1};\quad 0 \leqq i \leqq n\right)\right).$$

Analogno mogu se definisati k-ta iterirana geometrijska i harmonijska sredina (Pizzetti [2]). Na primer, ako je

$$P_j^0 = a_j, \quad P_j^k = \prod_{i=0}^{j} P_i^{k-1} \quad (k \geqq 1),$$

definišimo

$$D_n^k(\boldsymbol{a}) = \left(P_n^k\right)^{1/\binom{n+k}{k}} = \left(\prod_{i=0}^{n} a_i^{\binom{n-i+k-1}{k-1}}\right)^{1/\binom{n+k}{k}} = G_{n+1}(\boldsymbol{a};\ \tilde{\boldsymbol{p}}),$$

gde je $\tilde{\boldsymbol{p}} = \left(\binom{n-i+k-1}{k-1};\quad 0 \leqq i \leqq n\right)$.

2. NEJEDNAKOST IZMEĐU GEOMETRIJSKE I ARITMETIČKE SREDINE

2.1. Tvrđenje teoreme. Ovaj odeljak posvećen je raznim dokazima nejednakosti (11) kao i njene neposredne generalizacije na slučaj težinskih sredina. Dokazi koji daju bolje rezultate, iz kojih (11) sleduje kao partikularan slučaj, biće navedeni kasnije.

Teorema 6. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *dve pozitivne n-torke, tada je*

(12) $\quad G(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) \leqq A(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Nejednakost (12) *zvaćemo, kratkoće radi,* ***GA*** *nejednakost, ili samo* ***GA***.

Posledica 7. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *dve pozitivne n-torke, tada je*

(13) $\quad \min(\boldsymbol{a}) \leqq H(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) \leqq G(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) \leqq A(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) \leqq \max(\boldsymbol{a})$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Koristeći (8), nejednakost $H_n(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) \leqq G_n(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})$ se neposredno dobija iz (12) (videti takođe Transon [1]). Ostale nejednakosti u (13) i slučaj jednakosti sleduju iz teorema 2, 5 i 6.

2.2. Preliminarni rezultati. Pre nego što pređemo na dokaz teoreme 6, zadržaćemo se na nekim rezultatima koji će pojednostaviti kasnija razmatranja.

2.2.1. Posmatraćemo najpre teoremu 6 za $n = 2$ i jednake težine.

Lema 8. *Ako je a, $b>0$, tada je $G_2(a, b) \leqq A_2(a, b)$, tj. važi*

(14) $$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a=b$.

***Dokaz* 1.** (14) sleduje direktno iz identiteta $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$.

***Dokaz* 2.** Nejednakost takođe izlazi iz sledećeg identiteta:

$$\frac{a+b}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}+\sqrt{ab}.$$

***Dokaz* 3.** Pošto su izrazi koji se pojavljuju u (14) homogeni, ne gubi se od opštosti ako se pretpostavi da je $ab=1$. Tada je lema 8 ekvivalentna sa sledećim tvrđenjem: Ako je a, $b>0$ i $ab=1$, tada je $a+b \geqq 2$ sa jednakošću ako i samo ako je $a=b$. Ako je $a \neq b$, pretpostavimo da je $a>1>b$, što povlači $(a-1)(b-1)<0$, tj.

(15) $$a+b>1+ab.$$

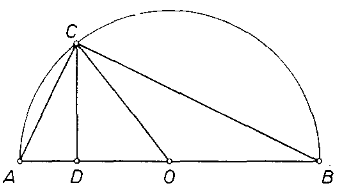
***Dokaz* 4.** Koristeći isto rezonovanje kao u dokazu 3, imamo da je lema 8 ekvivalentna sa tvrđenjem: ako je $a>0$, tada je

(16) $$a+\frac{1}{a} \geqq 2,$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a=1$. Međutim, (16) je ekvivalentno sa $(a-1)^2 \geqq 0$, odakle direktno sleduje rezultat.

***Dokaz* 5.** Nad duži $AB(=a+b)$ kao nad prečnikom konstruišimo polukrug (slika 2). Neka je D tačka na duži AB takva da je $AD=a$, $DB=b$ i neka je C tačka na polukrugu takva da je $CD \perp AB$. Kako su trouglovi ADC i CDB slični, imamo $CD=\sqrt{ab}$. Ako je O centar polukruga, tada je $CO=\frac{a+b}{2}$. Budući da je u trouglu ODC strana CD kateta i OC hipotenuza, imamo $CD \leqq CO$, sa jednakošću ako i samo ako je $D=O$, tj. važi tvrđenje leme 8.

O ovoj geometrijskoj interpretaciji nejednakosti (14) kao i nejednakosti između harmonijske i geometrijske sredine videti Ercolano [1]. U tom članku data je još jedna analogna geometrijska interpretacija ovih nejednakosti.

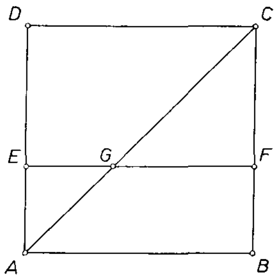


Sl. 2

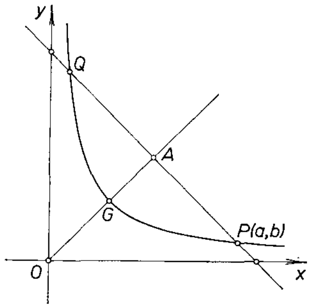
***Dokaz* 6.** Neka je $ABCD$ kvadrat strane a i $ABFE$ pravougaonik čije su strane a i b (slika 3). Tada je:

$$\text{area } ABFE = \text{area } AGE + \text{area } ABFG \leqq \text{area } AGE + \text{area } ABC,$$

tj. $ab \leqq \frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}$, što je ekvivalentno sa (14). Jednakost nastupa ako i samo ako ABC i $ABFG$ imaju jednake površine, tj. ako i samo ako je $a=b$.



Sl. 3



Sl. 4

***Dokaz* 7.** Neka su OGA, PGQ, PAQ redom krive $x=y$, $xy=ab$, $x+y=a+b$, pri čemu možemo pretpostaviti da je $a<b$ (slika 4). Presek krive OGA sa PAQ je aritmetička sredina brojeva a i b, dok je presek krivih OGA i PGQ njihova geometrijska sredina. Kako je kriva $xy=ab$ konveksna, deo prave $x+y=a+b$ koji spaja tačke (b, a) i (a, b) leži iznad odgovarajućeg dela krive $xy=ab$, pa je $G<A$. Bez korišćenja konveksnosti do istog zaključka možemo doći na sledeći način: koeficijent pravca tangente krive $xy=ab$ u tački $P(a, b)$ je $-\frac{b}{a}$, dok je koeficijent pravca prave $x+y=a+b$ jednak -1. Kako je $-\frac{b}{a}>-1$ i budući da se posmatrana kriva i prava seku samo u tačkama P i Q, kriva PGQ leži između ovih dveju tačaka preseka levo od krive PAQ, pa je $G<A$.

***Dokaz* 8.** Funkcija f, definisana pomoću $f(x)=e^x$, je striktno konveksna, pa je

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=e^{\frac{x+y}{2}}\leqq\frac{f(x)+f(y)}{2}=\frac{e^x+e^y}{2}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $x=y$. Stavljajući $a=e^x$ i $b=e^y$, dobijamo lemu 8.

PRIMEDBE: 1° Dokazi 3 i 4 mogu se koristiti i u slučaju proizvoljnog n (videti dokaze 9 i 26 koji sleduju).

2° Nejednakost (16) može se primeniti da bi se dao jednostavan dokaz nejednakosti

(17) $$H_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \leqq A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$. Prema (13) nejednakost (17) je slabija od nejednakosti *GA*, ali ju je WALSH [1] koristio da bi dokazao *GA* (videti dokaz 15 ove nejednakosti). Nejednakost (17) je ekvivalentna sa

(18) $$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}\right)\geqq P_n^2.$$

Ovo je tačno za $n=1$. Pretpostavimo da važi za $n-1$. Tada je

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i+p_n a_n\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{p_i}{a_i}+\frac{p_n}{a_n}\right)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{p_i}\right)+p_n a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i}{a_i}+\frac{p_n}{a_n}\sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i+p_n^2$$

$$\geqq P_{n-1}^2+p_n \sum_{i=1}^{n-1} p_i\left(\frac{a_n}{a_i}+\frac{a_i}{a_n}\right)+p_n^2 \quad \text{(na osnovu induktivne predpostavke)}$$

$$\geqq P_{n-1}^2+2p_n P_{n-1}+p_n^2 \quad \text{(na osnovu (16))}$$

$$=P_n^2.$$

Ovim je završen dokaz nejednakosti (17). Slučaj jednakosti se neposredno dobija.

2.2.2. Opšti slučaj teoreme 6 kada je $n=2$ ekvivalentan je prvom delu sledeće leme.

Lema 9. (a) *Ako je* $\alpha+\beta=1$ $(\alpha, \beta, a, b>0)$, *tada je*

(19) $\quad a^\alpha b^\beta \leqq \alpha a+\beta b$

sa jednakošću ako i samo ako je $a=b$.

(b) *Ako je* $\alpha<0$, *važi suprotna nejednakost; slučaj jednakosti je isti.*

Dokaz. (i) Najpre ćemo dati nekoliko dokaza dela leme 9 (a).

***Dokaz* 1.** Nejednakost (19) možemo da prikažemo u obliku $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha-1 \leqq \alpha\left(\frac{a}{b}-1\right)$, a to je nejednakost (I. 9).

***Dokaz* 2.** Za $\alpha=\frac{p}{p+q}$, $\beta=\frac{q}{p+q}$ (p, q prirodni brojevi) jednostavno izvođenje iz (14) dao je Aiyar [1].

Neka je $a<b$. Posmatrajmo $p+q-1$ brojeva $x_1<\cdots<x_{p+q-1}$ takvih da je $a<x_1<\cdots<x_{p+q-1}<b$ i

(20) $\quad a-x_1=x_1-x_2=\cdots=x_{p+q-1}-b.$

Na osnovu (14) je

(21) $\quad \frac{a}{x_1}<\frac{x_1}{x_2}<\cdots<\frac{x_{p+q-1}}{b}.$

Aritmetička sredina prvih q članova u (20) jednaka je aritmetičkoj sredini preostalih p članova, tj.

(22) $\quad \frac{a-x_q}{q}=\frac{x_q-b}{p}.$

S druge strane, geometrijska sredina prvih q članova u (22) je manja od geometrijske sredine preostalih p članova, tj.

(23) $\quad \left(\frac{a}{x_q}\right)^{\frac{1}{q}}<\left(\frac{x_q}{b}\right)^{\frac{1}{p}}.$

Zamenjujući x_q iz (22) u (23), dobijamo traženi rezultat.

***Dokaz* 3.** Metod korišćen u dokazu 7 leme 8 može se prilagoditi za opštiji slučaj. Posmatrajmo krive OGA, PGQ, PAQ čije su jednačine redom date sa $x=y$, $x^\alpha y^\beta=a^\alpha b^\beta$, $\alpha x+\beta y=\alpha a+\beta b$ i pretpostavimo da je $a>b$. Krive PGQ i PAQ seku se u tački čija prva koordinata zadovoljava jednačinu $h(x)=0$, gde je

$h(x) = \alpha x^{1/\beta} - (\alpha a + \beta b) x^{\alpha/\beta} + \beta a^{\alpha/\beta} b$. Dalje je $h(0) > 0$, $h(a) = 0$ i $h(x) > 0$ za dovoljno veliko x. Kako je $h'(x) = \frac{\alpha}{\beta} x^{(\alpha/\beta)-1} \big(x - (\alpha a + \beta b)\big)$, h ima jedinstveni negativni minimum u $x = \alpha a + \beta b = A$, pa h ima dve nule, recimo a i a', takve da je $a' < A < a$.

***Dokaz* 4.** Ako primenimo (I. 40), dokaz 8 leme 8 može se prilagoditi za opštiji slučaj (Mullin [1]).

PRIMEDBA: 4° Ovaj metod je proširen kasnije (videti VI. 4).

(ii) Posmatrajmo sada deo (b) leme (9). Ako je $\alpha < 0$, stavimo $a' = a^\beta$, $b' = b^\beta$, $\alpha' = -\frac{\alpha}{\beta}$, $\beta' = 1 - \alpha' = \frac{1}{\beta}$; tada primenjujući (19) na a', b', α', β', dobijamo traženi rezultat.

2.2.3. Sada ćemo pokazati da se opšti slučaj teoreme 6 može izvesti iz slučaja kada su težine jednake.

Lema 10. *Dovoljno je dokazati teoremu 6 za slučaj jednakih težina.*

***Dokaz*.** Ako je teorema 6 dokazana za $\boldsymbol{p}$ konstantno, jednostavna aritmetička razmatranja dovode do dokaza za racionalno $\boldsymbol{p}$. Tada GA za slučaj $\boldsymbol{p}$ realno dobijamo prelazom na graničnu vrednost. Da bi dokaz bio potpun, treba dokazati da ako $\boldsymbol{a}$ nije konstantno, nejednakost GA je striktna.

Pretpostavimo da sve težine p_i nisu racionalne i stavimo $p_i = r_i + q_i$ ($r_i \geqq 0$, $q_i \geqq 0$, q_i racionalno; $1 \leqq i \leqq n$). Primetimo da je

$$G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) = G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{r})^{R_n/P_n} G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{q})^{Q_n/P_n}.$$

Kako smo GA izveli primenom graničnih vrednosti, imamo $G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{r}) \leqq A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{r})$ i kako $\boldsymbol{a}$ nije konstantno i kako je $\boldsymbol{q}$ racionalno, imamo $G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q}) < A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})$. Prema tome, na osnovu činjenice da GA važi za $n = 2$, nalazimo

$$G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) < A_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{r})^{R_n/P_n} A_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{q})^{Q_n/P_n} \leqq A_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}).$$

PRIMEDBA: 5° Izgleda da se ovaj rezultat prvi put pojavljuje u HLP, p. 18. Drugi dokaz je dat kasnije (videti primedbu III. 3.1.7°).

Sada ćemo dati čuvenu osobinu regresivne indukcije (Cauchy [1, p. 315]). Ona je deo Cauchyevog dokaza nejednakosti GA (videti dokaz 2 koji sleduje). Ova osobina omogućuje da dokaz teoreme 6 svede na dokaz u slučaju $n = n_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) za neki niz $n_1, n_2, \ldots$ takav da je $\lim\limits_{n \to +\infty} n_k = +\infty$.

Lema 11. *Ako je teorema 6, u slučaju jednakih težina, tačna za neko n, tada je ona tačna za svako $k\,(1 \leqq k \leqq n)$.*

***Dokaz*.** Neka je $k\,(1 \leqq k \leqq n)$ prirodan broj, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Definišimo $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ pomoću $b_i = a_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$, $b_i = A_k(\boldsymbol{a})$ $(k+1 \leqq i \leqq n)$. Tada je, na osnovu induktivne pretpostavke $G_n(\boldsymbol{b}) \leqq A_n(\boldsymbol{b})$ (sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$), tj. $G_k(\boldsymbol{a})^{k/n} A_k^{(n-k)/n} \leqq A_k$, što je ekvivalentno sa $G_k(\boldsymbol{a}) \leqq A_k(\boldsymbol{a})$.

PRIMEDBA: 6° Bez teškoće se vidi da dokaz ostaje u suštini isti i bez pretpostavke da su težine jednake.

2.2.5. Na kraju daćemo neke oblike nejednakosti GA koji imaju interesantne geometrijske primene.

Lema 12. *GA je ekvivalentno sa svakim od tvrđenja:*

(a) *ako je* $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$, *tada je* $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n$,

(b) *ako je* $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, *tada je* $\prod_{i=1}^{n} a_i \leqq \frac{1}{n^n}$

sa jednakošću u oba slučaja ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Ako važi GA, tada važi (a) i (b).

Obrnuto, ako (a) važi, neka je $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ i definišimo $\boldsymbol{b}$ sa $\boldsymbol{b} = \left(\frac{a_1}{G}, \ldots, \frac{a_n}{G}\right)$. Tada je $\prod_{i=1}^{n} b_i = 1$. Na osnovu (a) je $\sum_{i=1}^{n} b_i \geqq n$, što je na osnovu definicije niza $\boldsymbol{b}$ ekvivalentno sa $G \leqq A$. U slučaju (b) dokaz dobijamo ako uvedemo pomoćni niz $\boldsymbol{c} = \left(\frac{a_1}{A}, \ldots, \frac{a_n}{A}\right)$. Slučaj jednakosti se dobija neposredno.

Prema tome (a) ili (b) impliciraju GA u slučaju jednakih težina, a prema lemi 10 i opšti slučaj GA.

PRIMEDBE: 7° Slučaj $n = 2$ leme 12 (a) je oblik leme 8 korišćen u dokazu 3 ove leme.

8° Oba dela ove leme imaju jednostavnu geometrijsku interpretaciju: (a) Od svih n-dimenzionalnih paralelepipeda date zapremine, n-dimenzionalna kocka ima najmanji zbir ivica; (b) Od svih n-dimenzionalnih paralelepipeda datog zbira ivica, n-dimenzionalna kocka ima najveću zapreminu.

Druga interpretacija leme 12 (b) je: Od svih particija jediničnog intervala na n subintervala particija na jednake subintervale je ona koja daje maksimalni proizvod subintervala.

Lema 13. *Ako je* $n = 3$, *tada je GA ekvivalentno sledećem izoperimetrijskom problemu: od svih trouglova datog obima, ravnostrani trougao ima najveću površinu.*

Dokaz. Kako je $P^2 = (s-a)(s-b)(s-c)s$, gde su a, b, c strane trougla, s njegov poluobim i P površina, primenom GA u slučaju $n = 3$ imamo da je $\frac{P^2}{s} \leqq \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27}$, sa jednakošću ako i samo ako je $a = b = c$, odakle sleduje rešenje izoperimetrijskog problema. Obrnuto, ako su α, β, γ proizvoljna tri realna broja, stavimo $2s = \alpha + \beta + \gamma$, $a = \frac{2s-\alpha}{2}$, $b = \frac{2s-\beta}{2}$, $c = \frac{2s-\gamma}{2}$. Tada, na osnovu rešenja izoperimetrijskog problema, ako su a, b, c strane trougla (što je uvek mogućno), imamo $(\alpha\beta\gamma)^{1/3} = \big(8(s-a)(s-b)(s-c)\big)^{1/3} = \left(\frac{8P^2}{s}\right)^{1/3} \leqq \left(\frac{8s^3}{27}\right)^{1/3}$ $= \frac{a+b+c}{3}$, sa jednakošću ako i samo ako je $a = b = c$, što sa lemom 10 komplementira dokaz.

PRIMEDBE: 9° Generalniji rezultat, kada se trougao zameni tetivnim n-touglom, izgleda teži, pošto nije neposredno jasno kako treba tetivni n-tougao pridružiti skupu od n pozitivnih brojeva. Međutim, prvi deo gornjeg dokaza pokazuje da GA implicira da je pravilni n-tougao tetivni poligon koji za dati obim ima najveću površinu.

10° Kako izgleda, lema 12 je prvi put formulisana od strane Biochea [1]. Detaljnije o lemama 12 i 13 videti Kazarinoff [1, p. 18—58], Kline [1, p. 126], Shisha [1].

2.3. Dokaz nejednakosti GA. Sada smo u mogućnosti da damo više dokaza ove nejednakosti,

Nejednakost GA je verovatno najvažnija među nejednakostima i sigurno je da se nalazi na čelu nejednakosti. To je razlog što u matematičkoj literaturi postoji veliki broj dokaza nejednakosti GA, od kojih je u knjizi BB, §§ 5—16, navedeno dvanaest. U ovom što sleduje navešćemo trideset i šest dokaza nejednakosti GA, ali ne tvrdimo da ih još nema. Ovi dokazi biće dati onim redom kojim su se pojavljivali u literaturi. Skoro svi dokazi biće dati za slučaj jednakih težina, što je na osnovu leme 10 dovoljno. Više dokaza dato je indukcijom — pri tome je, na osnovu leme 8 ili 9, dovoljno dati prelaz od n na $n+1$, ili, na osnovu leme 11, dokazati za proizvoljan neograničen niz vrednosti n.

***Dokaz* 1.** Koliko smo mogli da utvrdimo, prvi dokaz dao je Maclaurin (takođe videti: Chrystal [1, p. 47], Grebe [1] i HLP, p. 19, fusnota (a)). On daje iskaz rezultata u formi leme 12 (b).

Pretpostavimo da je $0 \leqq a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$, $a_1 \neq a_n$; zamenimo a_1 i a_n sa $\frac{1}{2}(a_1+a_n)$. Time se A ne menja ali, koristeći lemu 8, lako je videti da se G povećava. Ako se tada $\boldsymbol{a}$ menja tako da A ostaje fiksno dok je $\boldsymbol{a}'$ niz pri kome G ima svoju najveću vrednost, gornji iskaz pokazuje da $\boldsymbol{a}'$ mora biti konstantno. Prema tome, maksimum G je dostignut ako su svi članovi niza $\boldsymbol{a}$ jednaki i taj maksimum je A.

Budući da je ovaj dokaz dat dosta davno, nije ni čudo da je egzistencija jednog $\boldsymbol{a}'$ za koje G postaje maksimalno, bila podrazumevana. Egzistencija takvog $\boldsymbol{a}'$ može se dokazati na jedan od sledeća dva načina (HLP, p. 19, fusnota (a)).

(i) Pozivajući se na rezultat da neprekidna funkcija Φ na kompaktnom skupu K dostiže svoj maksimum na K. U ovom slučaju je

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n},$$

$$K = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geqq 0 \quad (1 \leqq i \leqq n) \text{ i } \sum_{i=1}^{n} x_i = nA\right\}.$$

(ii) Pošto se izvrši k koraka u Maclaurinovom dokazu, obeležimo rezultirajući niz sa $\boldsymbol{a}^k$ $(0 < a_1{}^k \leqq \cdots \leqq a_n{}^k)$. Jasno je da je $a_1{}^0 \leqq a_1{}^1 \leqq \cdots \leqq a_n{}^1 \leqq a_n{}^0$ i prema tome, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_1{}^k$ i $\lim\limits_{k\to+\infty} a_n{}^k$ postoje; pretpostavimo da su oni jednaki α i β respektivno. Nije teško videti da je posle n koraka maksimalna razlika u nizu bila svedena na 1/2. To će reći da je $a_n{}^n - a_1{}^n \leqq \frac{a_2-a_1}{2}$ i stoga $\lim\limits_{k\to+\infty}(a_n{}^k - a_1{}^k) = 0$, tj. $\alpha = \beta$. Ovaj postupak potiče od Hardya.

***Dokaz* 2.** Jedan elementaran dokaz dao je Cauchy [1, p. 315]. To je jedan duhovit induktivni postupak koji se sastoji u dokazu da nejednakost GA važi za svako n oblika 2^k, Pretpostavimo da je nejednakost GA dokazana za svako $k \leqq m$ i neka je

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_{2m}), \quad \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_{2m}), \quad \boldsymbol{c} = (a_1, \ldots, a_{2m}, b_1, \ldots, b_{2m}).$$

Tada je

$$G_{2m+1}(\boldsymbol{c}) = \left(G_{2m}(\boldsymbol{a})\, G_{2m}(\boldsymbol{b})\right)^{1/2} \leqq \left(A_{2m}(\boldsymbol{a})\, A_{2m}(\boldsymbol{b})\right)^{1/2}$$

na osnovu induktivne pretpostavke, sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_{2m} = b_1 = \cdots = b_{2m}$. Kako GA važi za $n=2$ (lema 8), imamo

$$\left(A_{2m}(\boldsymbol{a}) A_{2m}(\boldsymbol{b})\right)^{1/2} \leqq A_2\left(A_{2m}(\boldsymbol{a}),\ A_{2m}(\boldsymbol{b})\right) \leqq A_{2m+1}(\boldsymbol{c})$$

sa jednakošću ako i samo ako važi jednakost u prvom koraku.

Ovaj dokaz ponovo je otkrio Chajoth [1].

Jednu, nešto izmenjenu varijantu ovog dokaza, dao je Boutroux [1].

Dokaz 3. Drugi rani dokaz pripada Liouvilleu [1]. Sve do pojave knjige [11], p. 28, od Mitrinovića i Vasića ovaj rezultat nije pripisivan Liouvilleu. Kao rezultat toga, on je više puta ponovo otkrivan (videti, na primer, Buch [1], Lawrence [1], Yosida [1]). Ovaj dokaz nije elementaran kao 1, međutim može da posluži za dobijanje preciznijih rezultata (videti Radoovu nejednakost — teorema 18, niže). Pretpostavimo da je GA dokazano za sve prirodne brojeve manje od n. Stavimo $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$ i $f(x)=A_n{}^n-G_n{}^n$. Tada je

$$f'(x)=\left(\frac{n-1}{n}A_{n-1}+\frac{x}{n}\right)^{n-1}-G_{n-1}{}^{n-1},$$

pa funkcija f ima jedinstveni minimum u tački x'. Vrednost toga minimuma je $f(x')=(n-1)\,G_{n-1}{}^{n-1}(A_{n-1}-G_{n-1})$. Na osnovu induktivne pretpostavke je $f(x')\geqq 0$, pa je i $f(x)\geqq 0$, što kompletira dokaz osim u slučaju jednakosti. Da bi bilo $f(x)=0$, mora biti $f(x')=0$ i $x=x'$. Na osnovu induktivne pretpostavke $f(x')=0$ ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_{n-1}$ dok je $x'=a_1$.

Dokaz 4. Ovaj dokaz je iz 1891. i pripada Hurwitzu [1]. Interesantno je da on daje tačnu vrednost razlike A_n-G_n.

Ako je f proizvoljna funkcija od $x_1, \ldots, x_n$, stavimo $Pf(x_1, \ldots, x_n)=\Sigma f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Sa ovom oznakom je

$$Px_1{}^n=(n-1)\,!\,(x_1{}^n+\cdots+x_1{}^n)=n\,!\,A_n(x_1{}^n, \ldots, x_1{}^n),$$

$$Px_1\cdots x_n=n\,!\,x_1\cdots x_n=n\,!\,G_n(x_1{}^n, \ldots, x_n{}^n).$$

Definišimo $\Phi_k\ (1\leqq k\leqq n-1)$ pomoću

$$\Phi_k=P\left((x_1{}^{n-k}-x_2{}^{n-k})(x_1-x_2)\,x_3\cdots x_{k+1}\right).$$

Tada je

$$\Phi_k=P\left((x_1-x_2)^2\,(x_1{}^{n-k-1}+\cdots+x_n{}^{n-k-1})\,x_3\cdots x_{k+1}\right),$$

što implicira $\Phi_k\geqq 0\ (1\leqq k\leqq n-1)$ ako je $x_i\geqq 0\ (1\leqq i\leqq n)$ i da imamo $\Phi_1=\cdots$ $=\Phi_{n-1}=0$ samo ako je $x_1=\cdots=x_n$. Dalje je

$$\Phi_k=2\,(Px_1{}^{n-k+1}x_2\cdots x_k-Px_1{}^{n-k}x_2\cdots x_{k+1}),$$

odakle sumiranjem dobijamo

$$2\,n\,!\,\left(A_n(\boldsymbol{x}^n)-G_n(\boldsymbol{x}^n)\right)=2\,(Px_1{}^n-Px_1\cdots x_n)=\sum_{k=1}^{n-1}\Phi_k\geqq 0;$$

slučaj jednakosti se neposredno utvrđuje.

PRIMEDBA: 1° U BB, p. 8, ukazano je da ovaj dokaz sadrži osnovu tehnike koju je kasnije Hurwitz koristio u čuvenom članku [2] o generiranju invarijanata pomoću integracije nad grupama. Dalje u vezi sa ovim videti: Motzkin [1] i [2].

Dokaz 5. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi. Ako stavimo $h_i=A_n(\boldsymbol{x})-x_i$, imamo $h_1+\cdots+h_n=0$, pa za $r=1, \ldots, n-1$ važi

$$(h_1+\cdots+h_r)\,h_{r+1}=(A_n(\boldsymbol{x})+h_1+\cdots+h_r)\,x_{r+1}$$
$$-A_n(\boldsymbol{x})\left(A_n(\boldsymbol{x})+h_1+\cdots+h_{r+1}\right).$$

Posle množenja sa $A_n(x)^{r-1} x_{r+2} \cdots x_n$ dobijamo

$$\begin{aligned}(h_1 + \cdots + h_r)\, h_{r+1}\, A_n(x)^{r-1} x_{r+2} \cdots x_n \\ = A_n(x)^{r-1}\big(A_n(x) + h_1 + \cdots + h_r\big)\, x_{r+1} \cdots x_n \\ - A_n(x)^r\big(A_n(x) + h_1 + \cdots + h_{r+1}\big)\, x_{r+2} \cdots x_n \qquad (r = 1, \ldots, n-1).\end{aligned}$$

Posle sumiranja ovih jednakosti za $r = 1, \ldots, n-1$ nalazimo

$$\begin{aligned}G_n(x)^n - A_n(x)^n = h_1 h_2 x_3 \cdots x_n + (h_1 + h_2)\, h_3\, A_n(x)\, x_4 \cdots x_n \\ + (h_1 + h_2 + h_3)\, h_4\, A_n(x)^2 x_5 \cdots x_n \\ + \cdots + (h_1 + \cdots + h_{n-1})\, h_n\, A_n(x)^{n-2}.\end{aligned}$$

Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su svi x_i pozitivni. U tom slučaju pokazaćemo da je uz podesnu numeraciju, prvi član na desnoj strani ovog identiteta negativan, a da su ostali sabirci nepozitivni. Brojevi $x_1, \ldots, x_n$ nisu svi jednaki. Prema tome, postoji bar jedan, recimo x_1, koji je različit od $A_n(x)$, pa je $h_1 \neq 0$. Iz definicije brojeva h_i sleduje

$$h_{r+1} + \cdots + h_n = -(h_1 + \cdots + h_r) \qquad (r = 1, \ldots, n-1).$$

Odavde, posle množenja sa $(h_1 + \cdots + h_r)$, stavljajući $r = 1, \ldots, n-1$, dobijamo

$$\begin{aligned}h_1 h_2 + h_1 h_3 + \cdots + h_1 + h_n &= -h_1^2 \qquad (<0), \\ (h_1 + h_2)\, h_3 + (h_1 + h_2)\, h_4 + \cdots + (h_1 + h_2)\, h_n &= -(h_1 + h_2)^2 \qquad (\leqq 0), \\ &\vdots \\ (h_1 + \cdots + h_{n-1})\, h_n &= -(h_1 + \cdots + h_{n-1})^2 \quad (\leqq 0).\end{aligned}$$

U prvoj od ovih jednakosti bar jedan sabirak na levoj strani mora biti negativan; neka je to $h_1 h_2$. U drugoj jednakosti bar jedan od sabiraka na levoj strani mora biti nepozitivan; neka je to $(h_1 + h_2)\, h_3$. Nastavljajući na isti način, dolazimo do niza nejednakosti

$$\begin{aligned}h_1 h_2 &< 0, \\ (h_1 + h_2)\, h_3 &\leqq 0, \\ &\vdots \\ (h_1 + \cdots + h_{n-1})\, h_n &\leqq 0.\end{aligned}$$

Kako su $x_1, \ldots, x_n$ pozitivni brojevi, na osnovu dokazanog identiteta za $G_n(x)^n - A_n(x)^n$ dobijamo nejednakost

$$G_n(x)^n - A_n(x)^n < 0,$$

koja je ekvivalentna sa GA.

PRIMEDBA: 2° Identitet za $G_n(x)^n - A_n(x)^n$ bitno je različit od identiteta za $G_n(x) - A_n(x)$ koji je dobio Hurwitz (videti dokaz 4).

Gornji dokaz dao je Blanuša [1].

***Dokaz* 6.** Crawford [1] je dao jednu varijantu Maclaurinovog dokaza. Ovaj dokaz je vispren, ali je isto tako elementaran (takođe videti: Briggs i Bryan [1, p. 185], Hardy [1, p. 32], HLP, p. 21, Muirhead [2], Roseveare [1], Sturm [1, p. 3].

Kao u dokazu 1, neka je $0<a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$, $a_1 \neq a_n$ i definišimo a' sa $a_i' = a_i$ $(2 \leqq i \leqq n-1)$, $a_1' = A = A_n(a)$, $a_n' = a_1 + a_n - A$. Tada je $A(a') = A$ i, na osnovu (2),

$$G(a')^n - G(a)^n = \prod_{i=3}^{n} a_i (A - a_1)(a_n - A) > 0.$$

Posle najviše $(n-1)$ ponavljanja ovog postupka dolazimo do a'' čiji su svi članovi jednaki. Ovim smo dokazali GA.

***Dokaz* 7.** Sledeći induktivni dokaz nalazi se u knjizi [1, pp. 689—690] od Webera (takođe videti Tweedie [1] i Muirhead [2]). Neka je $0<a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$ i $a_1 \neq a_n$. Tada je $a_n > G_{n-1}$. Pretpostavimo da GA važi za $n-1$. Tada je

$$nA_n = (n-1)A_{n-1} + a_n > (n-1)G_{n-1} + a_n,$$

tj.

$$A_n^n > \left(G_{n-1} + \frac{a_n - G_{n-1}}{n}\right)^n > G_{n-1}^{\ n} + nG_{n-1}^{\ n-1}\frac{a_n - G_{n-1}}{n} = G_n^n,$$

gde smo primenili Bernoullievu nejednakost, što je mogućno jer je $a_n > G_{n-1}$.

***Dokaz* 8.** Sledeći induktivan dokaz blizak je prethodnom. Može se naći u Chrystalovoj knjizi [1]. Videti takođe Muirhead [2], Wigert [1], Popović [1] i Oberschelp [1]. Neka je $0<a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$ i $a_1 \neq a_n$. Pretpostavimo da GA važi za prirodne brojeve manje od n. Kako je $A_n = A_{n-1} + \frac{a_n - A_{n-1}}{n}$ i, na osnovu (2), $a_n - A_{n-1} > 0$, primenom Bernoullieve nejednakosti imamo

$$A_n^n > A_{n-1}^{\ n} + A_{n-1}^{\ n-1}(a_n - A_{n-1}) = a_n A_{n-1}^{\ n-1} \geqq a_n G_{n-1}^{\ n-1} = G_n^n.$$

***Dokaz* 9.** Sledeći dokaz dao je Steffensen ([2] i [3]). Na osnovu identiteta

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + (b_k - a_k)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i + (a_k - b_k)\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) + (b_k - a_k)\left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - b_k\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - a_k\right)\right)$$

možemo iskazati sledeću činjenicu:

Lema 14. *Ako je* $0<a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$, $0<b_1 \leqq \cdots \leqq b_n$ *i* $a_i \leqq b_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, *tada izraz* $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$ *se ne smanjuje zamenom* a_k *i* b_k *i povećava se osim ako je* $a_k = b_k$ *ili* $a_i = b_i$ $(i \neq k)$.

Pretpostavimo sada da je $0<a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$. Tada, na osnovu leme 14, važi (osim ako je $a_1 = \cdots = a_n$)

$$n^n G(a)^n = (a_1 + \cdots + a_1) \cdots (a_n + \cdots + a_n)$$

$$< (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_2) \cdots (a_1 + a_n + \cdots + a_n).$$

Ponavljanjem ovog postupka dolazi se do nejednakosti GA.

***Dokaz* 10.** Dokaz koji je dao Guha [1] zasnovan je na nejednakosti

$$(px + y + a)(x + qy + a) > \big((p+1)x + a\big)\big((q+1)y + a\big)$$

$$(p \geqq q > 0,\ x \geqq y > 0)$$

sa jednakošću ako i samo ako je $x=y$. Ova nejednakost sleduje iz identiteta

$$(px+y+a)(x+qy+a)-\big((p+1)x+a\big)\big((q+1)y+a\big)\equiv(px-qy)(x-y).$$

Ako pretpostavimo da je $x_1 \geqq \cdots \geqq x_n > 0$, uzastopnom primenom gornje nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}(nA)^n &= (x_1+\cdots+x_n)(x_1+\cdots+x_n)\cdots(x_1+\cdots+x_n)\\ &\geqq (2x_1+x_3+\cdots+x_n)(2x_2+x_3+\cdots+x_n)(x_1+\cdots+x_n)\\ &\quad\cdots(x_1+\cdots+x_n)\\ &\geqq\cdots\\ &\geqq (nx_1)(2x_2+x_3+\cdots+x_n)(x_2+2x_3+\cdots+x_n)\\ &\quad\cdots(x_2+\cdots+x_{n-1}+2x_n)\\ &\geqq\cdots\\ &\geqq (nx_1)(nx_2)\cdots(nx_n)=n^nG^n.\end{aligned}$$

Primetimo da je ovaj dokaz veoma sličan dokazu 7.

***Dokaz* 11.** Sledeći induktivni dokaz dao je Nagell [1] (takođe videti: Solberg [1]). Pretpostavimo najpre da je $0<a_1\leqq\cdots\leqq a_n$ i stavimo $\Delta=n(A-G)$. Tada, ako je $\Delta_i=a_i^{1/n}-a_n^{1/n}$ $(1\leqq i\leqq n)$, imamo

$$\Delta=\sum_{p=2}^{n} a_n^{\frac{n-p}{n}}\left(\binom{n}{p}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^{\,p}-n\sum_p !\,\Delta_{i_1}\Delta_{i_2}\cdots\Delta_{i_p}\right).$$

Ako nejednakost GA za $n=p$ $(2\leqq p\leqq n-1)$ primenimo za članove $\sum_p !$ imamo

$$\begin{aligned}\Delta&=\sum_{p=2}^{n} a_n^{\frac{n-p}{n}}\frac{n}{p}\left(\left(\binom{n-1}{p-1}-\binom{n-2}{p-2}\right)\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^{p}\right)+\sum_p !\left(\sum_{j=1}^{p}\Delta_{i_j}^{\,p}-p\prod_{j=1}^{p}\Delta_{i_j}\right)\\ &\geqq\sum_{p=2}^{n} a_n^{\frac{n-p}{n}}\frac{n}{p}\binom{n-2}{p-2}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^{p}\geqq 0.\end{aligned}$$

***Dokaz* 12.** Pretpostavimo da je nejednakost GA tačna za k $(1\leqq k\leqq n-1)$. Ako je $\prod_{i=1}^{n} a_i=1$ i ako svi a_i nisu jednaki 1, tada je bar jedan od njih, recimo a_i, veći od 1 i bar jedan od njih, recimo a_2, manji od 1, tako da je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i=a_1+a_2+\sum_{i=3}^{n} a_i&>1+a_1a_2+\sum_{i=3}^{n} a_i \quad \text{(na osnovu (15))}\\ &\geqq 1+(n-1)\quad\text{(na osnovu induktivne pretpostavke).}\end{aligned}$$

Na osnovu leme 12 (a) ovo je ekvivalentno sa GA.

PRIMEDBA: 3° Ovaj dokaz kombinovan sa dokazom 3 leme 8 dao je Dörrie [2, p. 36]. Ovaj dokaz nalazi se i u knjizi Korovkina [1, p. 7]. Takođe videti Ehlers [1] i Kreis [1].

***Dokaz* 13.** Pretpostavimo da je GA tačno za prirodne brojeve manje od n. Tada je

$$\begin{aligned} G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) &= G_{n-1}\left(\boldsymbol{a}; \frac{\boldsymbol{p}}{1-p_n}\right)^{1-p_n} a_n^{p_n} \\ &\leqq (1-p_n)\, G_{n-1}\left(\boldsymbol{a}; \frac{\boldsymbol{p}}{1-p_n}\right) + p_n a_n \quad \text{(na osnovu leme 9)} \\ &\leqq (1-p_n)\, A_{n-1}\left(\boldsymbol{a}; \frac{\boldsymbol{p}}{1-p_n}\right) + p_n a_n \quad \text{(na osnovu induktivne pretpostavke)} \\ &= A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}). \end{aligned}$$

Slučaj jednakosti sleduje iz leme 9 i induktivne hipoteze.

PRIMEDBA: 4° Ovaj dokaz je naveden u HLP, p. 38.

***Dokaz* 14.** Pretpostavimo da svi a_i nisu jednaki i stavimo $A = A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$. Definišimo realnu n-torku $\boldsymbol{b}$ pomoću $a_i = (1+b_i)A$ $(1 \leqq i \leqq n)$; tada je $\sum_{i=1}^{n} p_i b_i = 0$ i svi b_i nisu jednaki nuli. Na osnovu (I.14) imamo

$$G(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = AG(1+\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}) < A \exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i b_i\right) = A = A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}).$$

PRIMEDBA: 5° Ovaj dokaz može da se nađe u članku Lidstone [1]. U slučaju jednakih težina, dokaz se nalazi u HLP, p. 103. Međutim, kako se može videti iz članka Wetzela [1], ovaj dokaz dao je Pólya koji ga je, kako sam kaže u pismu Wetzelu, izveo kada je imao 20 godina (znači oko 1907). Međutim, ovaj njegov dokaz nije bio publikovan.

***Dokaz* 15.** Eksponencijalna funkcija je striktno konveksna ako svi a_i nisu međusobno jednaki. Stoga, na osnovu J-nejednakosti imamo

$$G(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = G(\exp \log \boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = \exp\big(A(\log \boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) < A(\exp \log \boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = A(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}).$$

PRIMEDBE: 6° Ovaj dokaz nalazi se u HLP, p. 78.

7° Steffensen [2] je koristio funkciju $-\log x$ u istom cilju. Videti takođe: Barton [1].

***Dokaz* 16.** Sledeći interesantan dokaz pripada Bohru [1]. Razmotrimo razvoje e^{xy} i $x^k y^k/k!$ po y; očigledno, nijedan član prvog razvoja nije manji od odgovarajućeg člana u drugom razvoju. Tada je lako videti da isto važi i za dve funkcije $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ i $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^k y^{nk}/(k!)^n$ koje su dobijene kao proizvodi funkcija prethodnog oblika. Prema tome, poredeći koeficijente uz y^{nk}, dobijamo

$$\frac{A(\boldsymbol{x})}{G(\boldsymbol{x})} \geqq \frac{1}{n}\left(\frac{(nk)!}{(k!)^n}\right)^{1/(kn)}.$$

Ako $k \to +\infty$, koristeći Stirlingovu formulu $m! \sim m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}$, dobijamo da desna strana ove nejednakosti teži 1.

U knjizi BB navedeno je da iz ovog dokaza, kao što je i sam Bohr primetio, ne sleduje slučaj jednakosti. Ovo, međutim, nije tačno, kao što je pokazao Dinghas [4].

***Dokaz* 17.** Ovaj induktivni dokaz dao je Carr [1]:

$$G_{n+1}=(G_{n+1}{}^{1/n}a_{n+1}{}^{(n-1)/n}G_n{}^{n-1})^{1/n}\leqq \frac{1}{n}G_{n+1}{}^{1/n}a_{n+1}{}^{(n-1)/n}+\frac{n-1}{n}G_n$$

$$\leqq \frac{1}{n}(G_{n+1}\,a_{n+1}{}^{n-1})^{1/n}+\frac{n-1}{n}A_n\leqq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}G_{n+1}+\frac{n-1}{n}a_{n+1}\right)+\frac{n-1}{n}A_n$$

$$\leqq A_{n+1}.$$

***Dokaz* 18.** Jednostavan induktivni dokaz dao je Walsh [1]. Ako pretpostavimo da svi a_i nisu međusobno jednaki, na osnovu identiteta

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^n-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_j^{n-1}-a_k^{n-1})(a_j-a_k)$$

imamo

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^n}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}}>\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i. \tag{24}$$

Na osnovu induktivne hipoteze je

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}a_k^{n-1}\geqq(n-1)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}a_k\qquad(1\leqq i\leqq k),$$

pri čemu bar jedna od ovih nejednakosti mora da je striktna. Sabirajući ove nejednakosti, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}>\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right). \tag{25}$$

Iz (24) i (25) sleduje GA.

***Dokaz* 19.** Sledeći dovitljivi dokaz dao je Nanjundiah [1]. Definišimo α_k i γ_k pomoću

$$\alpha_k=\frac{P_k}{p_k}a_k-\frac{P_{k-1}}{p_k}a_{k-1},\qquad \gamma_k=a_k{}^{P_k/p_k}/a_{k-1}{}^{P_{k-1}/p_k}\qquad(1\leqq k\leqq n),$$

gde je $p_0=0$ i $a_0=1$. Tada na osnovu leme 9 (a) imamo $\gamma_k\geqq\alpha_k$ $(1\leqq k\leqq n)$. Dalje je $A_k(\vec{\alpha};\boldsymbol{p})=a_k=G_k(\vec{\gamma};\boldsymbol{p})$ $(1\leqq k\leqq n)$. Prema tome $A_n(\vec{\gamma};\boldsymbol{p})-G_n(\vec{\gamma};\boldsymbol{p})\geqq A_n(\vec{\alpha};\boldsymbol{p})-G_n(\vec{\alpha};\boldsymbol{p})=0$, čime je dokaz završen jer niz $\vec{\gamma}$ definiše niz $\boldsymbol{a}$. Slučaj jednakosti sleduje direktno iz leme 9.

***Dokaz* 20.** Drugi jednostavan dokaz GA u obliku leme 12 (a) može da se izvede primenom sledeće nejednakosti za pozitivne n-torke $(n\geqq 2)$:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqq n \tag{26}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $x_1=\cdots=x_n$. Najpre indukcijom dokažimo (26). Za $n=2$ nejednakost (26) postaje

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>2\quad(x_1\neq x_2), \tag{27}$$

što je upravo (14). Pretpostavimo da je (26) tačno za $n-1$ i da je $x_n = \min x$. Tada je, na osnovu induktivne pretpostavke,

$$\frac{x_1}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=\frac{x_1}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_1}+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}-\frac{x_{n-1}}{x_1}\right)$$

$$\geqq (n-1)+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}-\frac{x_{n-1}}{x_1}\right)=n+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}-\frac{x_{n-1}}{x_1}-1\right).$$

Izraz na desnoj strani je nenegativan jer je

$$\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}-\frac{x_{n-1}}{x_1}-1=\frac{(x_{n-1}-x_n)(x_1-x_n)}{x_1x_n}\geqq 0.$$

Slučaj jednakosti se neposredno dobija. Neka je sada $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka i definišimo $\boldsymbol{x}$ pomoću $x_k=\prod_{i=k}^{n} a_i$ $(1\leqq k\leqq n)$, gde je $a_k=\frac{x_k}{x_{k+1}}$ $(1\leqq k<n)$, $a_n=\frac{x_n}{x_1}$. Tada (26) daje $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n$, što je trebalo dokazati.

PRIMEDBE: 8° Ovaj dokaz je zasnovan na jednom problemu iz Korovkine knjige [1, p. 8], gde je nejednakost (26) dokazana pomoću *GA*.

9° Nejednakost (26) može da se posmatra kao generalizacija nejednakosti (27) koja je ekvivalentna sa (16). Druga generalizacija je

$$(28)\qquad \frac{x_1+\cdots+x_\nu}{x_{\nu+1}+\cdots+x_n}+\frac{x_2+\cdots x_{\nu+1}}{x_{\nu+1}+\cdots+x_1}+\cdots+\frac{x_n+\cdots+x_{\nu-1}}{x_\nu+\cdots+x_{n-1}}\geqq\frac{n\nu}{n-\nu};$$

(videti: Janić i Vasić [1]). Ako je $\nu=1$, (28) se svodi na (26).

Ako stavimo $S_n=x_1+\cdots+x_n$, leva strana u (28) jednaka je sa

$$\frac{S_n-(x_{\nu+1}+\cdots+x_n)}{x_{\nu+1}+\cdots+x_n}+\frac{S_n-(x_{\nu+2}+\cdots+x_n+x_1)}{x_{\nu+2}+\cdots+x_n+x_1}+\cdots+\frac{S_n-(x_\nu+\cdots+x_{n-1})}{x_\nu+\cdots+x_{n-1}}$$

$$=S_n\left(\frac{1}{x_{\nu+1}+\cdots+x_n}+\cdots+\frac{1}{x_\nu+\cdots+x_{n-1}}\right)-n$$

$$\geqq\frac{n^2S_n}{(x_{\nu+1}+\cdots+x_n)+\cdots+(x_\nu+\cdots+x_{n-1})}-n\quad(\text{prema (18)})$$

$$=\frac{n^2S_n}{(n-\nu)S_n}-n=\frac{n}{n-\nu}.$$

Dokaz* 21.** Sledeći dokaz pojavljuje se kod Mitrinovića [1, pp. 232—233] (takođe videti Diananda [1]). Neka je $a_i>0$ $(1\leqq i\leqq n+1)$ i pretpostavimo da ***GA važi za n. Ako je $nA=a_{n+1}+(n-1)A_{n+1}$ i $G=(a_{n+1}A_{n+1}{}^{n-1})^{1/n}$, na osnovu induktivne pretpostavke je

$$A_{n+1}=\frac{1}{2}(A_n+A)\geqq(A_nA)^{1/2}\geqq(G_nG)^{1/2}=(G_{n+1}{}^{n+1}A_{n+1}{}^{n-1})^{1/2n},$$

čime je dokaz završen.

***Dokaz* 22.** Dokaz primenom metoda dinamičkog programiranja dao je Bellman [5]; takođe videti: BB, p. 6 i knjigu [11], p. 25, od Mitrinovića i Vasića. Ovim metodom dokazuje se lema 12 (b) posmatranjem problema maksimiziranja proizvoda $\prod_{i=1}^{n} a_i$ pod uslovom $\sum_{i=1}^{n} a_i = a$. Neka je taj maksimum $g(n; a)$. Ako izaberemo a_n, preostaje da se odrede $a_1, \ldots, a_{n-1}$ uz uslov $\sum_{i=1}^{n-1} a_i = a - a_n$ $(a_i \geqq 0)$ tako da maksimiziraju $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Odavde je $g(n; a) = \max\limits_{0 \leqq a_n \leqq a} \left(a_n g(n-1; a-a_n)\right)$. $g(1; a) = a$. Ako je $a_i = a\alpha_i$, tada imamo $g(n; a) = a^n g(n; 1)$. Kako je $g(n; 1)$ $= g(n-1; 1) \max\limits_{0 \leqq y \leqq 1} \left(y(1-y)^{n-1}\right) = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} g(n-1; 1)$ i $g(1; 1) = 1$, na kraju dobijamo $g(n; a) = \left(\frac{a}{n}\right)^n$.

***Dokaz* 23.** Drugi dokaz nejednakosti *GA* u obliku leme 12 (a), primenom diferencijalnog računa, je sledeći (videti: BB, p. 5):

Želimo da minimiziramo funkciju $\sum_{i=1}^{n} a_i$ nad skupom $E = \left\{\boldsymbol{a} \,|\, a_i \geqq 0 \ (1 \leqq i \leqq n), \ \prod_{i=1}^{n} a_i = 1\right\}$. Primenom Lagrangeovih multiplikatora, polazeći od funkcije f date sa $f(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$, imamo $\frac{\partial f}{\partial a_i} = \frac{1}{a_i} \prod_{i=1}^{n} a_i - \lambda$. Da bi važilo $\frac{\partial f}{\partial a_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$, mora biti $a_1 = \cdots = a_n = \lambda = 1$. Odavde kao jedini minimum sume $\sum_{i=1}^{n} a_i$ dobijamo n, što je, u stvari, lema 12 (*a*).

Nejednakost *GA* takođe se može dokazati ako se Lagrangeovi multiplikatori primene na minimizaciju $\prod_{i=1}^{n} a_i$ nad skupom $E = \left\{\boldsymbol{a} \,|\, a_i \geqq 0 \ (1 \leqq i \leqq n), \ \sum_{i=1}^{n} a_i = n\right\}$ (videti: Rodenberg [1] i Amir-Moéz [1]).

***Dokaz* 24.** Veoma prost dokaz nejednakosti *GA* u obliku leme 12 (a) dao je Newman [1]. Stavljajući u Bernoullievoj nejednakosti (teorema I. 9): $x = a_{n+1} - 1$, $\alpha = -1/n$, imamo

$$\frac{n}{a_{n+1}^{1/n}} + a_{n+1} > n+1 \quad (a_{n+1} > 1, \ n > 1). \tag{29}$$

Ako stavimo $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = 1$ i pretpostavimo da svi a_i nisu međusobno jednaki, tada je bar jedan od njih veći od 1, recimo $a_{n+1} > 1$. Stoga

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \geqq n \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{1/n} + a_{n+1} \quad \text{(na osnovu induktivne pretpostavke)}$$

$$= n a_{n+1}^{-1/n} + a_{n+1} > n+1 \quad \text{(na osnovu (29))}.$$

Dokaz **25.** Sledeći induktivni dokaz dao je Thacker [1]. Na osnovu nejednakosti $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n > \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}$ (koja je, u stvari, generalisana Bernoullieva nejednakost), imamo

$$A_n^n = a_1^n\left(1+\frac{a_2+\cdots+a_n+(1-n)a_1}{na_1}\right)^n$$

$$\geqq a_1\left(\frac{a_2+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1} \geqq a_1(a_2\cdots a_n) = G_n^n.$$

Dokaz **26.** Sledeći interesantan dokaz dao je Mohr [2]. Uvedimo najpre oznake

$$\boldsymbol{a}^0 = \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \quad (0 < a_1 \leqq \cdots \leqq a_n,\ a_1 \neq a_n),$$

$$\boldsymbol{a}^1 = (\boldsymbol{a}^0)^1 = (a_1^1, \ldots, a_n^1),\ a_i^1 = A_{n-1}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

i pretpostavimo da su $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^{k-1}$ definisani sa $\boldsymbol{a}^k = (\boldsymbol{a}^{k-1})^1$. Tada su članovi $\boldsymbol{a}^k$ u stvari aritmetičke sredine članova $\boldsymbol{a}^{k-1}$ uzetih $(n-1)$ puta. Bez teškoće se proveravaju sledeći identiteti

$$A_n(\boldsymbol{a}^k) = A_n(\boldsymbol{a}^0) \quad (\text{za svako } k),$$

$$a_i^k = A_n(\boldsymbol{a}^0) + (-1)^{k-1}\frac{A_n(\boldsymbol{a}^0)-a_i}{(n-1)^k} \leqq A_n(\boldsymbol{a}^0) + \frac{a_n-a_1}{(n-1)^k} \quad (k \geqq 1) \ \big(\text{prema } (2)\big).$$

Odavde, na osnovu teoreme 5, nalazimo

$$G_n(\boldsymbol{a}^k) \leqq A_n(\boldsymbol{a}^0) + \frac{a_n-a_1}{(n-1)^k} \quad (k \geqq 1). \tag{30}$$

Pretpostavljajući da je GA tačno za $n-1$, tada za $k \geqq 1$ važi

$$a_i^k \geqq G_{n-1}\left(a_1^{k-1}, \ldots, a_{i-1}^{k-1}, a_{i+1}^{k-1}, \ldots, a_n^{k-1}\right) = G_n(\boldsymbol{a}^{k-1})^{\frac{n}{n-1}}\left(a_i^{k-1}\right)^{-\frac{1}{n-1}}$$

i odatle

$$G_n(\boldsymbol{a}^k) \geqq G_n(\boldsymbol{a}^{k-1}) \quad (k \geqq 1). \tag{31}$$

Kako je $a_1 \neq a_n$, induktivna pretpostavka daje

$$G_n(\boldsymbol{a}^1) \geqq G_n(\boldsymbol{a}^0). \tag{32}$$

Na osnovu (30) i (31) dobijamo

$$G_n(\boldsymbol{a}^m) \leqq A_n(\boldsymbol{a}^0) + \frac{a_n-a_1}{(n-1)^k} \quad (k \geqq m). \tag{33}$$

Koristeći (31), izaberimo k tako da je $G_n(\boldsymbol{a}^1) - \frac{a_n-a_1}{(n-1)^k} \geqq G_n(\boldsymbol{a}^0)$, što, zajedno sa (31) za $m=1$, upotpunjuje dokaz.

PRIMEDBA: 10° U stvari, ovaj dokaz daje nejednakost $A_n(\boldsymbol{a}) \geqq G_n(\boldsymbol{a}^m)$ $(m \geqq 0)$.

***Dokaz* 27.** Dzyaduk [1] je dao dva identiteta iz kojih se može dobiti GA:

(i) $$\frac{nG_n + a_{n+1}}{n+1} = G_{n+1} + \frac{G_n}{n+1}\, p\left(\frac{G_{n+1}}{G_n}\right),$$

gde je p polinom definisan u I.5.1. Odavde na osnovu (I.3) je

(34) $$nG_n + a_{n+1} \geqq (n+1)\, G_{n+1}.$$

Na osnovu induktivne pretpostavke leva strana u (34) nije veća od $nA_n + a_{n+1} = (n+1)\, A_{n+1}$. Ovim je dokazana nejednakost GA. Slučaj jednakosti, na osnovu induktivne hipoteze, nastupa ako je $a_1 = \cdots = a_n$, a na osnovu (I.3) ako je $G_n = G_{n+1}$, tj. ako je $a_1 = \cdots = a_{n+1}$.

(ii) $$A_n - G_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} G_{k-1}\, p_n (G_k/G_{k-1}),$$

odakle neposredno sleduje GA. Slučaj jednakosti se dobija primenom (I.3).

***Dokaz* 28.** Jednostavna primena polinoma p da bi se dokazala nejednakost GA je:

$$A_n = \frac{G_{n-1}}{n}\left(\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n + (n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right) \geqq \frac{G_{n-1}}{n}\left(\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n + n - 1\right)$$

(na osnovu induktivne pretpostavke), odakle prema (I. 3) imamo

$$A_n \geqq \frac{G_{n-1}}{n}\, n\, \frac{G_n}{G_{n-1}} = G_n.$$

Slučaj jednakosti se neposredno dobija.

PRIMEDBA: 11° Ovo je osnova za poboljšanje GA; videti teoremu 18, koja kasnije sleduje, dokaz 1 od Jacobsthala [1]. Isti dokaz može se naći kod Climeşcua [1]. U tom radu je takođe dato jedno proširenje ovog metoda na šire klase nejednakosti.

***Dokaz* 29.** Veoma jednostavan dokaz leme 12 (a) može se dobiti na sledeći način (videti: Mitrinović i Vasić [11, p. 27]): Neka su a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ isti kao u lemi 12 (a). Prema (I.12) je $\sum_{i=1}^{n} \log a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i + n \leqq 0$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n + \log \prod_{i=1}^{n} a_i = n.$$

PRIMEDBA: 12°: Ovaj dokaz se može jednostavno modifikovati da bi se dobio direktan dokaz u slučaju opštih težina.

***Dokaz* 30.** Pretpostavimo da je $G(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{q}) = e$ i $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$. Na osnovu (I. 11) je $a_i > e \log a_i$, i prema tome,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i q_i \geqq e \log \prod_{i=1}^{n} a_i^{\,q_i} = e = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\,q_i}.$$

Slučaj jednakosti se dobija bez teškoće.

***Dokaz* 31.** Dokaz teoreme 6 u slučaju jednakih težina, koji je dao Kong-Ming Chong [1], sleduje neposredno iz teoreme I.15 i sledeće leme.

Lema 15. *Ako je* $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *pozitivna n-torka i* $\boldsymbol{A} = (A_1(\boldsymbol{a}), \ldots, A_n(\boldsymbol{a}))$, *tada je* $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{a}$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$. Tada, za $1 \leqq k \leqq n$, važi $k A \leqq \sum_{i=1}^{k} a_i$, sa jednakošću ako i samo ako je $k=n$. Odavde izlazi

$$k A_n \leqq n A_k, \quad \text{tj.} \quad k \sum_{i=k+1}^{n} a_i \leqq (n-k) \sum_{i=1}^{k} a_i,$$

što neposredno sleduje iz pretpostavke da je $a_1 \geqq \cdots \geqq a_n$.

***Dokaz* 32.** Nejednakost GA je posledica sledeće nejednakosti između aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine

$$A_n^{n-1} H_n \geqq G_n^n \geqq A_n H_n^{n-1}$$

koju je matematičkom indukcijom dokazao Sierpiński [1]. O generalizaciji ove nejednakosti videti: Mitrinović — Vasić [14].

***Dokaz* 33.** Nejednakost GA sleduje iz sledeće nejednakosti

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\, d_i\right)^n \geqq n^n \prod_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} d_j \qquad (d_i \geqq 0,\ i=1, \ldots, n-1)$$

u kojoj jednakost važi ako i samo ako je $d_1 = \cdots = d_{n-1} = 0$.

Dokaz prethodne jednakosti može se dati matematičkom indukcijom. Nejednakost je tačna za $n=1$. Ako pretpostavimo da je nejednakost tačna za neko n, imamo

$$n^{n+1} (n+1)^{n+1} \prod_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} d_j \leqq \left(\sum_{i=0}^{n-1} (n+1)(n-i)\, d_i\right)^n \sum_{i=0}^{n} (n+1)\, n d_i .$$

Ako u nejednakosti $(a-c)(b+c) \geqq ab$ stavimo

$$a = \left(\sum_{i=0}^{n} (n+1)\, n d_i\right) - jc, \qquad b = \left(\sum_{i=0}^{n-1} (n+1)(n-i)\, d_i\right)^n,$$

$$c = \sum_{i=0}^{n} i d_i \qquad (j=0, 1, \ldots, n-1),$$

zaključujemo da navedena nejednakost važi i za $n+1$.

Za $d_0 = x_1$, $d_i = x_{i+1} - x_i$ $(i=1, \ldots, n-1)$, uz pretpostavku $x_{i+1} \geqq x_i$ $(i=1, \ldots, n-1)$, dobijamo nejednakost GA.

PRIMEDBA: 13° Ovaj dokaz dao je Devidé [1].

***Dokaz* 34.** Sledeći, nepublikovani dokaz, pripada A. Climeşcuu. Pretpostavimo da GA važi za n. Tada važi i

$$x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geqq n \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

kao i n analognih nejednakosti. Sabiranjem ovih nejednakosti nalazimo

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \cdots + \sqrt[n]{x_2 \cdots x_{n+1}} .$$

Ako je $x_1 \cdots x_{n+1} = 1$, iz prethodne nejednakosti dobijamo

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} \geqq x_1^{-1/n} + \cdots + x_{n+1}^{-1/n}.$$

Ponavljanjem ovog postupka imamo

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_{n+1} &\geqq x_1^{-1/n} + \cdots + x_{n+1}^{-1/n} \\ &\geqq x_1^{-1/n^2} + \cdots + x_{n+1}^{-1/n^2} \\ &\geqq x_1^{-1/n^3} + \cdots + x_{n+1}^{-1/n^3} \\ &\geqq \cdots \end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{r \to +\infty} (x_1^{1/n^r} + \cdots + x_{n+1}^{1/n^r}) = n+1$, dokaz je završen.

Dokaz 35. Sledeći dokaz dao je Južakov [1]. Pretpostavimo da je GA tačno za $n-1$. Stavimo $A_n(a) = a$, $x_i = a_i - a$ $(i = 1, \ldots, n)$. Tada je $x_1 + \cdots + x_n = 0$ i među brojevima $x_1, \ldots, x_n$ postoji bar jedan pozitivan i bar jedan negativan. Neka su to, na primer, x_1 (>0) i x_2 (<0). Tada je

$$a_1 a_2 = (a + x_1)(a + x_2) = a^2 + a(x_1 + x_2) + x_1 x_2 < a(a + x_1 + x_2).$$

Na osnovu induktivne pretpostavke je

$$\begin{aligned} \big((a + x_1 + x_2) a_3 \cdots a_n\big)^{1/(n-1)} &\leqq \frac{(a + x_1 + x_2) + a_3 + \cdots + a_n}{n-1} \\ &= \frac{(a + x_1 + x_2) + (a + x_3) + \cdots + (a + x_n)}{n-1} = a, \end{aligned}$$

tj.

$$(a + x_1 + x_2) a_3 \cdots a_n \leqq a^{n-1}.$$

Kombinujući dokazane nejednakosti, imamo

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \leqq a(a + x_1 + x_2) a_3 \cdots a_n \leqq a a^{n-1} = a^n.$$

Dokaz 36. Sledeći induktivni dokaz, do sada nepublikovan, dao je Ž. Mijalković. Ako stavimo $a_i = x_i G_n(\boldsymbol{a})$ imamo $G_n(\boldsymbol{x}) = 1$. Iz pretpostavke da GA važi za $n-1$ imamo

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i G_n(\boldsymbol{a}) \geqq (n-1) G_{n-1}(\boldsymbol{x}) G_n(\boldsymbol{a}).$$

Kako je GA tačno za $n = 2$ imamo

$$(n-1) G_{n-1}(\boldsymbol{x}) G_n(\boldsymbol{a}) + (n-1) x_n^{1/(n-1)} G_n(\boldsymbol{a}) \geqq 2(n-1) G_n(\boldsymbol{a}),$$

dok na osnovu induktivne pretpostavke važi

$$x_n G_n(\boldsymbol{a}) + (n-2) G_n(\boldsymbol{a}) \geqq (n-1) x_n^{1/(n-1)} G_n(\boldsymbol{a}).$$

Sabiranjem poslednjih triju nejednakosti, posle sređivanja, dobijamo $G_n(\boldsymbol{a}) \leqq A_n(\boldsymbol{a})$.

Pretpostavimo da jednakost $G_n(\boldsymbol{a}) = A_n(\boldsymbol{a})$ važi a da pri tome nije $a_1 = \cdots = \cdots = a_n$. Neka je, na primer, $a_1 > a_2$. Tada je $a_1 - a_2 = 2m > 0$. Neka je $x_1 = a_1 - m$, $x_2 = a_2 + m$. Kako je

$$x_1 x_2 = a_1 a_2 + (a_1 - a_2) m - m^2 = a_1 a_2 + m^2 > a_1 a_2,$$

zaključujemo da je

$$(x_1\, x_2\, a_3 \cdots a_n)^{1/n} > (a_1\, a_2 \cdots a_n)^{1/n}.$$

Iz ove nejednakosti, na osnovu jednakosti $G_n(a) = A_n(a)$ i $x_1 + x_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, dobijamo

$$(x_1\, x_2 a_3 \cdots a_n)^{1/n} > \frac{x_1 + x_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

što je protivurečno nejednakosti *GA*.

2.4. Neke primene nejednakosti *GA*. (i) Pri dokazivanju da je $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, osnovni korak je da se dokaže da $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ raste sa n. Primenom nejednakosti *GA* imamo

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

tj.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Na sličan način, može se diskutovati monotonost nizova $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ i $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (videti: Forder [1]).

(ii) Bernoullieva nejednakost može se dokazati na sledeći način (videti: Jecklin [6], [7], [8]).

(a) Pretpostavimo da je $\alpha > 1$. Tada je suprotna nejednakost od (I.6) ekvivalentna sa $\frac{1}{\alpha}(1 + x)^\alpha + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \geqq 1 + x$, što je neposredna posledica nejednakosti *GA*.

(b) Ako je $0 < \alpha < 1$, prema (a) je $(1 + \alpha\, x)^{\frac{1}{\alpha}} > 1 + x$ što je ekvivalentno sa (I.6).

(c) Neka je $\alpha < 0$. Ako je $1 + \alpha\, x \leqq 0$, rezultat je trivijalan. Pretpostavimo, stoga, da je $1 + \alpha x > 0$ i izaberimo $\beta > 1$, tako da je $0 < -\frac{\alpha}{\beta} < 1$. Tada na osnovu (b) imamo $(1 + x)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \leqq 1 - \frac{\alpha}{\beta} x$, tj.

$$(1 + x)^{\frac{\alpha}{\beta}} \geqq \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\beta} x} = \frac{1 + \frac{\alpha}{\beta} x}{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} x^2} \geqq 1 + \frac{\alpha}{\beta} x,$$

tj. posle stepenovanja sa β, i primene (a)

$$(1 + x)^\alpha \geqq \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} x\right)^\beta \geqq 1 + \alpha\, x.$$

Slučaj jednakosti dobija se direktno.

PRIMEDBA: 1° Kako je Bernoullieva nejednakost iskorišćena da bi se dokazala lema 9 iz koje *GA* sleduje indukcijom (videti dokaz 24), zaključujemo da su Bernoullieva nejednakost i nejednakost *GA* ekvivalentne.

Infantozzi [1] je dokazao opštiji rezultat, naime on je dokazao da su sledeće nejednakosti ekvivalentne: GA, $|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqq \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$ $\big((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ unutrašnji proizvod vektora $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{u}\|$ Euklidova norma$\big)$, Bernoullieva nejednakost i njoj suprotna nejednakost (u smislu slučajeva (a), (b) i (c) koji su gore razmatrani), nejednakost trougla $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$, $a^{\alpha} b^{\beta} \leqq \alpha a+\beta b$ $(\alpha, \beta \geqq 0,\ \alpha+\beta=1)$, $a^{\alpha} b^{\beta} \geqq \alpha a+\beta b$ (α ili β nepozitivni, $\alpha+\beta=1$), $\sum a^{\alpha} b^{\beta} \leqq (\sum a)^{\alpha} (\sum b)^{\beta}$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1,\ \alpha+\beta=1)$, $\sum a^{\alpha} b^{\beta} \geqq (\sum a)^{\alpha} (\sum b)^{\beta}$ $(\alpha \geqq 1,\ \alpha+\beta=1)$, $\sum ab \leqq (\sum a^{\alpha})^{1/\alpha} (\sum b^{\beta})^{1/\beta}$ $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \geqq 1;\ \alpha, \beta>0,\right)$, $\sum ab \geqq (\sum a^{\alpha})^{1/\alpha} (\sum b^{\beta})^{1/\beta}$ $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \leqq 1,\ \alpha \text{ ili } \beta \text{ ili oba negativni}\right)$, $\left(\sum (x+y)^{p}\right)^{1/p} \leqq (\sum x^{p})^{1/p}+(\sum y^{p})^{1/p}$ $(p>1)$, $\left(\sum (x+y)^{p}\right)^{1/p} \geqq (\sum x^{p})^{1/p}+(\sum y^{p})^{1/p}$ $(p \leqq 1)$ (sve pomenute nejednakosti odnose se na pozitivne nizove).

(iii) Primenom nejednakosti (14) mogućno je dobiti rešenja više elementarnih problema o maksimumu ili minimumu (videti: Fletcher [1] i Frame [1]).

2.5. Nejednakost GA sa raznim težinama. Sledeća teorema daje nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine sa raznim težinama.

Teorema 16. *Ako su $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ tri pozitivne n-torke, tada je*

$$G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \leqq \left(\frac{G_n(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{p})}{P_n}\right)\left(\frac{Q_n}{G_n(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p})}\right) A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q}),$$

sa jednakošću ako i samo ako je $\dfrac{a_1 q_1}{p_1}=\cdots=\dfrac{a_n q_n}{p_n}$.

Dokaz. Kako je

$$\frac{G(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})}{A(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})}=\frac{G\left(\dfrac{\boldsymbol{aq}}{\boldsymbol{p}}; \boldsymbol{p}\right)}{A\left(\dfrac{\boldsymbol{aq}}{\boldsymbol{p}}; \boldsymbol{p}\right)} \frac{G(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{p})}{P_n} \frac{Q_n}{G(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p})},$$

dokaz neposredno sleduje iz teoreme 6 (Mitrinović – Vasić [2] i Bullen [2]).

Teorema 17. *Ako je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, tada je*

$$1+G_n(\boldsymbol{a}) \leqq G_n(1+\boldsymbol{a}) \leqq 1+A_n(\boldsymbol{a}), \tag{35}$$

$$1+\frac{1}{G_n(\boldsymbol{a})} \leqq G_n\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{a}}\right) \leqq 1+\frac{1}{H_n(\boldsymbol{a})}, \tag{36}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. Nejednakosti (36) dobijaju se ako se (35) primene na niz $\dfrac{1}{\boldsymbol{a}}$. Desna strana nejednakosti (35) dobija se pomoću GA jer je $G(1+\boldsymbol{a}) \leqq A(1+\boldsymbol{a})=1+A(\boldsymbol{a})$. Leva strana se dobija na sledeći način

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(1+a_n) &= 1+\sum_{m=1}^{n} \sum_{1 \leqq i_1<\cdots<i_m \leqq m} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} \\
&\geqq 1+\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}\left(\prod_{1 \leqq i_1<\cdots<i_m \leqq m} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}\right)^{1/\binom{n}{m}} \quad (\text{na osnovu } GA) \\
&= 1+\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}\left(\prod_{j=1}^{m} a_j\right)^{\frac{m}{n}}=\left(1+G(\boldsymbol{a})\right)^n .
\end{aligned}$$

PRIMEDBE: 1° Drugi dokaz ovih nejednakosti biće dat kasnije (primedba III. 3.2. 4°).
2° Lupaş i Mitrović [1] došli su do ovog rezultata.

3. RAFINIRANJE GEOMETRIJSKO-ARITMETIČKE NEJEDNAKOSTI

3.1. Radoova nejednakost. Postoji više rafiniranja nejednakosti GA, tj. nejednakosti (12). Najpre ćemo posmatrati ono rafiniranje do koga dolazimo ako (12) predstavimo u obliku

$$(37) \qquad A_n(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) - G_n(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) \geqq 0,$$

i potražimo preciznije donje ograničenje za izraz na levoj strani. Posmatranje ovog rafiniranja, kao i kasnijih, u nekim slučajevima dovodi do novih dokaza osnovne nejednakosti GA.

Teorema 18. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne n-torke i* $n \geqq 2$, *tada je*

$$(38) \qquad P_n\big(A_n(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) - G_n(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big) \geqq P_{n-1}\big(A_{n-1}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) - G_{n-1}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big)$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_n = G_{n-1}$.

Daćemo više dokaza ovog rezultata.

***Dokaz* 1.** Ovde ćemo posmatrati samo slučaj jednakih težina i iskoristićemo dokaz Jacobsthala [1] (videti 29. dokaz nejednakosti GA):

$$n A_n = G_{n-1}\left((n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \frac{G_n}{G_{n-1}}\right) \geqq G_{n-1}\left((n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + n\frac{G_n}{G_{n-1}} - (n-1)\right),$$

na osnovu (I.3). Međutim ovo je upravo (38) u slučaju jednakih težina. Dalje, na osnovu (I.3) zaključujemo da jednakost važi ako i samo ako je $G_n = G_{n-1}$, tj. $a_n = G_{n-1}$.

***Dokaz* 2.** Jednostavna izračunavanja pokazuju da je (38) ekvivalentno sa

$$(39) \qquad \frac{p_n}{P_n}a_n + \frac{P_{n-1}}{P_n}G_{n-1} \geqq a_n^{\frac{p_n}{P_n}}\, G_{n-1}^{\frac{P_{n-1}}{P_n}},$$

što je neposredna posledica nejednakosti GA.

***Dokaz* 3.** Ovo je modifikacija Liouvilleovog dokaza (dokaz 3) nejednakosti GA. Neka je $x = a_n$ i stavimo $f(x) = P_n(A_n - G_n)$; diferenciranjem nalazimo da f za $x \geqq 0$ ima jedinstven minimum za $x_0 = G_{n-1}$. Stoga je $f(x) > f(x_0)$ $(x \neq x_0)$, gde je $f(x_0) = P_{n-1}(A_{n-1} - G_{n-1})$, čime je završen dokaz.

***Dokaz* 4.** Stavljajući u posledici I. 31: $f(x) = e^x$, $x_i = \log a_i$, neposredno dobijamo nejednakost (38).

PRIMEDBE: 1° Uzastopna primena nejednakosti (38) dovodi do (12), jer je

$$P_n(A_n - G_n) \geqq P_{n-1}(A_{n-1} - G_{n-1}) \geqq \cdots \geqq P_1(A_1 - G_1) = 0.$$

Dalje, koristeći slučaj jednakosti u teoremi 18, dobijamo slučaj jednakosti za GA. Ovo je jedan drugi dokaz teoreme 6.

2° Izgleda da se (38) po prvi put sreće u HLP, p. 61. Tu je (38) dato za slučaj jednakih težina i ovaj rezultat je pripisan Radou. Prethodni dokaz 1 je sugeriran uputstvom koji je u HLP dato čitaocu.

3° Logičan interes ima i činjenica što je i očigledno stroži rezultat iz teoreme 18 ekvivalentan teoremi 6. U stvari, gornji dokaz 2 može se iskoristiti da bi se dobilo sledeće proširenje leme 10. Dovoljno je dokazati teoremu 6 za slučaj jednakih težina i sa svim članovima međusobno jednakim izuzev jednog (tj. $a_1 = \cdots = a_{n-1} = a$, $a_n = b$, $a \neq b$). Zaista, da bismo dokazali teoremu 6 za slučaj jednakih težina (što je dovoljno na osnovu leme 10), na osnovu primedbe 1° dovoljno je dokazati teoremu 18 za ovaj slučaj, tj. dovoljno je dokazati sledeću nejednakost koja se dobija iz (39):

$$\frac{a_n}{n}+\frac{n-1}{n}G_{n-1}\geqq a_n^{\frac{1}{n}}G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}, \tag{40}$$

sa jednakošću samo ako je $a_n=G_{n-1}$. Međutim, ovo je specijalan slučaj pomenute teoreme 6.

4° Nejednakost (40) sleduje iz (I. 4) ako se stavi $x=\dfrac{a_n}{G_{n-1}}$. Prema tome, na ovaj način, dat je jedan drugi dokaz nejednakosti GA.

Posledica 19. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne n-torke i* $n\geqq 2$, *tada važi*

$$A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})-G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\geqq\frac{1}{P_n}\max_{1\leqq j,k\leqq n}\left(a_jp_j+a_kp_k-(p_j+p_k)\,(a_j^{p_j}a_k^{p_k})\right)^{\frac{1}{p_jp_k}}. \tag{41}$$

Dokaz. Koristeći ideju primenjenu u primedbi 1°, ali zaustavljajući se jedan korak ranije, imamo

$$P_n(A_n-G_n)\geqq P_2(A_2-G_2)=a_1p_1+a_2p_2-P_2(a_1^{p_1}a_2^{p_2})^{\frac{1}{P_2}}, \tag{42}$$

što implicira (37) jer se nizovi $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{p}$ mogu preurediti tako da daju istu levu stranu kao u (42), dok se desna strana može varirati.

Primedbe: 5° Nejednakost (41) daje precizniju desnu stranu od (37). U slučaju jednakih težina, (41) ima posebno simetrični oblik

$$A_n-G_n\geqq\frac{1}{n}\max_{1\leqq j,k\leqq n}\left(\sqrt{a_j}-\sqrt{a_k}\right)^2.$$

6° Radoova nejednakost, iako se pojavljuje u HLP, bila je više puta ponovo otkrivana i reprodukovana. Videti, na primer, Bullen [1] i [9], Bullen i Marcus [1], Dinghas [1], Kestelman [1], Mitrinović [6], Popoviciu [2] i [3], Stubban [1], Tchakaloff [1].

3.2. Popoviciuova nejednakost. Diskusija slična onoj u 3.1 može se izvesti ako se nejednakost GA, umesto u obliku (37), predstavi na sledeći način:

$$\frac{A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}\geqq 1. \tag{43}$$

Nejednakost (44), koju ćemo sada dokazati, može se posmatrati kao multiplikativni analogon nejednakosti (38).

Teorema 20. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne n-torke* $(n\geqq 2)$, *tada je*

$$\left(\frac{A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}\right)^{P_n}\geqq\left(\frac{A_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{G_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}\right)^{P_{n-1}} \tag{44}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_n=A_{n-1}$.

Dokaz. Četiri dokaza nejednakosti (38) mogu se lako modifikovati da bi se dokazala nejednakost (44).

(i) U slučaju jednakih težina jednostavna izračunavanja, na osnovu (I. 6), daju

$$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n=\left(\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1}\left(\frac{A_{n-1}}{a_n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\left(-1+\frac{a_n}{A_{n-1}}\right)\right)^n\geqq\left(\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1}.$$

(ii) Nejednakost (44) je ekvivalentna sa

$$\frac{P_{n-1}}{P_n} A_{n-1} + \frac{p_n}{P_n} a_n \geq A_{n-1}{}^{P_{n-1}/P_n} a_n{}^{p_n/P_n},$$

što je neposredna posledica GA.

(iii) Na sličan način kao u dokazu 3 teoreme 18, ako stavimo $x = a_n$, $g(x) = \frac{A_n}{G_n}$, rezultat sleduje iz jednostavnih osobina funkcije g.

(iv) Stavljajući $f(x) = -\log x$, u posledici I. 31 neposredno dobijamo nejednakost (44).

U svim dokazima slučaj jednakosti se jednostavno ispituje.

Primedbe: 1° Uzastopna primena nejednakosti (44) dovodi do jednog drugog dokaza teoreme 6 (videti primedbu 2° koja prethodi).

Takođe, donja granica u (44) može se poboljšati na način sličan onome koji je korišćen za dokaz nejednakosti (41):

$$\frac{A_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})}{G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})} \geq \max_{1 \leq i, j \leq n} \left(\left(\frac{a_i p_i a_j p_j}{p_i + p_j} \right)^{p_i + p_j} a_i{}^{-p_i} a_j{}^{-p_j} \right)^{1/P_n}.$$

Ova granica postaje posebno simetrična u slučaju jednakih težina:

$$\frac{A_n}{G_n} \geq \max_{1 \leq j, k \leq n} \left(\frac{a_j a_k}{2} \right)^{1/n}.$$

2° Nejednakost (41) je prvi dokazao Popoviciu ([2], [3]) u slučaju jednakih težina. Ona se implicitno pojavila u jednom ranijem članku Simonarta [1], koji je dao dokaz 3 ali nije istakao šta je u stvari dokazao. Drugi autori su dali različite dokaze (Bullen [1], [2], [3], Bullen i Marcus [1], Dinghas [1], Kestelman [1], Klamkin [1], Nanjundiah [1], Mitrinović [6], Mitrinović i Vasić [2], [3]).

Sličnu nejednakost za harmonijsku i aritmetičku sredinu dobio je Klamkin [1]:

Teorema 21. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne n-torke i* $n > 2$, *tada je*

$$(45) \qquad P_n \left(\frac{A_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})}{H_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})} \right)^{\frac{1}{2}} - P_{n-1} \left(\frac{A_{n-1}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})}{H_{n-1}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \geq p_n$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_n = \sqrt{A_{n-1}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})\, H_{n-1}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})}$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} \frac{P_n^2 A_n}{H_n} &= (P_{n-1} A_{n-1} + a_n p_n) \left(\frac{P_{n-1}}{H_{n-1}} + \frac{p_n}{a_n} \right) \\ &= \frac{P_{n-1}^2 A_{n-1}}{H_{n-1}} + p_n^2 + P_{n-1} p_n \left(\frac{A_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{H_{n-1}} \right) \\ &\geq \frac{P_{n-1}^2 A_{n-1}}{H_{n-1}} + p_n^2 + 2 P_{n-1} p_n \sqrt{\frac{A_{n-1}}{H_{n-1}}} \\ &= \left(P_{n-1} \sqrt{\frac{A_{n-1}}{H_{n-1}}} + p_n \right)^2, \end{aligned}$$

što implicira (45). Slučaj jednakosti sleduje iz GA.

Primedba: 3° Uzastopna primena (45) dovodi do osnovne nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine (17), kao i do rafiniranja sličnog sa (41).

3.3. Generalizacija Radoove i Popoviciuove nejednakosti. Razni autori, a posebno Mitrinović i Vasić ([1]—[5]) i Bullen ([2]—[4]) dali su različita uopštenja nejednakosti (38) i (41). Interesantno je da nije nađeno više primena ovih rezultata. Jedina poznata primena potiče od Vasića i Kečkića [1], međutim taj rezultat se isto tako može dobiti polazeći od osnovnijih nejednakosti (Bullen [13]). Kako nam se čini, ovo je uvek i slučaj.

Dva osnovna dokaza teorema 18 i 20, dokaza pomoću elementarnog diferencijalnog računa, i dokazi primenom nejednakosti GA, koriste se da bi se dokazala ova dalja uopštenja Radoove nejednakosti. Najočiglednije uopštenje je da se dozvoli da sredine u (38) i (44) imaju različite težine-rezultat nije neposredan nasuprot situaciji u teoremi 16. Jedan naročito pogodan metod da se pronađu ova uopštenja dali su Mitrinović i Vasić (M, p. 90). Neki od dobijenih rezultata mogu se objediniti u sledeću teoremu.

Teorema 22. (a) *Neka su* λ *i* μ *dva realna broja takva da je* $\lambda\mu>0$. *Ako su* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}$ *i* $\boldsymbol{q}$ *pozitivne n-torke* $(n\geqq 2)$ *i ako je* $P_n>\mu p_n$, *tada je*

$$(46)\qquad Q_n A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})-\frac{\lambda q_n}{p_n}P_n G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\mu}$$
$$\geqq Q_{n-1}A_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})$$
$$-(\lambda\mu)^{\frac{p_n}{P_n-\mu p_n}}\frac{q_n}{\mu p_n}(P_n-\mu p_n)\,G_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\frac{\mu P_{n-1}}{P_n-\mu p_n}}.$$

Ako je $P_n<\mu p_n$, *važi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako je*

$$a_n=(\lambda\mu)^{\frac{p_n}{P_n-\mu p_n}}\,G_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\frac{\mu P_{n-1}}{P_n-\mu p_n}}.$$

(b) *Ako je* $\mu>0$ *i ako su* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ *pozitivne n-torke takve da je* $Q_n\geqq\mu q_n$ *i* $A_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})+\dfrac{\lambda Q_n}{Q_{n-1}}\geqq 0$, *tada je*

$$(47)\qquad \frac{(A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})+\lambda)^{Q_n}}{G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\frac{\mu q_n P_n}{p_n}}}\geqq\frac{1}{\mu^{\mu q_n}}\left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n-\mu q_n}\right)^{Q_n-\mu q_n}\frac{\left(A_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})+\dfrac{\lambda Q_n}{Q_{n-1}}\right)^{Q_n-\mu q_n}}{G_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\frac{\mu q_n P_{n-1}}{p_n}}}.$$

Ako je $Q_n<\mu q_n$, *važi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako je* $a_n=\mu A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})+\lambda$.

(c) *Neka su* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ *pozitivne n-torke* $(n\geqq 2)$, α, β, λ *realni brojevi i* $\lambda>0$, $\beta(\alpha-\beta p_n)>0$. *Tada, ako je* $\alpha-\beta p_n>0$, *važi*

$$(48)\qquad \frac{(A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})+\lambda)^{\alpha}}{G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\beta P_n}}\geqq\left(\frac{q_n}{\beta p_n}\right)^{\beta p_n}\left(\frac{\alpha}{Q_n}\right)^{\alpha}\left(\frac{Q_{n-1}}{\alpha-\beta p_n}\right)^{\alpha-\beta p_n}\frac{(A_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})+\lambda Q_n/Q_{n-1})^{\alpha-\beta p_n}}{G_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\beta P_{n-1}}}.$$

Ako je $\alpha-\beta p_n<0$, *važi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako je* $(\alpha-\beta p_n)\,q_n a_n=\beta p_n\big(Q_{n-1}A_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})+\lambda Q_n\big)$.

Dokaz. (a) Dokaz 1. Ako je $\lambda=\mu=1$, nejednakost (46) se svodi na

$$Q_n A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})-\frac{q_n}{p_n}P_n G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\geqq Q_{n-1}A_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})-\frac{q_n}{p_n}P_{n-1}G_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$$

i dokaz 3 teoreme 18 sugerira da se stavi $x=a_n$ i posmatra

$$f(x)=Q_n A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})-\frac{q_n}{p_n}P_n G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}).$$

Mitrinović – Vasićev metod [2] sastoji se u uvođenju dva nova parametra i posmatranju sledećeg izraza

$$g(x)=Q_n A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})-\frac{\lambda q_n}{p_n}P_n G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\mu}$$

umesto f. Tada je

$$g'(x)=q_n(1-\lambda\mu x^{(\mu p_n-P_n)/P_n}G_{n-1}{}^{\mu P_{n-1}/P_n}).$$

Prema tome, $g'(x)=0$ ako je $x=(\lambda\mu)^{P_n/(P_n-\mu p_n)}G_{n-1}{}^{\mu P_{n-1}/(P_n-\mu p_n)}$ i za prvi sistem uslova dokaz se sprovodi kao u teoremi 18 jer funkcija g ima tada svoj minimum. Za drugi skup uslova ona ima maksimum, pa je dokaz sličan.

Dokaz 2. Metod upotrebljen u dokazu 2 teoreme 18 može i ovde da bude primenjen. Međutim, nasuprot gornjem dokazu, on ne doprinosi utvrđivanju oblika nejednakosti koja treba biti dokazana.

Prosta izračunavanja pokazuju da je (46) ekvivalentno sa

$$\text{(49)}\qquad \frac{\mu p_n}{P_n}a_n+\frac{P_n-\mu p_n}{P_n}(\lambda\mu)^{P_n/(P_n-\mu p_n)}G_{n-1}{}^{\mu P_{n-1}/(P_n-\mu p_n)}$$
$$\geqq a_n^{\frac{\mu p_n}{P_n}}(\lambda\mu)G_{n-1}{}^{\mu P_{n-1}/P_n},$$

što je neposredna posledica nejednakosti *GA*.

Moglo bi se primetiti da (49) pokazuje da je (46) nezavisno od $\boldsymbol{q}$.

(b) Dokaz nejednakosti (47), za koju je (44) partikularan slučaj, dobija se korišćenjem jednog ili drugog metoda koji je primenjen pod (a). Međutim, od izvesnog interesa je da se zapazi da je ovaj rezultat isti kao i pod (a), pošto ako stavimo

$$\lambda=\frac{\alpha q_n P_n}{p_n Q_n}G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\beta}-A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})\quad\text{i}\quad \mu=\frac{p_n Q_n}{q_n P_n}\beta,$$

nejednakost (47) svodi se na (46) (pri čemu su λ i μ zamenjeni sa α i β respektivno).

(c) Kao u (a) stavimo $x=a_n$ i posmatrajmo funkciju $x\mapsto f(x)=\dfrac{(A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})+\lambda)^{\alpha}}{G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})^{\beta P_n}}$. Tada f ima jedinstvenu ekstremnu vrednost za

$$x=x_0=\beta\frac{p_n}{q_n}\,\frac{Q_{n-1}A_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})+\lambda Q_n}{\alpha-\beta p_n}$$

koja je minimum ako je $\alpha-\beta p_n<0$ i maksimum ako je $\alpha-\beta p_n>0$.

PRIMEDBE: 1° Kasnije ćemo videti da su nejednakosti (38) i (44) specijalni slučajevi jednog opštijeg rezultata. Ovde, u stvari, vidimo da ih jednostavna generalizacija (46) uključuje obe, izborom specijalnih vrednosti λ i μ ($\lambda=1$, $\mu=1$ za (38) i $\lambda=A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})/G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$, $\lambda\mu=1$, za (44)).

2° Ako je $\alpha = Q_n$, $\beta = \frac{q_n}{p_n}$, nejednakost (48) svodi se na

$$\frac{(A_n(a;\, q)+\lambda)^{Q_n}}{G_n(a;\, p)^{q_n P_n/p_n}} \geqq \frac{(A_{n-1}(a;\, q)+\lambda\, Q_n/Q_{n-1})^{Q_{n-1}}}{G_{n-1}(a;\, p)^{q_n P_{n-1}/p_n}},$$

koja je multiplikativni analogon (46).

3° Nejednakost (46) mogla bi se dalje proširiti, polazeći od

$$f(x) = Q_n A_n(a;\, q) - \lambda G_n(a;\, p)^{\mu} - \nu G_n(a;\, r)^{\theta} \quad \left(x = a_n;\ \frac{\theta r_n}{R_n} = \frac{p_n}{P_n}\right).$$

4° Pogodnim izborom različitih parametara dobijaju se rezultati koje su nekoliko autora izveli nezavisno jedan od drugog. Posebno, za $\lambda = \frac{p_n Q_n}{P_n q_n}$, $\lambda\mu = 1$, (46) daje nejednakost koja je jednostavna generalizacija nejednakosti (38):

$$Q_n(A_n(a;\, q) - G_n(a;\, p))^{q_n P_n/(p_n Q_n)} \geqq Q_{n-1}(A_{n-1}(a;\, q) - G_{n-1}(a;\, p))^{q_n P_{n-1}/(p_n Q_{n-1})}.$$

3.4. Everittovi rezultati

3.4.1. Uvedimo sledeće proširenje oznaka za razne sredine. Neka su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{p}$ dva niza pozitivnih brojeva, $\mathbf{I}$ jedan neprazan konačan podskup od $\mathbf{N}$,

$$P_{\mathbf{I}} = \sum_{i \in \mathbf{I}} p_i, \quad A_{\mathbf{I}}(a;\, p) = \frac{1}{P_{\mathbf{I}}} \sum_{i \in \mathbf{I}} a_i p_i; \quad G_{\mathbf{I}}(a;\, p) = \Big(\prod_{i \in \mathbf{I}} a_i^{p_i}\Big)^{\frac{1}{P_{\mathbf{I}}}}.$$

Nejednakosti (39) i (44) Radoa i Popoviciua mogu se sada predstaviti u sledećom obliku.

Teorema 23. *Neka su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *dva niza pozitivnih brojeva. Definišimo sledeće funkcije konačnih podskupova* $\mathbf{I}$ *od* $\mathbf{N}$:

$$\rho(\mathbf{I}) = P_{\mathbf{I}}\big(A_{\mathbf{I}}(a;\, p) - G_{\mathbf{I}}(a;\, p)\big) \quad (\mathbf{I} \neq \varnothing), \quad \rho(\varnothing) = 0;$$

$$\pi(\mathbf{I}) = \left(\frac{A_{\mathbf{I}}(a;\, p)}{G_{\mathbf{I}}(a;\, p)}\right)^{P_{\mathbf{I}}} \quad (\mathbf{I} \neq \varnothing), \quad \pi(\varnothing) = 0.$$

Funkcije ρ *i* π *su rastuće.*

Prvi Everittovi rezultati koje ćemo proučavati odnose se na razne osobine funkcija ρ i π (videti: Everitt [1], Bullen [2], Mitrinović i Vasić [2]).

Teorema 24 (a) *Skupovna funkcija* ρ *je superaditivna;*
(b) *Skupovna funkcija* π *je logaritamski superaditivna, tj.*

(50) $\rho(\mathbf{I} \cup \mathbf{J}) \geqq \rho(\mathbf{I}) + \rho(\mathbf{J})$,

(51) $\pi(\mathbf{I} \cup \mathbf{J}) \geqq \pi(\mathbf{I})\,\pi(\mathbf{J})$.

Nejednakosti (50) i (51) sleduju iz preciznijih rezultata koje ćemo dati. Ako je $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_{n+m})$, stavimo

$$\bar{a} = (a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}), \quad \bar{A}_m(a;\, p) = \frac{1}{\bar{P}_m} \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i p_i, \quad \bar{P}_m = \sum_{i=n+1}^{n+m} p_i, \text{ itd.}$$

Teorema 25. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne* $(n+m)$*-torke, tada je*

(a) $$P_{n+m}\left(A_{n+m}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})-G_{n+m}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\right)\geqq P_n\left(A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})-G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\right)+\overline{P}_m\left(\overline{A}_m(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})-\overline{G}_m(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\right),$$

sa jednakošću ako i samo ako je $G_n=\overline{G}_m$;

(b) $$\left(\frac{A_{n+m}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{G_{n+m}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}\right)^{P_{n+m}}\geqq\left(\frac{A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}\right)^{P_n}\left(\frac{\overline{A}_m(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{\overline{G}_m(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}\right)^{\overline{P}_m},$$

sa jednakošću ako i samo ako je $A_n=\overline{A}_m$.

Teoreme 18 i 20 su specijalni slučajevi ovih rezultata. Metod primenjen u dokazu 2 teoreme 18 može da se iskoristi za dokaz (a); sličan metod korišćen u dokazu teoreme 20 daje (b).

PRIMEDBA: 1° Mitrinović i Vasić [2] i Bullen [2] proširili su teoremu 25 na slučaj kada se u sredinama javljaju različite težine.

3.4.2. U ovom odeljku razmatraćemo jedan problem koji je takođe razmatrao Everitt ([2], [3]). Iz teoreme 23 sleduje da $\lim\limits_{n\to+\infty}(\{1,\ldots,n\})$ postoji. Pitanje koje ćemo razmatrati je: za koje $\boldsymbol{a}$ je ova granica konačna?

Teorema 26. *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivan niz, tada je* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(A_n(\boldsymbol{a})-G_n(\boldsymbol{a})\right)$ *konačan ako i samo ako je* (a) *red* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *konvergentan ili* (b) *za neko* $\alpha>0$ *red* $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}(a_i-\alpha)^2$ *je konvergentan.*

Dokaz. Posmatraćemo četiri moguća tipa ponašanja niza $\boldsymbol{a}$: (i) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\alpha>0$; (iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup a_n=+\infty$;

(iv) $0\leqq\lim\limits_{n\to+\infty}\inf a_n<\lim\limits_{n\to+\infty}\sup a_n<+\infty$.

Slučaj (i). Koristeći ranije uvedene oznake, na osnovu teoreme 23, za svako $k\,(1\leqq k<n)$ imamo

$$n(A_n-G_n)=\rho(\{1,\ldots,n\})\geqq\rho(\{1,\ldots,k,n\})$$
$$=a_n+\sum_{i=1}^{k}a_i-(k+1)\left(a_n\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/(k+1)}.$$

Prema tome, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\geqq n(A_n-G_n)\geqq a_n+\sum_{i=1}^{k}a_i-(k+1)\left(a_n\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/(k+1)}$$

pa ako $n\to+\infty$, na osnovu pretpostavke o nizu $\boldsymbol{a}$ imamo

$$\sum_{i=1}^{+\infty}a_i\geqq\lim_{n\to+\infty}n(A_n-G_n)\geqq\sum_{i=1}^{k}a_i,$$

tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} n(A_n - G_n) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$. Stoga, u ovom slučaju, posmatrana granica je konačna ako i samo ako je red $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ konvergentan.

Slučaj (ii). Primetimo da pretpostavka u ovom slučaju takođe dovodi do $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \alpha$. Stavimo $\tau_{ij} = a_i - A_j$. Najpre ćemo dobiti neke podatke o sumama $\sum\limits_{i=1}^{j} \tau_{ij}$, $\sum\limits_{i=1}^{j} \tau_{ij}^2$ i $\sum\limits_{i=1}^{j} \tau_{ij}^3$. Za $i \leqq k \leqq j$ neposredno imamo $\sum\limits_{i=1}^{j} \tau_{ij} = 0$ i

$$\sum_{i=1}^{j} (a_i - \alpha)^2 = \sum_{i=1}^{j} \tau_{ij}^2 + j(A_j - \alpha)^2 \geqq \sum_{i=1}^{j} \tau_{ij}^2 \geqq \sum_{i=1}^{k} \tau_{ij}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \big((a_i - \alpha)^2 + (\alpha - A_j)^2\big).$$

Odavde, ako najpre $j \to +\infty$ i zatim $k \to +\infty$, dobijamo

$$\lim_{j\to+\infty} \sum_{i=1}^{j} \tau_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} (a_i - \alpha)^2, \tag{52}$$

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} \tau_{ij}^2 = 0. \tag{53}$$

Izaberimo $\varepsilon > 0$ i neka je n_0 takvo da je $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ako je $n \geqq n_0$. Za $j > n_0$ imamo

$$\sum_{i=1}^{j} |\tau_{ij}|^3 \leqq \sum_{i=1}^{j} \tau_{ij}^2 (|a_i - \alpha| + |\alpha - A_j|) \tag{54}$$

$$< \sum_{i=1}^{n_0} \tau_{ij}^2 (|a_i - \alpha|) + \varepsilon \sum_{i=1}^{j} \tau_{ij}^2 + |\alpha - A_j| \sum_{i=1}^{j} \tau_{ij}^2.$$

Odavde je

$$\sum_{i=1}^{j} |\tau_{ij}|^3 = O\left(\sum_{i=1}^{j} \tau_{ij}^2\right) \quad (j \to +\infty). \tag{55}$$

Ako pretpostavimo da je red $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} (a_i - \alpha)^2$ divergentan, tada na osnovu (53) iz (54) dobijamo

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{j} |\tau_{ij}|^3}{\sum\limits_{i=1}^{j} \tau_{ij}^2} = o(1) \quad (j \to +\infty),$$

tj. ako je red $\sum_{i=1}^{+\infty}(a_i-\alpha)^2$ divergentan, tada je

$$\sum_{i=1}^{j}|\tau_{ij}|^3=o\left(\sum_{i=1}^{j}\tau_{ij}^2\right). \tag{56}$$

Sada ćemo preći na razmatranje teoreme u ovom slučaju:

$$G_n=A_n\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\tau_{in}}{A_n}\right)^{1/n}=nA_n\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+\frac{\tau_{in}}{A_n}\right)\right)$$

$$=A_n\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{in}}{A_n}-\frac{1}{2}\frac{\tau_{in}^2}{A_n^2}+O(|\tau_{in}|^3)\right)$$

$$=A_n\exp\left(-\frac{1}{2nA_n^2}\sum_{i=1}^{n}\tau_{in}^2+\frac{1}{n}O\left(\sum_{i=1}^{n}|\tau_{in}|^3\right)\right).$$

Ako je sada red $\sum_{i=1}^{+\infty}(a_i-\alpha)^2$ konvergentan, na osnovu (52) i (53) zaključujemo da je

$$G_n=A_n\exp\left(\frac{-1+O(1)}{2A_n}\sum_{i=1}^{n}\tau_{in}^2\right).$$

tj.

$$n(A_n-G_n)=\frac{1+O(1)}{2A_n}\sum_{i=1}^{n}\tau_{in}^2+o(1),$$

čime je dokazano da je $\lim\limits_{n\to+\infty}(nA_n-nG_n)$ konačno. Ako je, s druge strane, red $\sum_{=1}^{+\infty}(a_i-\alpha)^2$ divergentan, tada (52), (53) i (56) daju jednakost

$$G_n=A_n\exp\left(\frac{-1+O(1)}{2A_n}\sum_{i=1}^{n}\tau_{in}^2\right)+O(1),$$

čime je dokazano da je $\lim\limits_{n\to+\infty}n(A_n-G_n)$ beskonačno.

Slučaj (iii). Ako pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, na osnovu teoreme 23 imamo

$$\rho(\{1,\ldots,n\})\geqq\rho(\{1,n\})=a_i+a_n-2\sqrt{a_1a_n},$$

što daje $\lim\limits_{n\to+\infty}n(A_n-G_n)=+\infty$.

Slučaj (iv). Neka je $a=\lim\limits_{n\to+\infty}\inf a_n$, $b=\lim\limits_{n\to+\infty}\sup a_n$ i pretpostavimo da je $\varepsilon=\frac{b-a}{3}$ i $0<a_n\leqq K$ za svako n. Izaberimo $\{p_k\}$ i $\{q_k\}$ tako da je, za svako k, $p<q_k<<p_{k+1}$, $a_{p_k}<a+\varepsilon$, $a_{q_k}>b-\varepsilon$. Ovo implicira da je, za svako k, $a_{q_k}-a_{p_k}>\varepsilon$. Prema tome,

$$\rho(\{p_k,q_k\})=a_{p_k}+a_{q_k}-2\sqrt{a_{p_k}a_{q_k}}>\frac{\varepsilon^2}{4k}. \tag{57}$$

Međutim, na osnovu teoreme 24 i (57), imamo

$$\begin{aligned}\rho(\{1, \dots, q_k\}) &\geqq \rho(\{p_1, q_1, \dots, p_k, q_k\}) \\ &\geqq \rho(\{p_1, q_1, \dots, p_{k-1}, q_{k-1}\}) + \rho(\{p_k, q_k\}) \\ &\geqq \sum_{s=1}^{k} \rho(\{p_s, q_s\}) \geqq \frac{k\varepsilon^2}{4k},\end{aligned}$$

pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} n(A_n - G_n) = +\infty$, čime je završen dokaz teoreme 26.

PRIMEDBA: 2° Prethodna teorema daje izvesne podatke o gornjoj granici razlike $A_n(\boldsymbol{a}) - G_n(\boldsymbol{a})$. Ova materija biće detaljnije razmatrana u 4.

3.5. Neki Koberovi, Dianandaovi i Beckovi rezultati. U ovom podeljku pretpostavićemo da su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{p}$ pozitivne n-torke takve da:

(i) svi $a_1, \dots, a_n$ nisu jednaki, (ii) $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Dalje, koristićemo sledeće oznake

$$p = \min\{p_1, \dots, p_n\}, \quad P = \max\{p_1, \dots, p_n\},$$

$$\Delta_n = \frac{1}{P_n} \rho(\{1, \dots, n\}) = A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) - G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}),$$

$$D_n = \Delta_n \text{ u slučaju jednakih težina } = A_n - G_n, \tag{58}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (a_i^{1/2} - a_j^{1/2})^2 = \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} (a_i^{1/2} - a_j^{1/2})^2,$$

$$\Sigma_n = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j (a_i^{1/2} - a_j^{1/2})^2 = \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} p_i p_j (a_i^{1/2} - a_j^{1/2})^2.$$

Teorema 27. *Pod pretpostavkama* (58) *važi*

$$\frac{p}{n-1} \leqq \frac{\Delta_n}{S_n} \leqq P, \tag{59}$$

$$\frac{1}{p-1} < \frac{\Delta_n}{\Sigma_n} < \frac{1}{p}. \tag{60}$$

Dokaz. (i) Najpre ćemo posmatrati donju granicu u (59). Prema ***GA*** imamo

$$\Delta_n - \frac{p}{n-1} S_n = \sum_{i=1}^{n} (p_i - p) a_i + \frac{2p}{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} (a_i a_j)^{1/2} - G(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \geqq 0. \tag{61}$$

(ii) Da bismo dobili gornju granicu u (59), pođimo od $S_n = n D_n + G_n$, gde je

$$G_n = n\big((n-1) A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) + G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) - \sum_{i,j=1}^{n} (a_i a_j)^{1/2}. \tag{62}$$

Kasnije, u (iv), dokazaćemo da je $G_n \geqq 0$. Stoga je

$$\frac{\Delta_n}{S_n} \leqq \frac{\Delta_n}{n D_n}, \tag{63}$$

što daje gornju granicu u (59) u slučaju jednakih težina. Uopšte, na osnovu *GA* je

$$D_n - \frac{n}{nP} = \frac{1}{nP} \sum_{i=1}^{n} (P - p_i)\, a_i + \frac{1}{nP} G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) - G_n(\boldsymbol{a}) \geqq 0.$$

Ovo, zajedno sa (62), upotpunjuje dokaz u ovom slučaju.

(iii) Donja granica u (60) sleduje iz sledeće nejednakosti koja je tačna na osnovu *GA*:

$$(64) \qquad \Delta_n - \frac{1}{1-p} \Sigma_n = \frac{2}{1-p} \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} p_i p_j (a_i a_j)^{1/2} + \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{n} p_i (p_i - p)\, a_i - G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) \geqq 0.$$

(iv) Gornja granica u (60) dobija se ako se dokaže da je $\Gamma_n \geqq 0$, gde je

$$\Gamma_n = \Gamma_n(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j (a_i^{1/2} - a_j^{1/2})^2 - p\left(A_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) + G_n(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})\right).$$

Primetimo da je u slučaju jednakih težina $\Gamma_n = \frac{1}{n^2} G_n$, gde je G_n dato u (62). Stoga ako dokažemo da je $\Gamma_n \geqq 0$, završili smo dokaz i u slučaju (ii). Dokaz ćemo dati indukcijom po n. Očigledno je da je $\Gamma_1 \geqq 0$. Neka je tačno $\Gamma_k \geqq 0$ $(1 \leqq k < n)$. Možemo pretpostaviti da je $a_n = \min(a_1, \ldots, a_n)$ i stavimo $\tilde{p} = \min(p_1, \ldots, p_n)$. Tada, ako je $\gamma = G_{n-1}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p})$, imamo

$$(65) \qquad \begin{aligned} \Gamma(\gamma, \ldots, \gamma, a_n) = {} & (p_n - p)(1 - p_n)\gamma + p_n(1 - p - p_n)\, a_n + p\gamma^{1-p_n} a_n^{p_n} \\ & - 2p_n(1 - p_n)\gamma^{1/2} a_n^{1/2} \geqq 0, \end{aligned}$$

na osnovu *GA*. Prema induktivnoj hipotezi je $\Gamma_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \geqq 0$ i

$$(66) \qquad \begin{aligned} \Gamma_n(a_1, \ldots, a_n) - \Gamma_n(\gamma, \ldots, \gamma, a_n) - (1 - p_n)^2\, \Gamma_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \\ = \left(\tilde{p} - p + p_n\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i - (1 - p_n)\gamma\right) \\ - 2p_n a_n^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i^{1/2} - (1 - p_n)\gamma^{1/2}\right) \\ \geqq p_n\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i - (1 - p_n)\gamma\right) - 2p_n\gamma^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i - (1 - p_n)\gamma^{1/2}\right) \\ = p_n \sum_{i=1}^{n-1} p_i (a_i^{1/2} - \gamma^{1/2})^2 \geqq 0. \end{aligned}$$

Ispitajmo kada važe jednakosti u (59) i (60). Ako je niz $\boldsymbol{a}$ pozitivan, jednakost u opštem slučaju ne može da nastupi. Ako u nizu ima članova koji su jednaki nuli, odgovor daje sledeća lema.

Lema 28. (a) *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *nenegativna, nekonstantna* n*-torka, tada u onom* $\boldsymbol{a}$ *za koje je donja granica u* (59) *i* (60) *dostignuta jedno* a_i *za koje je* $p_i = p$ *je različito od nule i preostali* a_i *su nule*; *donja granica je dostignuta i ako je* $n = 2$ *i* $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$,

(b) *Gornja granica u* (60) *je dostignuta za ono* $\boldsymbol{a}$ *u kome je jedno* a_i, *za koje je* $p_i = p$, *nula i preostali* a_i *su jednaki i pozitivni; gornja granica je dostignuta i ako je* $n=2$ *i* $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$,

(c) *Gornja granica u* (59) *u opštem slučaju ne može biti dostignuta.*

Dokaz. (a) Iz (61) i (64), na osnovu slučaja jednakosti u GA, imamo da su leve nejednakosti u (59) i (60) striktne osim kada su navedeni uslovi ispunjeni (primetimo da koristimo činjenicu da svi a_i nisu jednaki).

(b) Primenjujući (65) i (66) i osobinu kada nastupa jednakost u GA, s obzirom da svi a_i nisu jednaki, dobijamo da je desna nejednakost u (60) striktna osim u navedenim slučajevima.

(c) Neka je $n=3$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{2}$. Tada je

$$\frac{\Delta_3}{S_3} \leqq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < \frac{1}{2} = P;$$

gornja granica je ovde dostignuta ako i samo ako je $a_1 = 0$, $a_2 = (\sqrt{3}-1)^2 a_3$ (ili $a_2 = 0$ i $a_1 = (\sqrt{3}-1)^2 a_3$). Stavljajući $r = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, ono što treba dokazati je ekvivalentno sa

$$\text{(67)} \qquad (r-2)a_3 + \left(4\sqrt[4]{a_1}\sqrt[4]{a_2} - r\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}\right)\right)\sqrt{a_3} + \left((r-1)(a_1+a_2) - r\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\right) \geqq 0.$$

Budući da koeficijent uz a_3 nije pozitivan, (67) važi ako i samo ako je

$$\left(4\sqrt[4]{a_1}\sqrt[4]{a_2} - r\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}\right)\right)^2 - 4(r-2)\left((r-1)(a_1+a_2) - r\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\right) \leqq 0,$$

tj. kako je $3r^2 - 12r + 8 = 0$, ako i samo ako je

$$\text{(68)} \qquad \sqrt[4]{a_1}\sqrt[4]{a_2}\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}\right) \geqq 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2},$$

što je očigledno tačno. Za simultanu jednakost u (67) i (68) mora važiti $2(r-2)\sqrt{a_3} = -4\sqrt[4]{a_1}\sqrt[4]{a_2} + r\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}\right)$ i $a_1 = 0$ ili $a_2 = 0$ ili $a_1 = a_2$; kako svi a_i nisu jednaki, ovim je završen dokaz.

PRIMEDBE: 1° Ove rezultate su dobili Kober [1] i Diananda [2]; u oba članka vršena su ispitivanja ponašanja količnika $\frac{\Delta_n}{S_n}$, $\frac{\Delta_n}{\Sigma_n}$ kada $(a_1, \ldots, a_n)$ teži ka $(a, \ldots, a)$. Posebno, ako je $(a, \ldots, a) \neq (0, \ldots, 0)$, tada je $\lim \frac{\Delta_n}{\Sigma_n} = 2$.

2° Bullen [1] je dao multiplikativan analogon teoreme 27, gde su razlike Δ_n i D_n zamenjene količnicima.

Beck [2] je, polazeći od Taylorovog razvoja razlike Δ_n, našao sledeće procene:

$$\frac{1}{2}(\min a_i)^3 \sum_{1 \leqq i < k \leqq n} p_i p_k \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_k}\right)^2 \leqq \Delta_n \leqq \frac{G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})}{2(\min a_i)^2} \sum_{1 \leqq i < k \leqq n} p_i p_k (a_i - a_k)^2.$$

Drugi rezultati u vezi sa razlikom D_n mogu se naći kod Motzkina [2].

3.6. Redhefferove rekurentne nejednakosti. Jedan interesantan opšti metod za dobijanje nejednakosti dao je Redheffer [1]. Izložićemo ovaj metod koji takođe dovodi do izvesnih rafiniranja nejednakosti GA.

Definicija 29. *Neka su* f_k, g_k: $\prod_{i=1}^{k} D_i \to \mathbf{R}$ $(1 \leqq k \leqq n)$, $f_0 = 1$ *date realne funkcije. Nejednakost*

$$(69) \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i \leqq \sum_{i=1}^{n} g_i \qquad (\mu_i \in \mathbf{R},\ 1 \leqq i \leqq n)$$

naziva se rekurentnom ako postoje funkcije $F_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *takve da je*

$$F_k(\mu) f_{k-1}(a_1, \ldots, a_{k-1}) = \sup_{a_k \in D_k} \big(\mu f_k(a_1, \ldots, a_k) - g_k(a_1, \ldots, a_k)\big).$$

Teorema 30. *Rekurentna nejednakost* (69) *važi za svako* $(a_1, \ldots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} D_i$ *ako i samo ako postoje* $\delta_k \in \mathbf{R}$ $(1 \leqq k \leqq n+1)$ *tako da je* $\delta_i \leqq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $\delta_{n+1} = 0$ *i* $\mu_k = F_k^{-1}(\delta_k) - \delta_{k+1}$ *(gde je* $F_k^{-1}(\delta)$ *jedno od rešenja jednačine* $F_k(\mu) = \delta$*).*

Dokaz. Dokazaćemo gornju teoremu indukcijom po n. Očigledno teorema važi za $n = 1$. Pretpostavimo da je tačna za $n-1$. Nejednakost će važiti za n ako i samo ako važi za nepovoljne izbore a_n, pretpostavljajući da su ostale promenljive konstantne. Kako je nejednakost rekurentna, koristeći induktivnu hipotezu, dobijamo relacije teoreme za $k \leqq n-2$ zajedno sa

$$F_n(\mu_n) + \mu_{n-1} = F_{n-1}^{-1}(\delta_{n-1}).$$

Ako definišemo $\delta_n = F_n(\mu_n)$, vidimo da teorema važi za n, čime je dokaz završen.

Kao jednu primenu ovog rezultata dokazaćemo sledeće:

Posledica 31. *Ako je* $\beta_1 \leqq 1$, $\beta_k \geqq 0$, $\beta_{n+1} = 0$, $\lambda_k > 0$ $(1 \leqq k \leqq n)$, *tada važi*

$$(70) \qquad \sum_{k=1}^{n} k\big((\lambda_k \beta_k)^{1/k} - \beta_{k+1}{}^{1/k}\big) G_k(\boldsymbol{a}) \leqq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k.$$

Dokaz. Posmatrajmo nejednakost $\sum_{k=1}^{n} \mu_k G_k(\boldsymbol{a}) \leqq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$.

Da bismo dokazali da je ova nejednakost rekurentna, pođimo od

$$\mu G_k - \lambda a_k = G_{k-1}(\mu t - \lambda t^k),$$

gde je $t^k = \dfrac{a_n}{G_{n-1}}$ $(k > 1)$ i $\lambda = \lambda_k$. Tada dobijamo

$$F_k(\mu) = (k-1)\lambda^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} \ (\mu \geqq 0), \quad F_k(\mu) = 0 \ (\mu < 0).$$

Prema tome, $F_1(\mu) = 0$ $(\mu \leqq \lambda_1)$ i $F_1(\mu) = +\infty$ za $\mu > \lambda_1$. Budući da $F_k(\mu) \geqq 0$ implicira $\delta_k \geqq 0$, stavimo $\delta_k = (k-1)\beta_k{}^{\frac{1}{k-1}}$. Tada nalazimo

$$\mu_k = k\left((\lambda_k \beta_k)^{\frac{1}{k}} - \beta_{k+1}{}^{\frac{1}{k}}\right),$$

gde su brojevi β_k $(1 \leqq k \leqq n+1)$ definisani kao gore.

Posledica 32. (a) *Ako je* $G = A_n\left(G_1(\boldsymbol{a}), \ldots, G_n(\boldsymbol{a})\right)$, *tada imamo*

$$G + e^{G_n(\boldsymbol{a})/G} \leqq e A_n(\boldsymbol{a}),$$

(b) $$\frac{A_n(\boldsymbol{a})}{G_n(\boldsymbol{a})} \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{G}{G_n(\boldsymbol{a})} + \frac{G_n(\boldsymbol{a})}{G}\right) \geqq 1,$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Primenimo posledicu 31 sa $\beta_k = e^{t(k-1)}$ $(t > 0,\ 1 \leqq k - n)$. Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti je $k(\beta_k^{1/k} - \beta_{k+1}^{1/k}) > te^t$, tako da ako stavimo $\lambda_k = 1$ $(1 \leqq k \leqq n)$, tada (70) dovodi do

(71) $$G_n < A_n e^{-t} + tG.$$

Najbolji izbor t, $t = \frac{G_n}{G} - 1$, dovodi do (a).

Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $0 < a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$ i da svi a_i nisu jednaki, tako da imamo $G_{k+1} \geqq G_k$, $G_n \geqq G$. Kako je, dalje, $x^{-1}e^{x-1} > \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, (a) sleduje iz (b).

Obe nejednakosti u posledici 32 pooštravaju *GA*.

PRIMEDBE: 1° Kako je $e^{G_n/G} > 1$, posledica 32 (*a*) implicira Carlemannovu nejednakost $G \leqq eA_n$ koja je dokazana u HLP, p. 249 (jedan drugi dokaz biće dat u primedbi IV. 8.1.1°).

2° Direktan dokaz nejednakosti (70) dao je Bullen [6] primenom metoda koji je korišćen ranije u ovom poglavlju. Na žalost, ovaj metod daje dokaz samo za $0 \leqq t \leqq 2$, pa, prema tome, ne dovodi do posledice 32 (a).

3.7. Druga rafiniranja. Postoje mnogobrojna druga rafiniranja nejednakosti *GA* od kojih ćemo navesti neka.

Dokaz sledećeg rafiniranja nejednakosti (43) (Siegel [1] i Hunter [1]) je dosta komplikovan tako da ćemo navesti samo rezultat.

Teorema 33. *Ako je* $n > 2$ *i ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka koja nema dva jednaka člana,*

(a) *tada je*

(72) $$\frac{A_n(\boldsymbol{a})}{G_n(\boldsymbol{a})} \geqq G_n(\boldsymbol{b}),$$

gde je $\boldsymbol{b}$ *niz* $b_k = 1 + \frac{n-k}{t+k-1}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ *i* t *jedino pozitivno rešenje jednačine*

(73) $$\left(\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-2}\left(\frac{t+k}{n-k}\right)^{n-k-1}\right)\left(\prod_{1 \leqq i < j \leqq n}(a_i - a_j)^2\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{n-1},$$

(b) $$\frac{A_n}{G_n} > \left(\frac{1}{1 + (n-1)\,t\,(1-t)^{n-1}}\right)^{1/n},$$

gde je $0 < t < 1$ *i* t *koren jednačine*

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (a_i - a_j)^2 = t\,(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

PRIMEDBE: 1° Kako je $b_k > 1$ za svako k $(1 \leqq k < n-1)$, zaključujemo da je $G_n(\boldsymbol{b}) > 1$, pa je (72) jedno rafiniranje nejednakosti (43).

2° Eliminacijom $\prod_{i=1}^{n} a_i$ iz (72) i (73) dobijamo nejednakost

$$A_n^{n(n-1)} \geqq \Big(\prod_{1\leqq i<j\leqq n} (a_i-a_j)^2\Big)\Big(\prod_{k=1}^{n} \frac{(t+n-1)^{n-1}}{(t+k-1)^{k-1}}\Big),$$

koja predstavlja rafiniranje sledećeg Schurovog [1] rezultata

$$A_n^{n(n-1)} \geqq \Big(\prod_{1\leqq i<j\leqq n} (a_i-a_j)^2\Big)\Big(\prod_{k=1}^{n} \frac{(n-1)^{n-1}}{(k-1)^{k-1}}\Big).$$

3° Dinghasov rezultat [3] sleduje iz teoreme 33 (b).

4. KONVERZNE NEJEDNAKOSTI

Nejednakost *GA*, predstavljena u jednom od oblika (37) ili (48), daje gornju granicu za izvesne izraze. Uopšte govoreći, ne postoji netrivijalna donja granica, međutim takva granica može se dobiti ako se postave izvesna ograničenja za niz $\boldsymbol{a}$. Rezultujuća nejednakost naziva se komplementarna nejednakost za *GA* ili njoj konverzna nejednakost. Ovaj problem biće detaljnije razmatran za opštije sredine u odeljku 5. Ovde ćemo dati neke jednostavnije rezultate koji su dokazani na drugačije načine nego opšti rezultati.

Teorema 34. *Neka su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne n-torke i* $0<m\leqq a_i\leqq M$ $(1\leqq i\leqq n)$. *Tada je*

$$(74)\qquad 0\leqq A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})-G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\leqq \theta M+(1-\theta)m-M^{\theta}m^{1-\theta},$$

gde je

$$(75)\qquad \theta=\log\left(\frac{\dfrac{M}{m}-1}{\log\dfrac{M}{m}}\right)\Bigg/\log\frac{M}{m},$$

sa jednakošću u desnoj nejednakosti ako i samo ako postoji podniz $(k_1,\ldots,k_q)$ *od* $(1,\ldots,n)$ *takav da je* $\sum_{i=1}^{q} p_{k_i}=\theta$ *i* $a_{k_1}=\cdots=a_{k_q}=M$, $a_k=m$, *gde* k *nije jedan od* $k_1,\ldots,k_q$.

Dokaz. Ovaj rezultat, iako dosta nezgodan za formulisanje, jednostavno sleduje iz dokaza 3 teoreme 18. Pošto funkcija f, koja je tamo definisana ima jedinstveni minimum, zaključujemo da ako je njen domen ograničen na zatvoreni interval $[m, M]$, tada f uzima svoju maksimalnu vrednost ili u m ili u M. Ista argumentacija može se ponoviti i kada je x jednako nekom a_i $(1\leqq i\leqq n)$, pa stoga sleduje da A_n-G_n dostiže svoju maksimalnu vrednost samo ako je $a_i=m$ ili M $(1\leqq i\leqq n)$.

Pretpostavimo da je $a_{k_1}=a_{k_2}=\cdots=a_{k_q}=M$, $a=m$, gde k nije neko od $k_1,\ldots,k_q$. Tada, za neko y $(0\leqq y\leqq 1)$, važi

$$A_n-G_n=yM+(1-y)m-M^y m^{1-y}=g(y).$$

Jednostavna izračunavanja pokazuju da g ima maksimum u $y=\theta$, gde je θ dato sa (75). Budući da je slučaj kada nastupa jednakost očigledan, ovim je završen dokaz nejednakosti (74).

PRIMEDBA: 1° Ovaj dokaz dali su Mond i Shisha [2], [3].

U slučaju jednakih težina jednu veoma jednostavnu komplementarnu nejednakost dobio je Dočev [1].

Teorema 35. *Neka je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka i stavimo* $K=\frac{\max(\boldsymbol{a})}{\min(\boldsymbol{a})}$. *Tada je*

$$(76)\qquad 1\leqq\frac{A_n(\boldsymbol{a})}{G_n(\boldsymbol{a})}\leqq\frac{(K-1)\,K^{\frac{1}{K-1}}}{e\log K}.$$

Dočev je ovu nejednakost dokazao primenom metoda težišta, slično onome kako je dokazana opštija teorema I. 33, iz koje teorema 35 sleduje kao partikularan slučaj.

Na kraju, navešćemo sledeći rezultat Loewnera i Manna [1], koji su takođe, posmatrali samo slučaj jednakih težina.

Teorema 36. *Neka je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka takva da važi* $0<\alpha\leqq\frac{a_i}{A_n}\leqq\beta<2$ $(1\leqq i\leqq n)$. *Tada je*

$$1<\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n\leqq\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\left[\frac{n(\beta-1)}{\beta-\alpha}\right]}\beta^{-n+1}}{1+\left[\frac{n(\beta-1)}{\beta-\alpha}\right](\beta-\alpha)-(n-1)(\beta-1)},$$

gde $[x]$ *označava najveći celi deo od* x.

Dokaz. Najpre ćemo odrediti apsolutni minimum $f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}(a+x_i)$ uz ograničenja $-a\leqq-p\leqq x_i\leqq q$ $(1\leqq i\leqq n)$, $\sum_{i=1}^{n}x_i=c$ $(-np\leqq c\leqq nq)$. Ako je $n=2$, minimum je ili u $(-p,\,c+p)$ ako je $c+p\leqq q$ ili u $(q,\,c-q)$ ako je $c-q\geqq-p$. U oba slučaja najviše jedan od x_1, x_2 je različit od $-p$ ili q. Indukcijom ćemo dokazati da je ovo tačno i u opštem slučaju. Prirodno minimum se dobija na granici i stoga je jedan od x_i, recimo x_n, jednak $-p$ ili q; pretpostavimo da je $x_n=q$. Međutim, tada moramo naći tačku u kojoj $\prod_{i=1}^{n-1}(a+x_i)$ ima minimum uz ograničenja $-p\leqq x_i\leqq q$ $(1\leqq i\leqq n-1)$, $\sum_{i=1}^{n-1}x_i=c-p$ $\big(-(n-1)p\leqq c-q\leqq(n-1)q\big)$. Poslednji uslov je očigledan jer je $x_i=q$ i $-np\leqq c\leqq nq$. Na osnovu ovog neposredno se, primenom indukcije, dokazuje navedeni rezultat.

Primenimo sada ovo na slučaj kada je $a=A_n$, $x_i=a_i-A_n$ (tada je $c=0$). Na osnovu izloženog A_n-G_n je minimizirano ako je među x_i njih najmanje $n-1$ jednako $-pA_n$ ili qA_n. Stavljajući $A_n=1$ zbog jednostavnosti,

$$x_1=\cdots=x_r=-p,\quad x_{r+1}=\cdots=x_{r+s}=q\quad(r+s=n-1),$$

dobijamo $-p\leqq x_n=rp-sq\leqq q$, pa je stoga $r+1>\frac{nq}{p+q}$, $r<\frac{nq}{p+q}$.

Mogućna su dva slučaja: (i) $\frac{np}{p+q}$ nije ceo broj; tada je $r=\left[\frac{nq}{p+q}\right]$ ili (ii) $\frac{np}{p+q}$ jeste ceo broj; tada je ili $r=\frac{nq}{p+q}$ ili $r+1=\frac{nq}{p+q}$. U poslednjem slučaju $s=\frac{np}{p+q}$ i $x_n=-p$, pa stoga treba uzeti $r=\frac{nq}{p+q}$. U oba slučaja dobijamo $r=\left[\frac{nq}{p+q}\right]$, $s=(n-1)-\left[\frac{nq}{p+q}\right]$, $x_n=(p+q)\left[\frac{nq}{p+q}\right]-nq+q$. Stavljajući $\alpha=1-p$, $\beta=1+q$, posle jednostavnih transformacija, dobijamo tvrđenje teoreme.

5. RAZLIČITI REZULTATI

U ovom odeljku date su različite osobine elementarnih sredina koje su definisane u ovom II poglavlju. One nisu povezane jedna s drugom ili, uopšte, nisu vezane sa nejednakostima ranije datim.

5.1. Aumannov rezultat. Prvo ćemo dokazati da se aritmetička sredina reda n može induktivno izvesti iz sredine nižeg reda. Aumann ([1], [2]) je ovo široko koristio u svojim važnim istraživanjima o aksiomatici sredina.

Teorema 37. *Neka je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka; definišimo* $\boldsymbol{a}^{(1)}$ *kao n-torku svih mogućnih aritmetičkih sredina sa jednakim težinama od po* $n-1$ *elemenata od* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{a}^{(r)}$ $(r>1)$ *kao n-torku svih mogućnih aritmetičkih sredina od po* $n-1$ *elemenata od* $\boldsymbol{a}^{(r-1)}$. *Tada je* $\lim\limits_{r\to+\infty} a_i^{(r)}=A_n(\boldsymbol{a})$ $(1\leqq i\leqq n)$.

Dokaz. Jednostavnosti radi, možemo pretpostaviti da je $\boldsymbol{a}^{(r)}$ neopadajuće. Rezultat se direktno dobija primenom sledećih identiteta

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(r)}=\sum_{i=1}^{n} a_i^{(r-1)}=\sum_{i=1}^{n} a_i \quad (r\geqq 2), \qquad a_n^{(r)}-a_1^{(r)}=\frac{a_n^{(r-1)}-a_1^{(r-1)}}{n-1} \quad (r\geqq 2).$$

PRIMEDBA: 1° Ovaj rezultat je generalisao Kritikos [2].

5.2. Ozekiev rezultat i njegove generalizacije. Ako je dat pozitivan niz $\boldsymbol{a}$, tada sukcesivne aritmetičke sredine elemenata niza $\boldsymbol{a}$ definišu jedan nov niz A, tj. ako je $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots)$, tada je

$$A=\left(a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \ldots\right)=(A_1, A_2, \ldots).$$

Prirodno je postaviti pitanje koje osobine niza $\boldsymbol{a}$ ostaju i za niz A. U više slučajeva odgovor je direktan. Tako, na primer,

1° ako je $m\leqq a_i\leqq M$, tada je, na osnovu (2), $m\leqq A_i\leqq M$;

2° ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, tada, na osnovu poznatog Cauchyevog rezultata, imamo $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=a$;

3° Ako je $\boldsymbol{a}$ rastući niz, isti je slučaj i sa A.

Poslednji rezultat je generalisan u sledećoj teoremi:

Teorema 38. *Neka je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivan niz i* A *niz aritmetičkih sredina* $(A_1(\boldsymbol{a}), A_2(\boldsymbol{a}), \ldots)$, *tada*

(a) *ako je* $\boldsymbol{a}$ *k-konveksan* $(k\geqq 0)$, A *je takođe k-konveksan*;

(b) *ako je* $\boldsymbol{a}$ *ograničene k-te varijacije, isti je slučaj i sa* A.

Dokaz. (a) Kako je $\boldsymbol{a}$ k-konveksan, imamo $\Delta^k a_n\geqq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Stoga je $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(i+k-2)!}{(i-2)!}\Delta^k a_i\geqq 0$, što je, u stvari, $\frac{(n+k)!}{(n-1)!}\Delta^k A_n\geqq 0$, odakle sleduje rezultat pod (a).

(b) Kako je $\boldsymbol{a}$ ograničene k-te varijacije, na osnovu teoreme 1 je $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, gde su $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ ograničeni i k-konveksni. Iz (a) imamo da ako su $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ nizovi aritmetičkih sredina od $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ respektivno, tada su $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ ograničeni i k-konveksni.

PRIMEDBE: 1° Ako je $k=1$, teorema 38 (a) kazuje da je A rastući niz ako je to slučaj sa $\boldsymbol{a}$, što se lako dokazuje direktno.

2° Slučaj $k=2$ teoreme 38 (a) dobio je Ozeki [1]. Opšti rezultat dokazali su Vasić, Kečkić, Lacković i Mitrović [1]. Oni su takođe uopštili slučaj $k=2$ na težinske sredine, nalazeći potrebe i dovoljne uslove pod kojima rezultat važi. Za dalje generalizacije videti Lacković i Simić [1].

Poglavlje III:

Potencijalne sredine

Postoji više generalizacija pojma aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine, koje smo posmatrali u prethodnom poglavlju. Ovde ćemo posmatrati potencijalne sredine.

1. DEFINICIJA I OSNOVNE OSOBINE

Definicija 1. *Neka su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *dve pozitivne n-torke i* $-\infty \leqq r \leqq +\infty$. *Sredina reda r niza* $\boldsymbol{a}$ *sa težinama* $\boldsymbol{p}$ *definisana je pomoću*

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) &= \frac{1}{P_n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_n{}^r p_n\right)^{1/r} \qquad (r \neq 0,\ +\infty,\ -\infty),\\
&= G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \qquad (r=0),\\
&= \max(\boldsymbol{a}) \qquad (r=+\infty),\\
&= \min(\boldsymbol{a}) \qquad (r=-\infty).
\end{aligned}
$$

Kao i u prethodnom paragrafu, ukoliko nema dvoumljenja, ukratko ćemo pisati $M_n^{[r]}$; uopšte, $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a})$ označava sredinu reda r niza $\boldsymbol{a}$ sa jednakim težinama. Ako je $\mathbf{I}$ konačan podskup od $\mathbf{N}$, oznaka $M_{\mathbf{I}}^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$ biće korišćena na način koji je opisan u II. 3.4.1.

Očigledno je $M_n^{[1]} = A_n$, $M_n^{[-1]} = H_n$, kao i $M_n^{[0]} = G_n$. Potencijalna sredina reda r je prirodno proširenje elementarnih sredina (videti primedbu II. 1.1.5°). Da je definicija za ekstremne vrednosti od $r\,(=0,\ \pm\infty)$ opravdana, sleduje iz sledeće teoreme:

Teorema 2.

(a) $\displaystyle\lim_{r\to 0} M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$, (b) $\displaystyle\lim_{r=+\infty} M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = \max(\boldsymbol{a})$,

(c) $\displaystyle\lim_{r\to-\infty} M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = \min(\boldsymbol{a})$.

Dokaz. (a) ***Dokaz* 1.** Ako je $r \neq 0$, $\pm\infty$, da bismo uprostili rezonovanja pretpostavimo da je $P_n = 1$. Tada je

$$(2)\qquad \log M_n^{[r]} = \frac{1}{r}\log\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r p_i\right) = \frac{1}{r}\log\left(1 + r\sum_{i=1}^{n} p_i \log a_i + O(r^2)\right).$$

***Dokaz* 2.** Prema 1.51 (d) je $a_i^r = 1 + b_i$, gde je $b_i = O(r)$ kada $r \to 0$. Koristeći 1 (4) takođe imamo $a_i^{p_i r} = (1 + b_i)^{p_i} = 1 + p_i b_i + O(r^2)$ kada $r \to 0$. Prema tome, ako pretpostavimo da je $P_n = 1$, imamo

$$\frac{G_n}{M_n^{[r]}} = \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} (a + b_i)^{p_i}}{\sum_{i=1}^{n} p_i (1 + b_i)} \right)^{1/r} = \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^{n} p_i b_i + O(r^2)}{1 + \sum_{i=1}^{n} p_i b_i} \right)^{1/r} = \left(1 + O(r^2)\right)^{1/r},$$

odakle (a) neposredno sleduje.

(b) Ako pretpostavimo da je $a_n = \max(\boldsymbol{a})$, imamo

$$\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{1/r} a_n \leqq M_n^{[r]} \leqq a_n,$$

odakle sleduje (b).

(c) se može dokazati na sličan način.

PRIMEDBA: 1° O drugim dokazima teoreme 2 videti: Baidaff i Barral [1], Paasche [1].

Neke jednostavne osobine potencijalnih sredina date su u sledećoj teoremi.

Teorema 3. *Ako je* $r \neq -\infty, +\infty$ *i* $s \neq 0, -\infty, +\infty$, *sredina reda r ima sledeća svojstva:*

(a) $$\min(\boldsymbol{a}) \leqq M_n^{[r]} \leqq \max(\boldsymbol{a}),$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

(b) *homogenost, tj. ako je* $\lambda > 0$, *tada* $M_n^{[r]}(\lambda\, \boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = \lambda M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$;

(c) *neprekidnost, tj. ako je* $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, *tada je*

$$\lim_{h \to 0} M_n^{[r]}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}; \boldsymbol{p}) = M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p});$$

(d) *monotonost, tj. ako je* $\boldsymbol{a} \leqq \boldsymbol{b}$, *tada je* $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \leqq M_n^{[r]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})$;

(e) *asocijativnost, tj. za* $m < n$, *važi* $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = M_n^{[r]}(\vec{\alpha}; \boldsymbol{p})$, *gde je*

$$\vec{\alpha} = (\underbrace{M, \ldots, M}_{m}, a_{m+1}, \ldots, a_n) \text{ kao i}$$

$$M = M_m^{[r]}(\boldsymbol{M}; \boldsymbol{p}) = M_m^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \text{ sa } \boldsymbol{M} = (\underbrace{M, \ldots, M}_{m});$$

(f) *za* $m = n + k \ (k > 0)$ *važi* $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = M_{n+k}^{[r]}(\vec{\beta}; \boldsymbol{p})$, *gde je*

$$\vec{\beta} = (a_1, \ldots, a_n, M, \ldots, M) \text{ i } M = M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p});$$

(g) $$M_n^{[rs]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s = M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}^s; \boldsymbol{p}).$$

Dokaz. Osobine (a)—(d) i (g) su očigledne.

(e) Za $r=0$ ovo je teorema II 2. Pretpostavimo da je $r\neq 0$. Tada je

$$M_n^{[r]}(\vec{\alpha};\, p)=\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i M^r+\sum_{i=m+1}^{n} a_i^r}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{m} p_i a_i^r}{\sum_{i=1}^{m} p_i}\sum_{i=1}^{m} p_i+\sum_{i=m+1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{r}}}=M_n^{[r]}(a;\, p).$$

Slično se dokazuje tvrđenje (f).

2. ZBIR POTENCIJA

2.1. Hölderova nejednakost. Sledeća teorema je osnovna za sva naša ispitivanja koja zu povezana sa potencijalnim sredinama i ima mnogo brojne druge primene. Osnovna nejednakost (4) naziva se Hölderova nejednakost i nju ćemo označavati sa H: njoj konverznu nejednakost obeležavaćemo sa $\overline{H}$.

Teorema 4. *Neka su* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *dve pozitivne n-torke i* p, q *dva broja različita od nule takva da je*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{3}$$

Tada:

(a) *ako su* p, q *pozitivni, imamo*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}, \tag{4}$$

(b) *ako je* p *ili* q *negativan broj, tada važi suprotna nejednakost.*

U oba slučaja (a) *i* (b) *jednakost važi ako i samo ako su* $\boldsymbol{a}^p$ *i* $\boldsymbol{b}^q$ *proporcionalni.*

Dokaz. (a) **1.** Nejednakost (4) može se predstaviti u obliku

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^{k} a_i^p}\right)^{1/p}\left(\frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right)^{1/q}\leqq 1.$$

Na osnovu GA leva strana ove nejednakosti nije veća od

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

čime je završen dokaz nejednakosti (4). Slučaj jednakosti sleduje direktno iz slučaja jednakosti u GA.

2. Primetimo najpre da je dovoljno dokazati da važi

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geqq ab \tag{5}$$

ako je $a, b>0$.

Ako (5) važi, uvodeći smene

$$a=\frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}},\quad b=\frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}}\quad (1\leqq i\leqq n)$$

i sumirajući po i, dobijamo (4).

Postoji više dokaza nejednakosti (5) koji su od interesa.

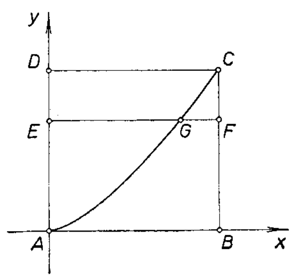
(i) (5) je neposredna posledica nejednakosti GA.

(ii) Stavimo $x=a^{1/q}b^{1/p}$ i posmatrajmo funkciju t definisanu sa

$$t(x)=\frac{1}{ab}\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)=\frac{x^p}{p}+\frac{x^{-q}}{q}.$$

Diferenciranjem nalazimo da t ima za $x\geqq 0$ jedinstveni minimum u $x=1$. Odatle, kako je $t(1)=1$, dobijamo (5).

(iii) Na kraju možemo uopštiti postupak primenjen u lemi II. 8 dokaz 6. Pretpostavimo da su AB i AD koordinatne ose (slika 5) i da je AGC grafik



Sl. 5.

funkcije $f(x)=x^\alpha$. Tada, kao u lemi II. 8, ako je $AB=a$, $AE=b$, važi

$$\text{area}\, ABFE=\text{area}\, AGE+\text{area}\, ABFG\leqq \text{area}\, AGE+\text{area}\, ABC,$$

odakle, posle jednostavnih izračunavanja, imamo

$$ab\leqq\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\alpha+1}\,b^{1+1/\alpha}.$$

Stavljajući u ovoj nejednakosti $p=\alpha+1$ i $q=1+\dfrac{1}{\alpha}$, dobijamo (5).

U svim navedenim dokazima bez teškoća utvrđujemo slučaj kada važi jednakost.

(b) Pretpostavimo da je $p<0$ i stavimo $P=-p/q$, $Q=1/q$. Tada su $P>0$ i $Q>0$ i zadovoljavaju (3). Neka je sada $\vec{\alpha}=a^{-q}$ i $\vec{\beta}=a^q b^q$. Tada, na osnovu H, važi

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k{}^P\right)^{1/P} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k{}^Q\right)^{1/Q},$$

što je, u stvari, suprotna nejednakost od (4).

Posledica 5. *Neka je $r_i>0\,(i=1, \ldots, n)$, $\rho_n=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}$ i pretpostavimo da je $a_{ij}>0$ $(i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m)$. Tada je*

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^{1/\rho_n} \leqq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}{}^{r_i}\right)^{1/(r_i \rho_n)} \tag{6}$$

sa jednakošću ako i samo ako su nizovi $(a_{11}{}^{r_1}, \ldots, a_{1m}{}^{r_1}), \ldots, (a_{n1}{}^{r_n}, \ldots, a_{nm}{}^{r_n})$ proporcionalni.

***Dokaz* 1.** Dokaz 1 nejednakosti H može se lako proširiti na ovaj opštiji slučaj.

***Dokaz* 2.** Indukcijom može se dokazati (6), pa prema tome i nejednakost H. Slučaj $n=2$ od H je

$$a_1 b_1 + a_2 b_3 \leqq (a_1{}^p + a_2{}^p)^{1/p} (b_1{}^q + b_2{}^q)^{1/q}, \tag{7}$$

što se može dokazati jednim od metoda kojim je dokazana nejednakost H. Možemo postupiti na jedan od sledećih načina:

(i) Pretpostavimo da je H dokazano za sve prirodne brojeve manje od n; tada, na osnovu ove hipoteze, i primenjujući (7), imamo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} + a_n b_n \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(ii) Ovim je dokazano H i (6) za proizvoljno m i $n=2$. Pretpostavimo sada da je (6) tačno za svako m i $n<k$; tada je

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{k} a_{ij}\right)^{\frac{1}{\rho_k}} = \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{ij}\right)^{\frac{1}{\rho_k}} a_{kj} \leqq \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{ij}\right)^{\frac{1}{\rho_{k-1}}} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{kj}{}^{r_k}\right)^{\frac{1}{r_k \rho_{k-1}}}$$

na osnovu slučaja $n=2$ nejednakosti (6). Rezultat (6) sada sleduje iz induktivne hipoteze.

Ili: Da bismo dobili (6), može se promeniti red induktivnog zaključivanja na sledeći način: nejednakost (7) daje (6) u slučaju $m=n=2$; fiksirajući $m=2$, pretpostavimo da je nejednakost dokazana za sve prirodne brojeve manje od n; tada nejednakost

$$\prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i \leqq \prod_{i=1}^{n} (a_i^{r_i} + b_i^{r_i})^{1/r_i}, \tag{8}$$

gde je $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}=1$, može da se dokaže kao u (ii); preostaje još da se dovrši induktivni dokaz kao i da se izvede zaključak kada važi jednakost.

PRIMEDBE: 1° Nejednakost (8) je od interesa i sama po sebi.

2° Ekstremna generalnost nejednakosti H dovodi do mnogih nejednakosti koje se pojavljuju kao partikularni slučajevi u oblicima koje je jedva moguće prepoznati, kao što ilustruju sledeće dve primedbe (takođe videti primedbu 2.4.7°).

3° Ako je $0<s<1$, nejednakost H je ekvivalentna sa

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^s b_i^{1-s} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^s \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1-s}. \tag{9}$$

4° Ako uvedemo smene $p=\dfrac{r-t}{r-s}$, $q=\dfrac{r-t}{s-t}$ $(r>s>t>0)$, $a^p=px^t$, $b^q=px^r$ iz H dobijamo nejednakost

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^s\right)^{r-t} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^t\right)^{r-s} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^r\right)^{s-t},$$

koja je poznata kao Ljapunovljeva nejednakost (Liapunoff [1] i Giaccardi [1]).

5° Jedan posebno koristan način predstavljanja teoreme 4 je sledeći: Ako su p i q pozitivni brojevi i zadovoljavaju (3), tada

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} = \sup_{b\in B} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

gde je $B=\left\{b \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} b_i^q=1\right\}$; supremum je dostignut ako i samo ako su a^p i b^q proporcionalni Ovo je osnova metoda dokaza koji se naziva kvazilinearizacija (BB, p. 23).

6° Dokaz H može se naći na više mesta (videti: Hölder [1], Rogers [1], i standardne knjige HLP, BB i M).

Lema 6. *Ako je* $0<r<s$, *tada je*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{1/s} < \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r}. \tag{10}$$

Dokaz. Bez smanjivanja opštosti možemo pretpostaviti da je $\sum_{i=1}^{n} a_i^s=1$. Tada je $a_i \leqq 1$ $(1\leqq i\leqq n)$. Stoga, ako je $0<r<s$, imamo $a_i^s \leqq a_i^r$ i svi a_i^s i a_i^r nisu jednaki, što implicira (10).

PRIMEDBE: 7° Kako je $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r} = n^{1/r} M_n^{[r]}(a)$, na osnovu teoreme 2 (c) imamo

$$\lim_{r\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r} = \max(a).$$

8° Dalje, koristeći oznake iz 1.5.1 (d), imamo da je $\sum_{i=1}^{n} a_i^r = n+o(1)$ i stoga

$$\lim_{r\to 0+} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r} = +\infty.$$

9° Ako stavimo $S(r)=\sum_{i=1}^{n} a_i^r$, za fiksno a, $r>0$, lema 6 i prethodne primedbe daju neke jednostavne osobine funkcije S. Nejednakost H može se primeniti za dobijanje nekih komplikovanijih osobina funkcije S.

Posledica 7. *S je logaritamski konveksna funkcija.*

Dokaz. Ako je $0<r<s$ i $0<\lambda<1$, tada je, na osnovu (9),

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{r+(1-\lambda)s} = \sum_{i=1}^{n} (a_i^r)^\lambda \sum_{i=1}^{n} (a_i^s)^{1-\lambda} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{1-\lambda},$$

što je, u stvari,

$$S(\lambda r+(1-\lambda)s) \leqq S(r)^\lambda S(s)^{1-\lambda}. \tag{11}$$

PRIMEDBE: 10° Jednostavnom indukcijom nejednakost (11) može da se proširi na sledeći način:

$$S(A_n(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{q})) \leqq G_n(S(\boldsymbol{r}); \boldsymbol{q}) \qquad (Q_n=1). \tag{12}$$

Primenjujući na levu stranu nejednakosti (12) nejednakost *GA*, neposredno se dobija da logaritamska konveksnost *S* povlači običnu konveksnost.

11° U vezi sa (11) Ursell [1] je učinio sledeću interesantnu primedbu: Posmatrajmo ovu nejednakost uporedo sa nejednakošću koja se dobija iz (11) za $r=0$ i $(1-\lambda)s=p$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \leqq n^{(s-p)/sp} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{1/s}. \tag{13}$$

(11) i (13) su najbolje mogućne nejednakosti u smislu da se za dato n, r, s, λ, p konstante 1 i $n^{(s-p)/sp}$ ne mogu poboljšati. Međutim, (13) je najbolje mogućno i u jednom strožem smislu: za dato n, s, p i vrednost za $\sum_{i=1}^{n} a_i^s$ mogućni skup vrednosti $\sum_{i=1}^{n} a_i^p$ je dat baš sa (13). To nije slučaj sa (11), kao što se može videti iz sledećeg: Jednakost u (11) važi ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$ i ako između $\sum_{i=1}^{n} a_i^r$ i $\sum_{i=1}^{n} a_i^s$ postoji posebna veza, naime ako su jednaki. Stoga, ako damo određene vrednosti za n, r, s, λ i odgovarajuće vrednosti za $\sum_{i=1}^{n} a_i^r$ i $\sum_{i=1}^{n} a_i^s$, nejednakost (11) ne može, u opštem slučaju, da opiše tačno skup vrednosti za $\sum_{i=1}^{n} a_i^{\lambda r+(1-\lambda)s}$. Dalje, dajući pored toga vrednost $\sum_{i=1}^{n} a_i^p$ za neko p, interval u kome varira poslednja suma još se više precizira. Određivanje tačnih granica sume na levoj strani (11), ako su date sume na desnoj strani, potpuno je rešeno u pomenutom Ursellovom članku.

(11) može da se proširi i na sledeći način: Ako je $Q_n=1$, tada je

$$S(H_n(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{q})) \leqq G_n(S(\boldsymbol{r}); \boldsymbol{q}), \tag{14}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $r_1=\cdots=r_n$ ili $a_1=\cdots=a_n$.

Zaista, uvodeći oznaku $H=H_n(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{q})$, leva strana nejednakosti (14) postaje

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^H = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} a_i^{q_j}\right)^H \leqq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{q_j H})^{r_j/(q_j H)}\right)^{q_j H/r_j}.$$

Kako je $\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j H}{r_j} = \frac{H}{H} = 1$, dobijamo (14). Slučaj kada važi jednakost lako se izvodi.

12° Posmatrajući drugi slučaj jednakosti, na osnovu (10) zaključujemo da je (14) najbolje mogućno u smislu da se $H_n(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{q})$ ne može zameniti manjim brojem.

13° Nejednakost (14) dokazali su McLaughlin i Metcalf [4]. Oni su takođe primetili da je nejednakost (14) najbolja mogućna u drugom smislu od onog u primedbi 12°: desna strana u (14) ne može se zameniti nekom funkcijom od $S(r_1), \ldots, S(r_n)$ koja je manja ili jednaka geometrijskoj sredini, ali koja sama nije geometrijska sredina.

Lema 16 može se iskoristiti da se dobije sledeće proširenje nejednakosti ***H***:

Posledica 9. *Ako je* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$ *i* $p, q>0$, *tada je*

$$(15)\qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i<\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Dokaz. Stavimo $\frac{1}{p}=\frac{\lambda}{p'}$, $\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{q'}=1$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$, $\lambda<1$; tada je

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\leqq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p'}\right)^{1/p'}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{q'}\right)^{1/q'} \qquad \text{(na osnovu } \boldsymbol{H}\text{)}$$

$$<\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} \qquad \text{(na osnovu leme 6).}$$

PRIMEDBA: 14° Posledica 9 i nejednakost ***H*** mogu se dalje uopštiti na sledeći način: Ako je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqq\frac{1}{r}$ i $p, q, r>0$, tada je

$$(16)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^r\right)^{1/r}\leqq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ i ako je $\boldsymbol{a}^p$ proporcionalno sa $\boldsymbol{b}^q$.

Osobine funkcije $r\mapsto S(r)$ za $r<0$ nećemo ovde proučavati.

2.2. Cauchyeva nejednakost. Ako je $p=q=2$, nejednakost ***H*** se svodi na nejednakost koja je poznata kao Cauchyeva nejednakost (ili kao Cauchy-Schwarzova ili kao Cauchy-Schwarz-Buniakowskyeva nejednakost). Ona je od posebnog značaja i stoga ćemo je posebno formulisati. Ovu nejednakost zvaćemo nejednakost ***C*** ili kraće ***C***.

Teorema 10. *Ako su* ***a*** *i* ***b*** *dve pozitivne n-torke, tada je*

$$(17)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2\leqq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

sa jednakošću ako i samo ako su ***a*** *i* ***b*** *proporcionalni.*

Dokaz. 1. Nejednakost ***C*** je specijalan slučaj nejednakosti ***H*** i stoga, stavljajući $p=q=2$, svaki dokaz teoreme 4 dovodi do dokaza teoreme 10.

2. Identitet $\sum_{i=1}^{n}(a_i x+b_i)^2=x^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2+2x\sum_{i=1}^{n} a_i b_i+\sum_{i=1}^{n} b_i^2$ direktno dovodi do nejednakosti (17) jer polinom na desnoj strani ovog identiteta nema realnih nula, osim kada su ***a*** i ***b*** proporcionalni.

3. Nejednakost (17) takođe direktno sleduje iz Lagrangeovog identiteta

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i b_j-a_j b_i)^2.$$

4. Nejednakost (17) može se indukcijom dokazati. Slučaj $n=1$ je trivijalan, dok se slučaj $n=2$ neposredno proverava. Pretpostavimo da je (17) tačno za

sve prirodne brojeve manje od n. Definišimo s i t sa: $st = a_1 b_1 + a_2 b_2$ i $s^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2$. Tada, na osnovu slučaja $n=2$, imamo $t^2 \leqq b_1{}^2 + b_2{}^2$, pa je

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(st + \sum_{i=3}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqq \left(st + \left(\sum_{i=3}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=3}^{n} b_i^2\right)^{1/2}\right)^2$$

$$\leqq \left(s_2 + \sum_{i=3}^{n} a_i^2\right)\left(t^2 + \sum_{i=3}^{n} b_i^2\right) \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Ovaj dokaz dao je Eames [1].

Od interesa je primetiti da su nejednakosti $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{H}$ ekvivalentne, tj. da se $\boldsymbol{H}$ može izvesti iz $\boldsymbol{C}$ i obrnuto. U stvari važi:

Teorema 11. *Teorema* 10 *je posledica teoreme* 4 (b). *Posledica* 5, *pa stoga i teorema* 4, *je posledica teoreme* 10.

Dokaz. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je, u posledici 5, $\rho_n = 1$. Dokaz se izvodi u šest koraka.

1) Ako je $n=2$, $r_1 = r_2 = 2$, posledica 5 se svodi na teoremu 10.

2) Neka je $n = 2^\nu$, $r_1 = \cdots = r_{2^\nu} = 2$. Dokaz se izvodi indukcijom po ν. Za $\nu = 1$ ovo je upravo slučaj 1). Pretpostavimo da rezultat važi za $k < \nu$. Tada je

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{2^\nu} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{2^\nu} a_{ij}\right)\left(\prod_{i=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} a_{ij}\right)$$

$$\leqq \left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{2^{\nu-1}} a_{ij}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} a_{ij}^2\right)^{1/2} \quad \text{(prema 1)}$$

$$\leqq \left(\prod_{i=1}^{2^\nu}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{2^\nu}\right)^{1/2^\nu},$$

gde je u poslednjem koraku iskorišćena induktivna pretpostavka.

3) Neka je n prirodan broj i $r_1 = \cdots = r_n = 1/n$. Pretpostavimo da je $2^\nu > n$ i definišimo α_{ij} $(1 \leqq i \leqq 2^\nu,\ 1 \leqq j \leqq m)$ sa

$$\alpha_{ij} = a_{ij}{}^{n/2^\nu} \quad (1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq m), \quad \alpha_{ij} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/2^\nu} \quad (n < i \leqq 2^\nu,\ 1 \leqq j \leqq m).$$

Tada, na osnovu slučaja 2), imamo

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{2^\nu} \alpha_{ij}\right) \leqq \prod_{i=1}^{2^\nu}\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}{}^{2^\nu}\right)^{1/2^\nu} = \left(\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}{}^{n}\right)^{1/n}.$$

4) Neka je n ceo broj i $r_1, \ldots, r_n$ racionalni brojevi. Tada je $r_k = \frac{\nu_k}{\nu}$, gde su $\nu_i\, \nu_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ celi brojevi. Definišimo α_{ij} $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq m)$ kao ranije. Tada primenjujući na α_{ij} slučaj 3), dobijamo traženi rezultat.

5) U opštem slučaju, kada su $r_1, \ldots, r_n$ realni brojevi, izaberimo racionalne brojeve $q_1{}^k, \ldots, q_n{}^k$ $\left(\sum_{i=1}^{n} q_i{}^{-k} = 1\right)$ takve da je $\lim\limits_{k \to +\infty} q_i^k = r_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Ovim je završen dokaz, osim što smo izostavili slučaj jednakosti.

6) Iskoristićemo sada 4) i 5) da bismo kompletirali dokaz. Neka je $\frac{1}{r_k}=q_k+\rho_k$, gde je q_k racionalno i $1\leqq k\leqq n$. Tada, ako je $Q=\sum_{h=1}^{k} q_k$, $R=\sum_{k=1}^{n}\rho_k$, imamo $Q+R=1$.

Na osnovu 5) je

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}^{r_i(q_i+\rho_i)}=\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}^{r_i q_i/Q}\right)^Q\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}^{r_i\rho_i/P}\right)^P$$

$$\leqq\left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_i^{r_i q_i/Q}\right)^Q\left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}^{r_i\rho_i/R}\right)^R.$$

Odavde, primenjujući 4) na prvi činilac i 5) na drugi činilac, vidimo da poslednji izraz ne premašuje

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{r_i}\right)^{q_i}\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{r_i}\right)^{\rho_i}=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{r_i}\right)^{1/r_i}.$$

Međutim, pri primeni 4) imali smo striktnu nejednakost osim kada su nizovi

$$(a_{k1}^{r_k},\ldots,a_{km}^{r_k})\qquad(1\leqq k\leqq n)$$

proporcionalni, pa stoga u opštem slučaju imamo striktnu nejednakost osim u pomenutom slučaju.

2.3. Nejednakost Minkowskog. Veoma važna posledica teoreme 4 je sledeći rezultat:

Teorema 12. *Ako su **a** i **b** dve pozitivne n-torke i $p>1$, tada je*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p}\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p};\tag{18}$$

*ako je $p<1$ $(p\neq 0)$, važi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost nastupa ako i samo ako su **a** i **b** proporcionalni.*

***Dokaz* 1.** Pođimo od identiteta

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1}.\tag{i}$$

Primetimo da ako je q dato sa (3), $q=\frac{p}{p-1}$, i ako je $p>1$, tada ***H*** implicira

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{(p-1)/p}$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{(p-1)/p},$$

odakle (18) neposredno sleduje. Na osnovu teoreme 4 slučaj kada nastupa jednakost neposredno se dobija.

Ako je $p<1$, q postaje negativno, i rezultat se dobija na isti način primenom teoreme 4(b).

Dokaz **2.** Sada ćemo dokazati (18) primenom kvazilinearizacije (videti primedbu 2.1.5°). Posmatraćemo samo slučaj $p>1$. Za slučaj $p<1$ može se postupiti na sličan način (videti BB, p. 26). Na osnovu H imamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p}=\max_{c\in L}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\,c_i,\quad \text{gde je } L=\left\{c\;\middle|\;\sum_{i=1}^{n}c_i^q=1\right\}.$$

Odavde sleduje

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p}\leqq \max_{L}\sum_{i=1}^{n}a_ic_i+\max_{L}\sum_{i=1}^{n}b_ic_i\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}.$$

PRIMEDBE: 1° Nejednakost (18) je poznata kao nejednakost Minkowskog; nazivaćemo je skraćeno nejednakost M, ili samo M.

2° Jedna važna primena nejednakosti M je u dokazu nejednakosti

$$\text{(19)}\qquad \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p}\leqq\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-z_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k-y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Leva strana ove nejednakosti može se majorirati sa

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|(x_k-z_k)+(z_k-y_k)|^p\right)^{1/p}\leqq\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k-z_k|+|z_k-y_k|)^p\right)^{1/p},$$

odakle, na osnovu M, sleduje (19). Nejednakost (19), koja je poznata kao nejednakost trougla, bitna je u dokazu da je $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$ norma u prostoru n-torki $x=(x_1,\dots,x_n)$.

Nejednakost M može se uopštiti na analogan način kao H u posledici 5. Dokaz je takođe analogan.

Posledica 12. *Ako je* $a_{ij}>0$ $(1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq m)$ *i* $p>1$, *tada je*

$$\text{(20)}\qquad \left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^p\right)\right)^{1/p}\leqq\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^p\right)^{1/p}$$

sa jednakošću ako i samo ako su nizovi $(a_{11},\dots,a_{1m}),\dots,(a_{n1},\dots,a_{nm})$ *proporcionalni.*

PRIMEDBA: 3° Isto kao i nejednakost H, nejednakost M ili (20) mogu se dokazati indukcijom. Poći ćemo od najjednostavnijeg slučaja

$$((a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p)^{1/p}\leqq(a_1^p+a_2^p)^{1/p}+(b_1^p+b_2^p)^{1/p},$$

što je, u stvari, nejednakost (20) za $m=n=2$. Ova nejednakost može se dobiti iz (7) isto kao što se M može izvesti iz H. Tada, kao u induktivnom dokazu nejednakosti H, možemo da fiksiramo $n=2$ i damo induktivan dokaz (20) za svako m i, posle toga, induktivan dokaz za svako n ili možemo promeniti redosled (videti: HLP, p. 38).

3.4. Rafiniranje Hölderove nejednakosti i nejednakosti Minkowskog. Nejednakosti H i M bile su predmet mnogih istraživanja u cilju njihovih rafiniranja. Neki od tih rezultata biće ovde navedeni.

3.4.1. (1) Najjednostavniji dokaz nejednakosti H ili posledice 5 zasniva se na GA, pa je prirodno da se postavi pitanje da li se primenom Radoove nejednakosti može rafinirati nejednakost H (videti: Bullen [15]).

Teorema 13. *Ako pod pretpostavkama posledice 5 stavimo*

$$H_n(a)=\sum_{j=1}^{m}\Big(\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\Big)^{1/\rho_n}\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{r_i}\Big)^{-1/(r_i\rho_n)},$$

tada, za $n>2$, *imamo*

$$(21)\qquad \rho_n H_n(a)\leqq \rho_{n-1}H_{n-1}(a)+\frac{1}{r_n},$$

sa jednakošću ako i samo ako za $j=1,\ldots,m$ *važi*

$$\frac{a_{nj}}{\sum_{j=1}^{n}a_{nj}^{r_n}}=\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{a_{ij}}{\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{r_i}\Big)^{1/r_i}}\right)^{1/\rho_{n-1}}.$$

Dokaz. Na osnovu nejednakosti (II. 38) imamo

$$\rho_n\left(\frac{1}{\rho_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{r_i}-\Big(\prod_{i=1}^{n}b_i^{1/r_i}\Big)^{1/\rho_n}\right)\geqq\rho_{n-1}\left(\frac{1}{\rho_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{r_i}-\Big(\prod_{i=1}^{n-1}b_i^{1/r_i}\Big)^{1/\rho_{n-1}}\right).$$

Stavimo u ovoj nejednakosti

$$(22)\qquad b_i=a_{ij}^{r_i}\Big/\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{r_i}\qquad (j=1,\ldots,m),$$

i sumirajmo po j tako dobijene nejednakosti. Tako nalazimo

$$\rho_n\big(1-H_n(a)\big)\geqq\rho_{n-1}\big(1-H_{n-1}(a)\big),$$

što je, očigledno, ekvivalentno sa (21). Slučaj jednakosti sleduje iz slučaja kada nastupa jednakost u teoremi II. 8.

PRIMEDBE: 1° Ako je $n=2$, nejednakost (21) postaje $H_2(a)\leqq 1$, što je baš H.
2° Uzastopna primena (21) daje

$$\rho_n H_n(a)\leqq\rho_{n-1}H_{n-1}(a)+\frac{1}{r_n}\leqq\cdots\leqq\rho_1 H_1(a)+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{r_n}=\rho_n,$$

što je, u stvari, (6).
3° Zaustavljajući se, u prethodnoj primedbi, jedan korak ranije, i preuređujući a_{jk} uporedo sa sličnim preuređivanjem r_i, dobijamo

$$H_n(a)\leqq\frac{1}{\rho_n}\inf_{1\leqq i,k\leqq n}\frac{r_i+r_k}{r_ir_k}\;\frac{\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}a_{kj})^{r_ir_k/(r_i+r_k)}}{\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{r_i}\Big)^{r_k/(r_i+r_k)}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{kj}^{r_k}\Big)^{r_k/(r_i+r_k)}}.$$

(2) Sledeći Everittovu ideju (videti II. 3.4.), pod uslovom da $\mathbf{I}\subset\mathbf{N}$, $\mathbf{I}\neq\emptyset$ definišimo skupovne funkcije

$$\chi(\mathbf{I})=\big(\sum_{i\in\mathbf{I}}a_i^p\big)^{1/p}\big(\sum_{i\in\mathbf{I}}b_i^q\big)^{1/q}-\sum_{i\in\mathbf{I}}a_ib_i,$$

$$\mu(\mathbf{I})=\Big(\big(\sum_{i\in\mathbf{I}}a_i^p\big)^{1/p}+\big(\sum_{i\in\mathbf{I}}b_i^p\big)^{1/p}\Big)^p-\sum_{i\in\mathbf{I}}(a_i+b_i)^p.$$

Tada nejednakosti $\boldsymbol{H}$ i $\boldsymbol{M}$ pokazuju sledeće: Ako je $p>0$, $q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tada su χ i μ nenegativni. U stvari ove funkcije su nenegativne, rastuće i superaditivne kao što sledeća preciznija teorema kazuje (Everitt [1], McLaughlin—Metcalf [1], [3]):

Teorema 14. (a) *Ako je* $p, q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\mathbf{I}\subset\mathbf{N}$, $\mathbf{J}\subset\mathbf{N}$, $\mathbf{I}\cap\mathbf{J}=\emptyset$, $\mathbf{J}\neq\emptyset$, $\mathbf{I}\neq\emptyset$, *tada važi* $\chi(\mathbf{I})+\chi(\mathbf{J})\leqq\chi(\mathbf{I}\cup\mathbf{J})$, *sa jednakošću ako i samo ako su* $\left(\sum_{i\in\mathbf{I}} a_i^p, \sum_{i\in\mathbf{J}} b_i^p\right)$ *i* $\left(\sum_{i\in\mathbf{I}} b_i^q, \sum_{i\in\mathbf{J}} b_i^q\right)$ *proporcionalni.*

(b) *Ako je* $p>1$ *(ili* <0*), tada, za* $\mathbf{I}$ *i* $\mathbf{J}$ *kao u* (a), *važi* $\mu(\mathbf{I})+\mu(\mathbf{J})\leqq\mu(\mathbf{I}\cup\mathbf{J})$ *sa jednakošću ako i samo ako su* $\left(\sum_{i\in\mathbf{I}} a_i^p, \sum_{i\in\mathbf{I}} b_i^p\right)$ *i* $\left(\sum_{i\in\mathbf{J}} a_i^p, \sum_{i\in\mathbf{J}} b_i^p\right)$ *proporcionalni.*

Dokaz. (a) Važi nejednakost

$$a_1^{1/p}b_1^{1/q}+a_2^{1/p}b_2^{1/q}\leqq(a_1+a_2)^{1/p}(b_1+b_2)^{1/q}$$

sa jednakošću ako i samo ako su (a_1, a_2) i (b_1, b_2) proporcionalni.

Ako je $a_1=\sum_{i\in\mathbf{I}} a_i^p$, $a_2=\sum_{i\in\mathbf{J}} a_i^p$, $b_1=\sum_{i\in\mathbf{I}} b_i^q$, $b_2=\sum_{i\in\mathbf{J}} b_i^q$, dobijamo (a).

(b) Na osnovu $\boldsymbol{M}$ je

$$\left((a_1+b_1)^{1/p}+(a_2+b_2)^{1/p}\right)^p\geqq(a_1^{1/p}+a_2^{1/p})^p+(b_1^{1/p}+b_2^{1/p})^p$$

sa jednakošću ako i samo ako su (a_1, a_2) i (b_1, b_2) proporcionalni. Rezultat (b) dobija se smenama $a_1=\sum_{i\in\mathbf{I}} a_i^p$, $a_2=\sum_{i\in\mathbf{I}} b_i^p$, $b_1=\sum_{i\in\mathbf{J}} a_i^p$, $b_2=\sum_{i\in\mathbf{J}} b_i^p$.

PRIMEDBA: 4° Koliko nam je poznato, Everitt je prvi posmatrao zavisnost klasičnih nejednakosti od skupa indeksa. On je dokazao teoremu 14 (a).

5° Everitt je u [1] primetio da skupovna funkcija

$$\left(\sum_{i\in\mathbf{I}} a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i\in\mathbf{I}} b_i^p\right)^{1/p}-\left(\sum_{i\in\mathbf{I}}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p},$$

koja je u vezi sa M, nije monotona. McLaughlin i Metcalf [3] ispitivali su funkciju μ kao i neke količnike koji su u vezi sa M.

(3) Rezultati Kobera [1] i Dianandae [2], o kojima je bilo reči u II. 3.5 takođe se mogu iskoristiti da bi se došlo do poboljšanja nejednakosti $\boldsymbol{H}$ i $\boldsymbol{M}$.

Teorema 15. *Pretpostavimo*:

$$a_{ij}>0\ (i=1,\ldots,n;\ \ j=1,\ldots,m),\ r_i>0\ (i=1,\ldots,n),\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}=1,$$

$$\frac{1}{r}=\min\left(\frac{1}{r_1},\ldots,\frac{1}{r_n}\right),\quad \frac{1}{R}=\max\left(\frac{1}{r_1},\ldots,\frac{1}{r_n}\right),$$

$$K_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{m}\left(\left(\frac{a_{ij}^{r_i}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}}\right)^{1/2}-\left(\frac{a_{ik}^{r_i}}{\sum_{l=1}^{n}a_{ik}}\right)^{1/2}\right)^2,$$

$$D_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{1}{r_i r_k}\left(\left(\frac{a_{ij}^{r_i}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{r_i}}\right)^{1/2}-\left(\frac{a_{ik}^{r_i}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ik}^{r_i}}\right)^{1/2}\right)^2.$$

Tada važe nejednakosti

$$\left(1-\frac{rD_n}{r-1}\right)\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{r_i}\right)^{1/r_i}\geqq\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\right)$$

$$\geqq\max\left(0,\ (1-rD_n)\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{r_i}\right)^{1/r_i}\right),$$

$$\left(1-\frac{k_n}{r(n-1)}\right)\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{r_i}\right)^{1/r_i}\geqq\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\right)$$

$$\geqq\max\left(0,\ \left(1-\frac{K_n}{R}\right)\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{r_i}\right)^{1/r_i}\right).$$

Dokaz. Dokaz je zasnovan na metodu koji je korišćen da bi se dobila posledica 5 i teorema 13. Pri tome, koristimo nejednakosti (II. 59) i (II. 60) primenjene na niz $\boldsymbol{b}$ i primenjujući (22) nastavljamo kao u dokazu posledice 5.

PRIMEDBA: 6° Slučaj jednakosti u teoremi 15 razmatrali su Kober [1] i Diananda [2]. Diananda takođe daje slično poboljšanje nejednakosti $\boldsymbol{M}$.

Primetili smo da je nejednakost $\boldsymbol{C}$ partikularan slučaj nejednakosti $\boldsymbol{H}$. U stvari, iz $\boldsymbol{H}$ se može dobiti mnogo više rezultata.

Teorema 16. *Za dato* $r\,(-\infty<r<+\infty)$ *definišimo* f *pomoću*

$$f(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{r+x}b_i^{r-x}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{r-x}b_i^{r+x}\right).$$

Tada imamo sledeće rezultate:

(a) *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *proporcionalni,* f *je konstanta;*

(b) *Ako* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *nisu proporcionalni, tada je* f *striktno rastuća funkcija za* $x\geqq 0$ *i striktno opadajuća funkcija za* $x\leqq 0$.

Dokaz. (a) je očigledno.

(b) Na osnovu teoreme 4, ako $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$ nisu proporcionalni i ako je $0<s<1$, imamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^s\beta_i^{1-s}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{1-s}\beta_i^s\right)<\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right).$$

Stavljajući $\vec{\alpha}=\boldsymbol{a}^{r+y}\boldsymbol{b}^{r-y}$, $\vec{\beta}=\boldsymbol{a}^{r-y}\boldsymbol{b}^{r+y}$, $s=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{y}\right)$, $|x|<|y|$, imamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{r+x}b_i^{r-x}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{r-x}b_i^{r+x}\right)<\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{r+y}b_i^{r-y}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{r-y}b_i^{r+y}\right).\tag{23}$$

Ovim smo dokazali (b).

PRIMEDBE: 7° Ako je $1 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 2$ ili $0 \leqq \beta \leqq \alpha \leqq 1$, stavljajući $r=1$, $x=\alpha-1$, $y=\beta-1$, iz (21) izlazi

$$(24) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} b_i^{2-\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-\alpha} b_i^{\alpha}\right)$$

$$\leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta} b_i^{2-\beta}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-\beta} b_i^{\beta}\right) \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Ekstremni članovi se dobijaju za $\beta=2$ (ili 0) i $\alpha=1$, što daje niz nejednakosti koje poboljšavaju nejednakost C.

8° Nejednakosti (24) su specijalan slučaj primedbe 2.1.2°.

Ovaj rezultat je prvi dobio Callebaut [1]. U njegovom članku jedan deo ovih nejednakosti dokazan je primenom nejednakosti H, ali je primećeno da se preostale nejednakosti kako, izgleda, ne mogu izvesti iz H. Međutim, jednostavno izvođenje iz teoreme 16 neposredno posle ovoga dali su McLaughlin i Metcalf [2].

9° Daykin i Eliezer [1] dali su opštiji oblik teoreme 16, dokazavši, posebno, da je funkcija koja se tamo pojavljuje konveksna; takođe videti Flor [1].

Sledeću generalizaciju teoreme 16 dobili su Daykin i Eliezer ([2] i [3]).

Teorema 17. *Neka su p, q pozitivni brojevi i stavimo*

$$h(x)=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(p-1)x+1} b_i^{1-x}\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{1-x} b_i^{(q+1)x+1}\right)^{1/q}.$$

Tada:

(a) *Ako je $(1/p)+(1/q)<1$, tada je h konveksna funkcija osim ako je*

$$a_1=\cdots=a_n=1/b_1=\cdots=1/b_n \text{ kada je } h\equiv\text{const.}$$

(b) *Ako je $(1/p)+(1/q)=1$ tada je h konveksna funkcija sa minimumom u $x=0$ osim ako su $\mathbf{a}^p$ i $\mathbf{b}^q$ proporcionalni kada je $h\equiv$*const.

(c) *Ako je $(1/p)+(1/q)$ dovoljno veće od 1, tada je h konkavna funkcija osim ako je $a_1=\cdots=a_n=1/b_1=\cdots=1/b_n$ kada je $h\equiv$*const.

Teorema se dokazuje posmatrajući izvod funkcije h. Ako je $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{2}$, teorema se svodi na teoremu 16 za $r=1$.

(5) Drugo proširenje nejednakosti C dao je Wagner [1]:

Teorema 18. *Ako je $0<x<1$, tada je*

$$(25) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + x \sum_{1\leqq i<j\leqq n} a_i b_j\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x\sum_{i<j} a_i a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2x\sum_{i<j} b_i b_j\right).$$

Dokaz. Ako je $x=0$, ovo je nejednakost C. Sledeći jednostavan dokaz dao je Flor [1]. Stavimo $1-x=y$, gde je $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$. Nejednakost (25) je ekvivalentna sa

$$\left(x\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i + y\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqq \left(x\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + y\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(x\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 + y\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Odavde posle sređivanja dobijamo nejednakost

$$xy\sum_{j=1}^{n}\left(b_j\sum_{i=1}^{n}a_i-a_j\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2+y^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2>0$$

koja je, na osnovu **C**, tačna.

(6) Prvi deo teoreme 4 može se interpretirati na sledeći način:

Za dato $a_1, b_1, \ldots, b_n$ nejednakost **H** važi za svako $a_2, \ldots, a_n$ sa jednakošću ako i samo ako je $a_i^p b_1^q = a_1^p b_i^q$ $(2 \leqq i \leqq n)$. Ovo može da se generališe na sledeći način (Beckenbach [5]):

Teorema 19. *Neka su* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, p, q$ *kao u teoremi* 4; *neka je* $0<m<n$ *i definišimo* $\tilde{\boldsymbol{a}}$ *sa* $\tilde{a}_i = a_i$ $(1\leqq i\leqq m)$, $\tilde{a}_i=\left(\dfrac{b_i\sum_{j=1}^{m}a_j^p}{\sum_{j=1}^{m}a_jb_j}\right)^{q/p}$ $(m+1\leqq i\leqq n)$. *Tada za dato* $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ *važi*

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}}{\sum_{i=n}^{n}a_ib_i}\geqq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i^p\right)^{1/p}}{\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_ib_i}\tag{26}$$

za svako $a_{m+1}, \ldots, a_n$ *sa jednakošću ako i samo ako je* $a=\tilde{a}_i$ $(m+1\leqq i\leqq n)$.

Dokaz. Posmatramo levu stranu nejednakosti (26) kao funkciju f promenljivih $a_{m+1}, \ldots, a_n$. Tada je $f_j'=\dfrac{\partial f}{\partial a_j}=PQ_j$ $(m+1\leqq j\leqq n)$, gde je

$$P(a_{m+1}, \ldots, a_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/(p-1)}\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2,$$

$$Q_j(a_{m+1}, \ldots, a_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)a_j^{p-1}-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)b_j.$$

Kako je $P>0$, izvod f_j' se anulira samo ako je Q_j jednako nuli, što će biti ako i samo ako je

$$\frac{a_j^p}{a_jb_j}=\frac{\sum_{i=1}^{m}a_i^p}{\sum_{i=1}^{m}a_ib_i}\quad(m+1\leqq j\leqq n),$$

tj. ako i samo ako je $a_j=\tilde{a}_j$.

Kako je $\lim_{a_j\to+0}Q_j(x)<0$ i $\lim_{a_j\to+\infty}Q_j(x)=+\infty$, funkcija f ima jedinstveni minimum u tački $(\tilde{a}_{m+1}, \ldots, \tilde{a}_n)$.

PRIMEDBE: 9° Ako je $p<1$ i $p\neq0$, nejednakost (26) je suprotna.
10° Ako je $m=1$, ovaj rezultat se svodi na (4).

(7) Ostrowski [2, p. 289] je dao jedno rafiniranje nejednakosti C koje je sasvim drukčije od navedenih rafiniranja ove nejednakosti:

Teorema 20. *Neka su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *neproporcionalne pozitivne n-torke i* $\boldsymbol{c}$ *jedna n-torka takva da je* $\sum_{i=1}^{n} a_i c_i = 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i c_i = 0$. *Tada važi*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

sa jednakošću ako i samo ako je

$$c_k = \frac{b_k \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_k \sum_{i=1}^{n} b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2} \qquad (1 \leqq k \leqq n).$$

Dokaz ovog rezultata može se naći u M, pp. 66—70, gde su takođe dokazane razne generalizacije koje potiču od Fana i Todda [1]. Videti takođe: Mitrović [1] i Madevski [1].

Beesack [2] je dokazao da se nejednakost Mitrovića, pa prema tome i njen specijalni slučaj, nejednakost Ostrowskog, može dobiti iz sledeće Besselove nejednakosti za neortonormalne vektore:

Neka su $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ $(k > 1)$ linearno nezavisni vektori u Hilbertovom prostoru H i neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dati skalari. Ako $\boldsymbol{x} \in H$ zadovoljava uslov $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i) = \alpha_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$, tada je

$$G(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)^2 \|x\|^2 \geqq \left\| \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^{(k)} \boldsymbol{a}_i \right\|^2,$$

gde je G Gramova determinanta elemenata $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, tj.

$$G = G(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \det(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$$

i gde je $\gamma_i^{(k)}$ determinanta dobijena iz G zamenom elemenata i-te kolone sa $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Jednakost u prethodnoj nejednakosti važi ako i samo ako je

$$Gx = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^{(k)} \boldsymbol{a}_i.$$

U pomenutom Beesackovom članku navedeno je da je Besselova nejednakost u navedenom obliku implicitno sadržana u knjizi Akhiezera i Glazmana [1] (posebno videti pp. 10—13).

Sledeći rezultat dobio je Castellano [1]: Ako je $0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$, $0 < p_1 \leqq q_1, \ldots, 0 < p_m \leqq q_m, \ldots, 0 < q_{m+1} \leqq p_{m+1}, \ldots, 0 < q_n \leqq p_n$ i $P_n = Q_n = 1$, tada je

$$M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) > M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{q}).$$

Dokaz. Ako je $q_i=\varepsilon_i^2+p_i$ $(i=1, \ldots, m)$, $p_i=\varepsilon_i^2+q_i$ $(i=m+1, \ldots, n)$, imamo

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2-\sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n} q_i-\sum_{i=1}^{n} p_i=Q_n-P_n=0,$$

te je $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2=\sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon_i^2$. Stoga je

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^r=\sum_{i=1}^{m} p_i a_i^r+\sum_{i=m+1}^{n} p_i a_i^r=\sum_{i=1}^{m} q_i a_i^r-\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2 a_i^r$$

$$=\sum_{i=1}^{m} q_i a_i^r-\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2 a_i^r+\sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon_i^2 a_i^r+\sum_{i=m+1}^{n} q_i a_i^r$$

$$=\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^r+\left(\frac{\sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon_i^2 a_i^2}{\sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon_i^2}-\frac{\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2 a_i^2}{\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2}\right) \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2 .$$

Odavde sleduje nejednakost o kojoj je bilo govora.

3. RELACIJE IZMEĐU POTENCIJALNIH SREDINA

3.1. Nejednakost ($\boldsymbol{r}$; $\boldsymbol{s}$). Do sada izloženi rezultati impliciraju izvesne relacije između potencijalnih sredina.

Teorema 21 (a). *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne* n-*torke i* $-\infty \leqq r<s \leqq +\infty$, *važi*

(27) $\qquad M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \leqq M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}),$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

(b) *Ako je* $-\infty \leqq s \leqq q$, $r \leqq +\infty$ *i* $\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leqq \frac{1}{s}$, *tada je*

(28) $\qquad M_n^{[s]}(\boldsymbol{ab}; \boldsymbol{p}) \leqq M_n^{[q]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) M_n^{[r]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p});$

ako je $-\infty \leqq q, r \leqq s \leqq +\infty$ *važi suprotna nejednakost. Ako je* $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<\frac{1}{s}$ *i* $q, s, r \neq 0, \pm\infty$, *nejednakost* (28) *je stroga; ako je* $q, r, s=0$ *ili* $\pm\infty$, *nejednakost* (28) *je stroga osim ako je* $a_1=\cdots=a_n$, $b_1=\cdots=b_n$; *ako je* $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{s}$ *i* $q, r, s \neq 0, \pm\infty$, *nejednakost* (28) *je stroga osim ako su* $\boldsymbol{a}^q$ *i* $\boldsymbol{b}^r$ *proporcionalni; ako je* $s \neq 0, \pm\infty$, $q=\pm\infty$ $(r=\pm\infty)$, *nejednakost* (28) *je stroga osim ako je* $a_1=\cdots=a_n$ $(b_1=\cdots=b_n)$; *ako je* $s=0$, $q=0$ $(r=0)$, *tada je nejednakost* (28) *stroga osim ako je* $a_1=\cdots=a_n$ $(b_1=\cdots=b_n)$; *ako je* $s=q=r=0$, (28) *prelazi u identitet; ako je* $s=q=r=+\infty$, *nejednakost* (28) *je stroga osim ako se* $\max(\boldsymbol{a})$ i $\max(\boldsymbol{b})$ *dostižu za istu vrednost indeksa; ako je* $s=\pm\infty$, $q=r=\mp\infty$, *nejednakost* (28) *je stroga osim ako je* $a_1=\cdots=a_n$, $b_1=\cdots=b_n$; *ako je* $s=q=r=-\infty$, *nejednakost* (28) *je stroga osim ako su* $\min(\boldsymbol{a})$ *i* $\min(\boldsymbol{b})$ *dostignuti za isti indeks.*

(c) *Ako je* $m(r)=M_n^{[r]}(a;\,p)^r$, *tada je* m *striktno logaritamski konveksna funkcija na* $(-\infty,\,0)$ *i* $(0,\,+\infty)$ *osim ako je* $a_1=\cdots=a_n$, *kada je* $m=\text{const}$.

Najpre ćemo dati četiri dokaza tvrđenja pod (a).

Dokaz* 1.** Ako je $r=-\infty$ ili $s=+\infty$, ovo je, u stvari, teorema 2 (a). Dalje, koristeći lemu 3 (a) za $s=-1$, potrebno je posmatrati samo slučajeve $0<r<s<+\infty$. Međutim, na osnovu teoreme 2 (a) i ***GA imamo

$$M_n^{[0]}(a;\,p)=G_n(a;\,p)=G_n(a^s;\,p)^{1/s}\leqq A_n(a^s;\,p)^{1/s}=M_n^{[s]}(a;\,p),$$

pa ćemo posmatrati samo slučaj $0<r<s<+\infty$. Pretpostavimo da je $P_n=1$. Tada, na osnovu ***H***, imamo

$$\begin{aligned} M_n^{[r]}(a;\,p)&=\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^r p_i\Big)^{\frac{1}{r}}=\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i^s p_i)^{r/s}p_i^{\,1-r/s}\Big)^{1/r}\\ &\leqq\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^s p_i\Big)^{1/s}=M_n^{[s]}(a;\,p). \end{aligned}$$

Slučaj jednakosti se neposredno dobija iz ***GA*** ili ***H***.

***Dokaz* 2.** Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a_i>1$ $(1\leqq i\leqq n)$ i da svi a_i nisu jednaki. Pretpostavimo zatim da je $P_n=1$ i definišimo funkcije f i F pomoću

$$\begin{aligned} f(r)&=M_n^{[r]}(a;\,p) \qquad (-\infty\leqq r\leqq+\infty),\\ F(r)&=r^2\big(\log f(r)\big)'=r^2\frac{f'(r)}{f(r)} \qquad (-\infty<r<+\infty). \end{aligned}$$

Bez teškoća nalazimo da je

$$F'(r)=\frac{r}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^r p_i\Big)^2}\left(\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,r}p_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,r}p_i(\log a_i)^2\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,r}p_i\log a_i\Big)^2\right). \tag{29}$$

Na osnovu (29) i nejednakosti ***C*** zaključujemo da F ima jedinstveni striktni minimum u $r=0$, što implicira $F(r)>0$ $(r\neq 0)$. Stoga f' ima istu osobinu, pa je $f(r)<f(s)$ za $-\infty\leqq r<s\leqq+\infty$.

***Dokaz* 3.** Kao što smo primetili u dokazu 1, možemo pretpostaviti da je $0<r<s<+\infty$ i $P_n=1$. Tada, ako je $b^{1/r}=\dfrac{a}{M_n^{[r]}(a;\,p)}$, dovoljno je dokazati da je

$$M_n^{[s]}\big(b^{1/r};\,p\big)=\frac{M_n^{[s]}(a;\,p)}{M_n^{[r]}(a;\,p)}\geqq 1.$$

Iz definicije niza b sleduje $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i p_i=1$, pa ako stavimo $b_i=1+\beta_i$, imamo $\beta_i>-1$ $(1\leqq i\leqq n)$ i $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i p_i=0$. Stoga, na osnovu Bernoullieve nejednakosti (I.9) dolazimo do nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{n}b_i^{s/r}p_i=\sum_{i=1}^{n}(1+\beta_i)^{s/r}p_i\geqq\sum_{i=1}^{n}\Big(1+\frac{s}{r}\beta_i\Big)p_i=1,$$

čime je dokaz završen. Slučaj kada važi jednakost lako se dobija iz Bernoullieve nejednakosti.

***Dokaz* 4.** Sledeći prost dokaz dao je Orts [1]. Kao što smo videli, dovoljno je posmatrati slučaj kada su r i s pozitivni, $P_n=1$ i kada svi a_i nisu jednaki. Najpre ćemo dokazati nejednakost za slučaj kada su r i s celi brojevi. To ćemo indukcijom uraditi. Najpre, na osnovu C, imamo

$$M_n^{[1]}=\sum_{i=1}^{n} a_i p_i < \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2\Big)^{1/2}=M_n^{[2]}.$$

Ako pretpostavimo da je $M_n^{[k]}<M_n^{[k+1]}\,(1\leqq k\leqq m-1)$, na osnovu C i induktivne pretpostavke nalazimo

$$\begin{aligned}(M_n^{[m]})^{2m}\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^m\Big)^2 &< \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m+1} p_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m-1} p_i\Big)\\ &=(M_n^{[m+1]})^{m+1}(M_n^{[m-1]})^{m-1}<(M_n^{[m+1]})^{m+1}(M_n^{[m]})^{m-1},\end{aligned}$$

te je $M_n^{[m]}<M_n^{[m+1]}$. Ako su r i s racionalni brojevi, stavimo $r=w/x$, i $s=y/z$, gde su w,x,y,z prirodni brojevi, pa na osnovu prethodnog imamo

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^r p_i\Big)^{\frac{1}{r}}=\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i^{\frac{1}{xz}}\Big)^{wz} p_i\Big)^{\frac{1}{r}}<\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i^{\frac{1}{xz}}\Big)^{xy} p_i\Big)^{\frac{wz}{xy}}=\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^s p_i\Big)^{\frac{1}{s}}.$$

Opšti slučaj, kada su r i s realni, može se dobiti prelaskom na graničnu vrednost. Kako je u ovom dokazu dobijena striktna nejednakost, slučaj jednakosti ne zahteva posebna ispitivanja.

***Dokaz* 5.** Traženjem ekstremuma funkcije $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto p_1x_1^k+\cdots+p_nx_n^k$ $(x_i>0,\ p_i>0,\ k>0)$, uz uslov $p_1x_1+\cdots+p_nx_n=a$, dobijaju se nejednakosti

$$M_n^{[k]}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})\geqq A_n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p})\qquad (k>1),$$

odnosno suprotna nejednakost za $k<1$. Odavde se bez teškoće dobija (27).

Ovaj dokaz, u slučaju jednakih težina, nalazi se, na primer, u članku Ivanova [1].

***Dokaz* (b).** Ako su svi q, r, s konačni i različiti od nule, na osnovu leme 3 (a) možemo pretpostaviti da je $s=1$ i rezultat sleduje iz teoreme 4 i posledice 9 (takođe videti primedbu 2.2.14°). Slučajevi kada su q, r, s konačni ali uključujući tu i nulu sleduju iz (a). Slučajevi, kada su q, r, ili s beskonačni, jesu ili trivijalni ili sleduju iz teoreme 2 (a).

***Dokaz* (c).** Ovo je, u stvari, posledica 7. Međutim, jedan nezavisan dokaz može se dati na sledeći način. Pretpostavimo da je $P_n=1$, $a_i>1$ $(1\leqq i\leqq n)$, i da svi a_i nisu jednaki. Stavimo $g(r)=r\log M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})$. Tada je $g''(r)=\frac{1}{r}F'(r)$, gde je $F'(r)$ određeno formulom (29). Stoga, na osnovu C, g je striktno konveksna funkcija ako je $-\infty<r\leqq 0$ ili $0\leqq r<+\infty$.

PRIMEDBE: 1° Nejednakost (27) generališe GA i fundamentalna je za ovu oblast. Kratko zvaćemo je $(r;\ s)$. Partikularno, GA je $(0;\ 1)$. U posledici II.7. navedene su nejednakosti $(-\infty;-1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$ i $(1;\ +\infty)$.

2° Nejednakost $(r;\ s)$, u slučaju jednakih težina i kada su r i s prirodni brojevi ili recipročne vrednosti prirodnih brojeva, izgleda da potiče od Schlömilcha [1]. Ovu nejednakost u slučaju jednakih težina, ali za proizvoljno r i s, dokazao je Simon [1]. Iste godine dokaz je dao Wace [1]. Za proizvoljne težine prvi dokaz je dao Besso [1], mada je sam rezultat ranije formulisao Bienaymé [1]. Dokaz pomoću diferencijalnog računa, u slučaju jednakih težina, dali su Norris [1] i Baidaff i Barral [2]. Jedan interesantan dokaz izveo je Segre [1]. Videti takođe Paasche [1]. Geometrijski dokaz, za jednake težine, dao je Gagan [1].

3° Ako je $0<r<s$ i $P_n \leqq 1$, tada $(r; s)$ implicira da za svaku n-torku $\boldsymbol{a}$ važi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r p_i\right)^{1/r} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s p_i\right)^{1/s}.$$

Ako je $P_n<1$, ova nejednakost je stroga.

4° Primenom posledice 5 nejednakost (28) može se uopštiti na sledeći način: ako je $r_i>0$ $(1 \leqq i \leqq m)$, $\frac{1}{r_0}=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}$, $\boldsymbol{a}_{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ pozitivna n-torka, tada je

$$M_n^{[r_0]}\left(\prod_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_{(i)}; \boldsymbol{p}\right) \leqq \prod_{i=1}^{m} M_n^{[r_i]}(\boldsymbol{a}_{(i)}; \boldsymbol{p})$$

sa jednakošću ako i samo ako su $\boldsymbol{a}_{(i)}^{r_i}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ proporcionalni.

5° Slučaj $(r; 2r)$ ove nejednakosti može da se izvede iz $\boldsymbol{C}$ jer je $(r; 2r)$ u stvari

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r p_i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} a_i^{2r} p_i,$$

što je partikularan slučaj nejednakosti (15). Slučaj jednakosti sleduje iz $\boldsymbol{C}$. Ovo je osnova prvog koraka u induktivnom dokazu 4 koji smo gore dali.

6° Iz primedbe 5° sleduje jedan drugi dokaz $\boldsymbol{GA}$ (Schlömilch [1]):

Pretpostavimo da svi $a_1, \ldots, a_n$ nisu jednaki. Tada je, na osnovu teoreme 2 (b),

$$A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = M_n^{[1]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) > M_n^{[1/2]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) > M_n^{[1/4]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) > \cdots > \lim_{m \to +\infty} M_n^{[2^{-m}]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = G(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}).$$

7° Slična ideja, koja potiče od Paleya, može se iskoristiti za dokaz leme II. 10. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{GA}$ dokazano za racionalne težine. Tada je teškoća u tome da se dokaže da je nejednakost $\boldsymbol{GA}$ za generalne težine striktna ako svi članovi niza $\boldsymbol{a}$ nisu jednaki. Neka svi članovi niza $\boldsymbol{a}$ nisu jednaki. Tada je

$$A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = M_n^{[1]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) > M_n^{[1/2]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = M_n^{[1]}(\boldsymbol{a}^{1/2}; \boldsymbol{p})^2 \geqq G_n(\boldsymbol{a}^{1/2}; \boldsymbol{p})^2 = G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}),$$

gde je iskorišćena primedba 6° i slabija forma nejednakosti $\boldsymbol{GA}$ koja je ranije dobijena graničnim procesom.

8° Nejednakost (1; 2) za slučaj jednakih težina posebno se dokazuje:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqq i<j \leqq n} a_i a_j \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1 \leqq i<j \leqq n} (a_i^2 + a_j^2) = n \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

gde je primenjena nejednakost $\boldsymbol{GA}$.

9° Nejednakost $(r; s)$ tvrdi da funkcija $s \mapsto f(s) = M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$ raste sa s, tj. da je $f'(s) \geqq 0$. Osobinu konveksnosti f, koristeći osobine f'', ispitivali su Norris [1] i Beckenbach [5].

10° Ako je $s=1$, stavljajući $p=\frac{1}{r}$, $p'=\frac{1}{1-r}$, $a_k = b_k c_k^{-p'}$, $p_k = c_k^{p'}$ $(1 \leqq k \leqq n)$, nejednakost $(r; s)$ dobija oblik

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_k c_k\right) \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} c_k^{p'}\right)^{1/p'},$$

što je, u stvari, (11). Budući da više dokaza nejednakosti $(r; s)$ ne zavisi od $\boldsymbol{H}$, ovo je jedan drugi dokaz ove osnovne nejednakosti.

11° Nejednakost $(r; s)$ i teorema 2 (c), (d) upotrebljene su za aproksimativno određivanje nula algebarskih jednačina (Dunkel [2], Netto [1, pp. 290—297]). Jednostavnosti radi pretpostavimo da su sve nule pozitivne i označimo ih sa $a_1, \ldots, a_n$ u rastućem poretku. Tada za

$r=1, 2, \ldots$ veličine $M_n^{[r]}(a)$ obrazuju rastući niz čija je granična vrednost a_n. Za $r=-1, -2, \ldots$ dobijamo opadajući niz čija je granica a_1. Slično $\left(\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_2 !\,(a_{i_1}a_{i_2})^r\right)^{1/r}$ $(r=1, 2, \ldots)$ daje rastući niz čija je granica $a_{n-1}a_n$ ili ekvivalentno

$$\frac{n}{\binom{n}{2}}\left(\frac{\sum_2 !\,(a_{i_1}a_{i_2})^r}{\sum_{i=1}^{n} a_i^r}\right)^{1/r}$$

ima za granicu a_{n-1}. Uopšte, zaključujemo da

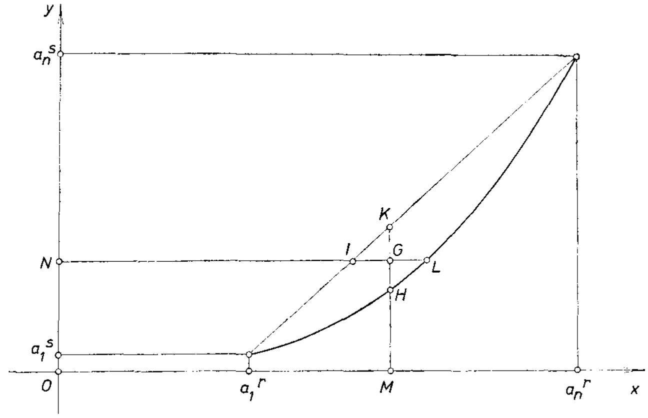
$$\left(\frac{p}{n-p+1}\,\frac{\sum_p !\left(\prod_{j=1}^{p} a_{i_j}\right)^r}{\sum_{p-1} !\left(\prod_{j=1}^{p-1} a_{i_j}\right)^r}\right)^{1/r} \to a_{n-p+1} \qquad (r\to+\infty).$$

Vrednosti $\sum !\left(\prod_{j=1}^{p} a_{i_j}\right)^r$ za $r=2, 2^2, 2^3, \ldots$ bez teškoća se nalaze formirajući jednačine čije su nule kvadrati nula polazne jednačine i ponavljajući ovaj postupak. Pretpostavimo da je k-ta jednačina formirana na ovaj način

$$x^n+c_1{}^k x^{n-1}+c_2{}^k x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}{}^k x+c_n{}^k=0.$$

Tada je približni količnik jednak $\frac{p}{n-p+1}\left(-\frac{c_p{}^k}{c_{p-1}{}^k}\right)^{1/r}$. Na ovaj način, svaka nula polazne jednačine može se aproksimativno izračunati.

12° Nejednakost $(r; s)$ može se geometrijski interpretirati na sledeći način:



Sl. 6

Neka je $t=a_i$, $0<a_1<\cdots<a_n$, $s(s-r)>0$ i neka kriva HLi ma parametarske jednačine $x=t^r$, $y=t^s$. Tada, u stvari, dijagram daje i izvesne konverzne nejednakosti (videti II. 4). Najpre je $MH<MG<MK$, gde je G težište sistema tačaka $(a_1^r, a_1^s), \ldots (a_n^r, \ldots, a_n^s)$, tj.

$$(M_n^{[r]})^s<(M_n^{[s]})^s<\frac{a_n{}^s-a_1{}^s}{a_n{}^r-a_1{}^r}(M_n^{[r]})^r+\frac{a_1{}^s a_n{}^r-a_1{}^r a_n{}^s}{a_n{}^r-a_1{}^r}.$$

Isto tako je $NI<NG<NL$, tj.

$$\frac{a_n{}^r-a_1{}^r}{a_n{}^s-a_1{}^s}(M_n^{[s]})^s+\frac{a_1{}^r a_n{}^s-a_1{}^s a_n{}^r}{a_n{}^s-a_1{}^s}<(M_n^{[r]})^r<(M_n^{[s]})^r.$$

Ove nejednakosti se koriste u aktuarskoj matematici (Giaccardi [1], Blackwell-Girschick [1, p. 31]).

13° Osobinu logaritamske konveksnosti je dobio Liapounoff [1]. Popoviciu je dokazao da je $\log M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$ konveksna funkcija od $1/r$ $(r>0)$ (videti takođe: Julia [1], Beesack [1]). Stoga, kako je prim Beesack [1], $M_n^{[r]}$ je konveksna funkcija od $1/r$ $(r>0)$. On je iskoristio ovu činjenicu pri dokazivanju Hsuovog tvrđenja (bez dokaza) koje glasi: Ako je $0<r<s<t$, tada je

$$1<\frac{M_n^{[t]}-M_n^{[r]}}{M_n^{[t]}-M_n^{[s]}}<\frac{s\,(t-r)}{r\,(t-s)}.$$

Primetimo da je sledeću nejednakost

$$\frac{M_n^{[r]}-M_n^{[-r]}}{M_n^{[r]}-M_n^{[0]}}<n,$$

koja je povezana sa prethodnom nejednakosti, a koju je takođe bez dokaza dao Hsu, nedavno dokazao Rahmail [1].

Druge primedbe i rezultati koji su u vezi sa konveksnošću mogu se naći kod Beckenbacha [1] i Sniada [1].

14° Monotonost $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a})$ u drugom pravcu su generalisali Marshall, Olkin i Proschan [1]. Oni su ovo dokazali: Ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ dve pozitivne n-torke i ako $\boldsymbol{b}$ opada i $\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}$ raste, tada količnik

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} b_i{}^r\right)^{1/r}$$

raste sa r. Slučaj jednakih težina u $(r; s)$ je partikularan slučaj ovog rezultata.

3.2. Neke posledice nejednakosti Minkowskog. Svi gornji rezultati sleduju iz $\boldsymbol{H}$ ili $\boldsymbol{C}$. Sada ćemo dati neke posledice nejednakosti $\boldsymbol{M}$.

Teorema 22 (a). *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *pozitivne n-torke i* $r\geqq 1$, *tada je*

$$M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})<M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})+M_n^{[r]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}); \tag{30}$$

ako je $r<1$, *važi suprotna nejednakost. Ako je* $r\geqq 1$, *jednakost važi ako i samo ako je* $r=1$ *ili ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *proporcionalni; ako je* $r=+\infty$, *jednakost važi ako i samo ako* $\max(\boldsymbol{a})$ *i* $\max(\boldsymbol{b})$ *dostižu svoje vrednosti za istu vrednost indeksa.*

(b) *Ako su nizovi* $\boldsymbol{a}^j=(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ $(1\leqq j\leqq n)$, $\boldsymbol{a}_i=(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ $(1\leqq i\leqq m)$ *pozitivni, tada za* $-\infty\leqq r\leqq s\leqq+\infty$ *važi*

$$M_n^{[s]}\big(M_m^{[r]}(\boldsymbol{a}^j; \boldsymbol{p}); \boldsymbol{q}\big)<M_m^{[r]}\big(M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}_i; \boldsymbol{q}); \boldsymbol{p}\big). \tag{31}$$

Dokaz. (a) Za $r\neq 0$ ovo je $\boldsymbol{M}$ ili teorema II. 2(c). Slučaj $r=0$ dobija se prelazom na graničnu vrednost. Međutim, ovaj način ne daje slučaj jednakosti, pa ćemo to posebno analizirati. Na osnovu $\boldsymbol{GA}$ je

$$G_n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})=\min_{\vec{\alpha}\in A}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\,\alpha_i\,p_i \qquad A=\{\vec{\alpha}\mid G_n(\vec{\alpha}; \boldsymbol{p})=1\}.$$

Stoga je

$$G_n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})\geqq\min_{\vec{\alpha}\in A}\sum_{i=1}^{n}a_i\,\alpha_i\,p_i+\min_{\vec{\alpha}\in A}\sum_{i=1}^{n}b_i\,\alpha_i\,p_i=G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})+G_n(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}) \tag{32}$$

i slučaj jednakosti se dobija iz $\boldsymbol{GA}$.

(b) Pretpostavimo da je $r<s$, $r\neq 0$, $\pm\infty$ i $P_n=Q_n=1$. Tada se (31) svodi na

$$\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}{}^r p_i\right)^{s/r}\right)^{1/s} \leqq \left(\sum_{i=1}^{m} p_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^s q_j\right)^{r/s}\right)^{1/r},$$

tj.

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}{}^r p_i q_j{}^{q/s}\right)^{s/r}\right)^{r/s} \leqq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^s p_i{}^{s/r} q_j\right)^{r/s}.$$

Međutim, ova poslednja nejednakost je u stvari nejednakost (20). Ostatak tvrđenja se dobija prelaskom na graničnu vrednost.

PRIMEDBE: 1° Nejednakost (30) u stvari kazuje da je $M_n^{[r]}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ konveksna funkcija.

2° Slučaj jednakosti u (31) diskutovan je u HLP, p. 31.

3° Ovaj rezultat je dokazan od strane mnogih autora. Posebno videti: BB. p. 26, Beckenbach [1], Besso [1], Bienaymé [1], Giaccardi [1], Jessen [1], Liapounoff [1], Norris [1], Schlömilch [1], Simon [1].

4° Nejednakost (32) može poslužiti za jednostavan dokaz nejednakosti (II. 35):

$$\begin{aligned} 1+G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}) &= G_n(1;\boldsymbol{p})+G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\leqq G_n(1+\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}) && \text{(na osnovu (32))}\\ &\leqq A_n(1+\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}) && \text{(na osnovu } GA)\\ &= 1+A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}). \end{aligned}$$

U stvari, koristeći (30) umesto (32) i $(r;\, s)$ umesto GA, na isti način za $0\leqq r<1$ dolazimo do nejednakosti

$$1+M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\leqq M_n^{[r]}(1+\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\leqq 1+A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}).$$

3.3. Rafiniranje nejednakosti $(r;\, s)$. Budući da $(r;\, s)$ generališe GA, prirodno je posmatrati generalizacije i rafiniranja slična onima u II. 3.

Najpre ćemo dati jedno proširenje teoreme II. 16 (Mitrinović i Vasić [1], Bullen [3]):

3.3.1. Teorema 23. *Ako su* $\boldsymbol{p}$ *i* $\boldsymbol{q}$ *pozitivne n-torke i* $r<s$, *tada je*

$$M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\leqq \frac{M_n^{[r]}\left(\left(\dfrac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}\right)^{\frac{1}{s-r}};\boldsymbol{p}\right)}{M_n^{[s]}\left(\left(\dfrac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}\right)^{\frac{1}{s-r}};\boldsymbol{q}\right)} M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1\left(\dfrac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{s-r}}=\cdots=a_n\left(\dfrac{q_n}{p_n}\right)^{\frac{1}{s-r}}$.

Dokaz. Jednostavna izračunavanja daju

$$\frac{M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})}=\frac{M_n^{[r]}\left(\boldsymbol{a}\left(\dfrac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p}}\right)^{\frac{1}{s-r}};\boldsymbol{p}^{\frac{s}{s-r}}\boldsymbol{q}^{\frac{r}{r-s}}\right) M_n^{[r]}\left(\left(\dfrac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}\right)^{\frac{1}{s-r}};\boldsymbol{p}\right)}{M_n^{[s]}\left(\boldsymbol{a}\left(\dfrac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p}}\right)^{\frac{1}{s-r}};\boldsymbol{p}^{\frac{s}{s-r}}\boldsymbol{q}^{\frac{r}{r-s}}\right) M_n^{[r]}\left(\left(\dfrac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}\right)^{\frac{1}{s-r}};\boldsymbol{q}\right)}$$

odakle primenom $(r;\, s)$ dobijamo nejednakost iz teoreme 23.

3.3.2. Jednostavno proširenje Radoove nejednakosti (II. 38) i Popoviciuove nejednakosti (II. 44) je sledeće:

Teorema 24. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne* n-*torke*, $n \geqq 2$ *i*

(a) *ako je* $\frac{r}{s} \leqq 1$, *tada je*

$$P_n\left(M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^s - M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^s\right) \geqq P_{n-1}\left(M_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^s - M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^s\right) \tag{33}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $r=s$ *ili* $r<s$ *i* $a_n = M_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$ *kada je* $s<1$, $a_n = M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$ *kada je* $r<1$;

(b) *ako je* $r \leqq 0 \leqq s$, *tada je*

$$\left(\frac{M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}\right)^{P_n} \geqq \left(\frac{M_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}\right)^{P_{n-1}} \tag{34}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $r=s$ *ili* $r<s$ *i* $a_n = M_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}) = M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$.

Dokaz. Primetimo najpre da na osnovu leme 3 (a) možemo u (a) i (b) pretpostaviti da je $r=1$ ili $s=1$. Tada partikularni slučajevi $r=0$ lil $s=0$ sleduju iz teorema II. 18 i II. 20.

(a) Pretpostavimo da je $r=1$, što je dopušteno, i uočimo slučaj $r=1<s<+\infty$. Tada se bez teškoća zaključuje da je posmatrana nejednakost ekvivalentna sa

$$P_n^{1-1/s}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s p_i\right)^{1/s} \geqq P_{n-1}^{1-1/s}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^s p_i\right)^{1/s} + a_n p_n,$$

odakle, na osnovu $\boldsymbol{H}$ sleduje (a) u ovom slučaju.

Imamo alternativan dokaz ako posmatramo funkciju $a_n \mapsto f(a_n) = A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}) - M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$. Primenom diferencijalnog računa dobija se da ova funkcija ima jedinstveni minimum za $a_n = M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$, odakle sleduje traženi rezultat.

Sličan postupak može se primeniti i u slučaju $-\infty<r<1=s$. Granični slučajevi $r=1$, $s=+\infty$, $r=-\infty$, $s=1$ mogu se posmatrati posebno i lako se vidi da i tada važi nejednakost (33).

(b) Da bismo dokazali (b) u slučaju $-\infty<r<0<s<+\infty$, primetimo da je $x \mapsto \log x$ striktno konveksna funkcija, pa je

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{M_n^{[s]}}{M_n^{[r]}}\right)^{P_n} &= P_n\left(\frac{1}{s}\log\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\left(\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} a_i^s p_i\right) + a_n^s \frac{p_n}{P_n}\right)\right.\\ &\qquad \left. - \frac{1}{r}\log\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n-1} a_i^r p_i\right) + a_n^r \frac{p_n}{P_n}\right)\right)\\ &\geqq P_{n-1}\left(\frac{1}{s}\log\left(\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} a_i^s p_i\right) - \frac{1}{r}\log\left(\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} a_i^r p_i\right)\right) = \log\left(\frac{M_{n-1}^{[s]}}{M_n^{[r]}}\right)^{P_{n-1}}.\end{aligned}$$

Slučaj jednakosti se neposredno dobija.

PRIMEDBE 1° Postupak korišćen u teoremi II. 34. može se lako primeniti na drugi dokaz teoreme 24 (a) da bi se dobila konverzna nejednakost za $(r; s)$. O tome će kasnije biti detaljnije govora.

2° Više sličnih rezultata sleduju iz opštijih teorema koje će biti kasnije dokazane, pa je to razlog što ih nećemo formulisati ili dokazati u ovom trenutku (videti Bullen [3], Mitrinović — Vasić [1], [2], [3]).

3.2.3 Sada ćemo dokazati opštu teoremu koja implicira više rezultata onog tipa koji nas interesuje (Mitrinović — Vasić [10]):

Teorema 25. *Ako je* $\lambda,\ \mu>0,\ \lambda+\mu\geqq 1,\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ *pozitivni nizovi,* $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ *neprazni konačni podskupovi od* $\mathbf{N}$ *takvi da je* $\mathbf{I}_1\cap\mathbf{J}_1=\mathbf{I}_2\cap\mathbf{J}_2=\varnothing$, *tada je*

$$(35)\qquad P_{\mathbf{I}_1\cup\mathbf{J}_1}{}^{\lambda}\, Q_{\mathbf{I}_2\cup\mathbf{J}_2}{}^{\mu}\, M^{[r]}_{\mathbf{I}_1\cup\mathbf{J}_1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\lambda r}\, M^{[s]}_{\mathbf{I}_2\cup\mathbf{J}_2}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{q})^{\mu s}$$
$$\geqq P_{\mathbf{I}_1}{}^{\lambda}\, Q_{\mathbf{I}_2}{}^{\mu} M^{[r]}_{\mathbf{I}_1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\lambda r}\, M^{[s]}_{\mathbf{I}_2}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{q})^{\mu s}+P_{\mathbf{J}_1}{}^{\lambda}\, Q_{\mathbf{J}_2}{}^{\mu}\, M^{[r]}_{\mathbf{J}_1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{\lambda r}\, M^{[s]}_{\mathbf{J}_2}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{q})^{\mu s}.$$

Ako je $\lambda+\mu>1$, *nejednakost* (35) *je striktna; ako je* $\lambda+\mu=1$, *nejednakost* (35) *je striktna osim ako je*

$$(36)\qquad P_{\mathbf{I}_1}\, Q_{\mathbf{J}_2}\, M^{[r]}_{\mathbf{I}_1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{r}\, M^{[s]}_{\mathbf{J}_2}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{q})^{s}=P_{\mathbf{J}_1}\, Q_{\mathbf{I}_2}\, M^{[r]}_{\mathbf{J}_1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{r}\, M^{[s]}_{\mathbf{I}_2}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{q})^{s}.$$

Ako je $\lambda\mu<0,\ \lambda+\mu=1$, *važi suprotna nejednakost; uslovi za jednakost ostaju isti.*

Dokaz. Ovo neposredno sleduje iz (7) i posledice 9 za $n=2$, ako se stavi $\lambda=\frac{1}{p}$, $\mu=\frac{1}{q}$ i

$$a_1{}^p=P_{\mathbf{I}_1}\, M^{[r]}_{\mathbf{I}_1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^r,\quad a_2{}^p=P_{\mathbf{J}_1}\, M^{[r]}_{\mathbf{J}_1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^r,$$
$$b_1{}^q=Q_{\mathbf{I}_2}\, M^{[s]}_{\mathbf{I}_2}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{q})^s,\quad b_2{}^q=Q_{\mathbf{J}_2}\, M^{[s]}_{\mathbf{J}_2}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{q})^s.$$

Slučaj jednakosti neposredno se određuje.

Posledica 26. *Ako su* $\mathbf{I}$ *i* $\mathbf{J}$ *neprazni konačni podskupovi od* $\mathbf{N}$ *takvi da je* $\mathbf{I}\cap\mathbf{J}=\varnothing$, *i ako su* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ *pozitivni nizovi i* r, s *realni brojevi takvi da je* $rs<0$, *tada je*

$$(37)\qquad \frac{P_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}{}^{\frac{s}{s-r}}}{Q_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}{}^{\frac{r}{s-r}}}\left(\frac{M^{[r]}_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{M^{[s]}_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})}\right)^{\frac{rs}{s-r}}\geqq\frac{P_{\mathbf{I}}{}^{\frac{s}{s-r}}}{Q_{\mathbf{I}}{}^{\frac{r}{s-r}}}\left(\frac{M^{[r]}_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{M^{[s]}_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})}\right)^{\frac{rs}{s-r}}+\frac{P_{\mathbf{J}}{}^{\frac{s}{s-r}}}{Q_{\mathbf{J}}{}^{\frac{r}{s-r}}}\left(\frac{M^{[r]}_{\mathbf{J}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{M^{[s]}_{\mathbf{J}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})}\right)^{\frac{rs}{s-r}}.$$

Ova nejednakost je striktna osim ako je $\dfrac{P_{\mathbf{I}}\, M^{[r]}_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^r}{Q_{\mathbf{I}}\, M^{[s]}_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})^s}=\dfrac{P_{\mathbf{J}}\, M^{[r]}_{\mathbf{J}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^r}{Q_{\mathbf{J}}\, M^{[s]}_{\mathbf{J}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})^s}$.

Ako je $rs>0$ $(r\neq s)$, *važi suprotna nejednakost pod istim uslovima za jednakost.*

Dokaz. Ovo je neposredna posledica teoreme 24, što se zaključuje ako se stavi $\mathbf{I}=\mathbf{I}_1=\mathbf{I}_2$, $\mathbf{J}=\mathbf{J}_1=\mathbf{J}_2$ *i* $\lambda=\dfrac{s}{s-r}$, $\mu=\dfrac{-r}{s-r}$.

PRIMEDBE: 3° Definišimo sledeću funkciju konačnog podskupa skupa $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{I}\mapsto\nu(\mathbf{I})=\frac{P_{\mathbf{I}}{}^{\frac{s}{s-r}}}{Q_{\mathbf{I}}{}^{\frac{r}{s-r}}}\left(\frac{M^{[r]}_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{M^{[r]}_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})}\right)^{\frac{rs}{s-r}}\qquad(\mathbf{I}\neq\emptyset),\ \nu(\emptyset)=0.$$

Nejednakost (37) kazuje da je ν superaditivna funkcija ako je $rs<0$ i subaditivna ako je $rs>0$.

4° Stavljajući $\mathbf{I}=\{1,\ldots,n-1\}$, $\mathbf{J}=\{n\}$, nejednakost (37) postaje

$$(38)\qquad \frac{P_n{}^{\frac{s}{s-r}}}{Q_n{}^{\frac{r}{s-r}}}\left(\frac{M^{[r]}_{n}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{M^{[s]}_{n}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})}\right)^{\frac{rs}{s-r}}\geqq\frac{P_{n-1}{}^{\frac{s}{s-r}}}{Q_{n-1}{}^{\frac{r}{s-r}}}\left(\frac{M^{[r]}_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{M^{[s]}_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})}\right)^{\frac{rs}{s-r}}+\frac{p_n{}^{\frac{s}{s-r}}}{q_n{}^{\frac{r}{s-r}}}$$

sa jednakošću ako i samo ako je

$$\left(\frac{P_{n-1}q_n}{p_n Q_{n-1}}\right) a_n^{s-r} = \frac{M_{n-1}^{[s]}(a;q)^s}{M_{n-1}^{[r]}(a;p)^r}.$$

Za $rs>0$ $(r\neq s)$ važi suprotna nejednakost sa istim uslovima za jednakost.

5° Ako stavimo $r=p$, $s=-q$, $p_i=1$, $q_i=(a_i b_i)^{-s}$, nejednakost (37) daje

$$\left(\sum_{i\in \mathbf{I}\cup \mathbf{J}} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in \mathbf{I}\cup \mathbf{J}} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqq \left(\sum_{i\in \mathbf{I}} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in \mathbf{I}} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i\in \mathbf{J}} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in \mathbf{J}} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Kako je očigledno $\sum_{i\in \mathbf{I}\cup \mathbf{J}} a_i b_i = \sum_{i\in \mathbf{I}} a_i b_i + \sum_{i\in \mathbf{J}} a_i b_i$, poslednja nejednakost implcira nejednakost iz teoreme 14 (a). Slučaj jednakosti u toj teoremi je jednostavna posledica posledice 26.

6° Koliko nam je poznato, Bullen [3] i McLaughlin — Metcalf ([3] i S 3) su prvi, nezavisno, ispitali nejednakosti Everittovog tipa za potencijalne sredine.

Posledica 27. *Ako su* $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ *isti kao u posledici* 26 *i* $rs<0$, *važi*

$$(39)\qquad \left(\frac{P_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}}{Q_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}}\left(\frac{M_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}^{[r]}(a;p)}{M_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}^{[s]}(a;q)}\right)^s\right)^{P_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}} \leqq \left(\frac{P_{\mathbf{I}}}{Q_{\mathbf{I}}}\left(\frac{M_{\mathbf{I}}^{[r]}(a;p)}{M_{\mathbf{I}}^{[s]}(a;q)}\right)^s\right)^{P_{\mathbf{I}}} \left(\frac{P_{\mathbf{J}}}{Q_{\mathbf{J}}}\left(\frac{M_{\mathbf{J}}^{[r]}(a;p)}{M_{\mathbf{J}}^{[s]}(a;q)}\right)^s\right)^{P_{\mathbf{J}}}.$$

Dokaz. Desna strana nejednakosti (39), podeljena sa $P_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}$, može se prikazati u obliku

$$\frac{P_{\mathbf{I}}}{P_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}}\left\{\frac{P_{\mathbf{I}}}{Q_{\mathbf{I}}}\left(\frac{M_{\mathbf{I}}^{[r]}(a;p)}{M_{\mathbf{I}}^{[s]}(a;q)}\right)^s\right\}^{\frac{r}{s-r}} + \frac{P_{\mathbf{J}}}{P_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}}\left\{\frac{P_{\mathbf{J}}}{Q_{\mathbf{J}}}\left(\frac{M_{\mathbf{J}}^{[r]}(a;p)}{M_{\mathbf{J}}^{[s]}(a;q)}\right)^s\right\}^{\frac{r}{s-r}},$$

što je na osnovu *GA* veće od ili jednako sa

$$\left\{\frac{P_{\mathbf{I}}}{Q_{\mathbf{I}}}\left(\frac{M_{\mathbf{I}}^{[r]}(a;p)}{M_{\mathbf{I}}^{[s]}(a;q)}\right)^s\right\}^{\frac{r}{s-r}\frac{P_{\mathbf{I}}}{P_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}}} \left\{\frac{P_{\mathbf{J}}}{Q_{\mathbf{J}}}\left(\frac{M_{\mathbf{J}}^{[r]}(a;p)}{M_{\mathbf{J}}^{[s]}(a;q)}\right)^s\right\}^{\frac{r}{s-r}\frac{P_{\mathbf{J}}}{P_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}}}.$$

Ovaj izraz nije veći od leve strane (39) podeljene sa $P_{\mathbf{I}\cup \mathbf{J}}$. Kako je $\frac{s-r}{r}<0$, stepenujući obe strane sa $\frac{s-r}{r}$, dobijamo (39).

PRIMEDBE: 7° Za $\mathbf{I}=\{1,\ldots,n\}$, $\mathbf{J}=\{n+1,\ldots,m\}$, $p=q$, $s=1$ i ako $r\to 0$, nejednakost (39) daje teoremu 23 (b), pa je stoga posledica 27 generalizacija ovog rezultata.

8° Za opšte r, s $(rs<0)$ slučaj jednakosti u (39) nastupa ako je $M_{\mathbf{I}}^{[r]}(a;p)=M_{\mathbf{J}}^{[r]}(a;p)=1$. Međutim, u slučaju koji je posmatran u primedbi 7° kombinovanjem slučaja jednakosti u posledici 26 i u *GA* dovode u graničnom slučaju do slučaja jednakosti datog u teoremi 24 (b).

Definišimo sledeću funkciju na skupu $\mathbf{N}$: $\mathbf{I}\mapsto \sigma(\mathbf{I}) = P_{\mathbf{I}} M_{\mathbf{I}}^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$; tada je sledeći rezultat analogon teoreme 14:

Posledica 28. *Ako je* $s>1$, $\mathbf{I}\cap \mathbf{J}=\varnothing$, $\mathbf{I}\neq\varnothing$, $\mathbf{J}\neq\varnothing$, *važi nejednakost*

$$(40)\qquad \sigma(\mathbf{I}\cup \mathbf{J}) \geqq \sigma(\mathbf{I}) + \sigma(\mathbf{J})$$

sa jednakošću ako i samo ako je $M_{\mathbf{I}}^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}) = M_{\mathbf{J}}^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$. *Ako je* $s<1$, *važi suprotna nejednakost sa istim uslovima za jednakost. Za* $s=1$ *u* (40) *uvek važi jednakost.*

Dokaz. Pretpostavićemo da je $s>1$, jer je slučaj $s=1$ trivijalan. Stavimo $\mathbf{I}=\mathbf{I}_1=\mathbf{I}_2$, $\mathbf{J}=\mathbf{J}_1=\mathbf{J}_2$, $r=0$, $\lambda=1-\frac{1}{s}$, $\mu=\frac{1}{s}$, $p=q$; tada iz teoreme 25 neposredno sleduje rezultat. Sličan dokaz može se dati u slučaju $s<0$ i $s\neq 0$. Slučaj $s=0$ je neposredna posledica nejednakosti GA jer je tada desna strana u (40):

$$P_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}\left(\frac{P_{\mathbf{I}}}{P_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}}G_{\mathbf{I}}(a;\,p)+\frac{P_{\mathbf{J}}}{P_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}}G_{\mathbf{J}}(a;\,p)\right)\leqq P_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}\big(G_{\mathbf{I}}(a;\,p)\big)^{P_{\mathbf{I}}/P_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}}\big(G_{\mathbf{J}}(a;\,p)\big)^{P_{\mathbf{J}}/P_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}}$$

$$=P_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}\,G_{\mathbf{I}\cup\mathbf{J}}(a;\,p).$$

Slučaj jednakosti dobija se iz GA.

PRIMEDBE: 9° Teorema 25 je prosta posledica veoma jednostavnog oblika H. Prema tome, svaki rezultat koji se može dobiti iz teoreme 25, može se direktno dobiti iz H na jednostavan način.

10° Nejednakost (36) može se bez teškoća uopštiti tako da važi za m parova disjunktnih skupova.

Sledeći rezultat je generalizacija teoreme II. 25 (videti: Bullen [3], McLaughlin i Metcalf [2], [3], Mitrinović i Vasić [10]). Pri tome su korišćene ranije uvedene oznake.

Teorema 29. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne* $(n+m)$*-torke i* $s/r>1$, *tada je*

$$(41)\qquad \frac{Q_{n+m}}{\overline{Q}_m}M_{n+m}^{[s]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})^s-\lambda\frac{P_{n+m}}{\overline{P}_m}M_{n+m}^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})^s\geqq\frac{Q_n}{\overline{Q}_m}M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})^s$$

$$-\frac{P_n{}^{s/r}}{\overline{P}_m}M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})^s\left(P_{n+m}-\overline{P}_m\lambda^{\frac{r}{s-r}}\right)^{\frac{r-s}{r}}+\overline{M}_m^{[s]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})^s-\lambda^{-1}\,\overline{M}_m^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})^s,$$

$$(42)\qquad \frac{Q_{n+m}}{\overline{Q}_m}M_{n+m}^{[s]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})^s-\lambda\frac{P_{n+m}}{\overline{P}_m}M_{n+m}^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})^s\left(\frac{M_m^{[s]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})}{M_m^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})}\right)^s$$

$$\geqq\frac{Q_n}{\overline{Q}_m}M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})^s-\frac{P_n{}^{s/r}}{\overline{P}_m}M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})^s\left(\frac{\overline{M}_m^{[s]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})}{\overline{M}_m^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})}\right)^s\left(\lambda^{\frac{r}{r-s}}P_{n+m}-\overline{P}_m\right)^{\frac{r-s}{s}},$$

gde λ *zadovoljava uslov* $0<\lambda^{\frac{r}{s-r}}\overline{P}_m<P_{n+m}$. *Ako je* $0\leqq s/r<1$, *tada važi suprotna nejednakost. Jednakost važi ako je* $s=0$ *(bez ograničenja za* λ*) ili za* $s\neq 0$ *i* $\dfrac{M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})}{\overline{M}_m^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})}=\dfrac{(\lambda^{r/(r-s)}P_{n+m}-\overline{P}_m{}^{1/r})}{P_n}$.

Kada $r\to 0$, *nejednakosti koje se dobijaju iz (41) i (42) važe za svako* s *i striktne su osim za ranije navedene uslove pri* $r\to 0$.

Dokaz nejednakosti (41). (i) Ako je $rs\neq 0$, (41) je ekvivalentno sa

$$\frac{1}{\overline{Q}_m}\sum_{i=1}^{n+m}a_i^s q_i-\lambda\left(\frac{P_{n+m}}{\overline{P}_m}\right)^{\frac{r-s}{r}}\left(\sum_{i=1}^{n+m}a_i^r p_i\right)^{s/r}$$

$$\geqq\frac{1}{\overline{Q}_m}\sum_{i=1}^{n}a_i^s q_i-\frac{1}{\overline{P}_m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r p_i\right)^{s/r}-\frac{1}{\overline{P}_m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r p_i\right)^{s/r}\left(P_{n+m}-P_m\lambda^{\frac{r}{s-r}}\right)^{\frac{r-s}{r}}$$

$$+\frac{1}{\overline{Q}_m}\sum_{i=n+1}^{n+m}a_i^s q_i-\frac{\lambda^{-1}}{\overline{P}_m{}^{s/r}}\left(\sum_{i=n+1}^{n+m}a_i^r p_i\right)^{s/r}$$

što je ekvivalentno sa

$$(43)\qquad \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^r p_i\Big)^{\frac{s}{r}} \Big(P_{n+m} - \overline{P}_m \lambda^{\frac{r}{r-s}}\Big)^{\frac{r-s}{r}} + \Big(\lambda^{\frac{r}{s-r}} \overline{P}_m\Big)^{\frac{r-s}{r}} \Big(\sum_{i=n+1}^{n+m} a_i^r p_i\Big)^{\frac{s}{r}}$$

$$\geqq P_{n+m}^{\frac{r-s}{r}} \Big(\sum_{i=1}^{n+m} a_i^r p_i\Big)^{\frac{s}{r}}.$$

Da ovaj poslednji rezultat važi, sleduje iz teoreme 4 (b) u njenom najjednostavnijem obliku (tj. za $n=2$); slučaj jednakosti takođe se dobija iz pomenute teoreme.

(ii) Ako je $r \neq 0$, $s=0$, tada je (41) ekvivalentno sa

$$\frac{Q_{n+m}}{\overline{Q}_m} - \frac{P_{n+m}}{\overline{P}_m} \geqq \frac{Q_n}{\overline{Q}_m} - \frac{1}{\overline{P}_m}\big(P_{n+m} - \overline{P}_m \lambda^{-1}\big) + 1 + \lambda^{-1},$$

što se svodi na identitet za svako λ.

(iii) Iz (41) ako $r \to 0$ dobijamo

$$(44)\qquad \frac{Q_{n+m}}{\overline{Q}_m} M_{n+m}^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})^s - \lambda \frac{P_{n+m}}{\overline{P}_m} G_{n+m}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s$$

$$\geqq \frac{Q_n}{\overline{Q}_m} M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})^s - \frac{P_n}{\overline{P}_m} G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s \lambda^{P_m/P_n} + \overline{M}_m^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})^s - \lambda^{-1} \overline{G}_m(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s.$$

Međutim, (44) je ekvivalentno sa

$$(45)\qquad \frac{1}{\overline{Q}_m} \sum_{i=1}^{n+m} a_i^s q_i - \frac{P_{n+m}}{\overline{P}_m} G_{n+m}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s$$

$$\geqq \frac{1}{\overline{Q}_n} \sum_{i=1}^{n} a_i^s q_i - \frac{P_n}{\overline{P}_m} G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s \lambda \frac{\overline{P}_m}{P_n} + \frac{1}{\overline{Q}_m} \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i^s q_i - \lambda^{-1} \overline{G}_m(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s$$

tj. sa

$$\frac{\overline{P}_m}{P_{n+m}} G_m(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s + \frac{P_n}{P_{n+m}} G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s \lambda^{P_{n+m}/P_n} \geqq \lambda\, G_{n+m}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s.$$

Međutim ovo je specijalan slučaj nejednakosti *GA*.

(iv) Slučaj $r=s=0$ je obuhvaćen sa (ii), gde nije neophodno da se pretpostavi $r \neq 0$.

Dokaz nejednakosti (42). U sva četiri slučaja nejednakost (42) važi pod istim okolnostima kao i nejednakost (41); ovo se vidi iz sledeća dva važna slučaja.

(i) Ako je $r \neq 0$ i $s \neq 0$, posle izvesnih uprošćavanja zaključujemo da je (42) ekvivalentno sa (43).

(ii) Ako $r \to 0$, tada (42) postaje

$$(46)\qquad \frac{Q_{n+m}}{\overline{Q}_m} M_{n+m}^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})^s - \lambda \frac{P_{n+m}}{\overline{P}_m} G_{n+m}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s \frac{\overline{M}_m^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})^s}{\overline{G}_m(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})^s}$$

$$\geqq \frac{Q_n}{\overline{Q}_m} M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})^s - \lambda^{P_{n+m}/\overline{P}_m} \frac{P_n}{\overline{P}_m} G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s \frac{\overline{M}_m^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})^s}{\overline{G}_m(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})^s},$$

što je ekvivalentno sa (45).

PRIMEDBA: 10° Ako stavimo $\lambda=1$ i $p=q$, nejednakost (41) kazuje da je za $s/r>1$ funkcija

$$I \mapsto P_I\left(M_I^{[s]}(a;p)^s - M_I^{[r]}(a;p)\right)^s$$

superaditivna. Ovo generališe teoremu 24 (a).

Rezultat Ostrowskog (teorema 20) daje sledeće rafiniranje nejednakosti (28) u slučaju kada je $r=q=2$ i $s=1$:

Teorema 30. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *neproporcionalne n-torke,* $\boldsymbol{p}$ *pozitivna n-torka sa* $P_n=1$ *i* $\boldsymbol{c}$ *definisano sa* $A_n(\boldsymbol{ac};\boldsymbol{p})=1-A_n(\boldsymbol{bc};\boldsymbol{p})=0$, *tada je*

$$\left(\frac{M_n^{[2]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}{M_n^{[2]}(\boldsymbol{c};\boldsymbol{p})}\right)^2 \leqq \left(M_n^{[2]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\, M_n^{[2]}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{p})\right)^2 - A_n(\boldsymbol{ab};\boldsymbol{p}),$$

sa jednakošću ako i samo ako je

$$c_k=\frac{b_k\, M_n^{[2]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^2 - a_k\, M_n^{[2]}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{p})^2}{\left(M_n^{[2]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\, M_n^{[2]}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{p})\right)^2 - A_n(\boldsymbol{ab};\boldsymbol{p})} \qquad (1\leqq k\leqq n).$$

4. GENERALIZACIJE POTENCIJALNIH SREDINA

Izvedene su mnogobrojne generalizacije potencijalnih sredina. Najveći broj je uključen u generalizacije koje će biti posmatrane u sledećem odeljku. Među- tim, u tim generalizacijama ne vide se mnogi detalji i zbog toga će izvesni partikularni slučajevi biti ovde dati.

4.1. Kontraharmonijska sredina

Definicija 31. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne n-torke i r realan broj* $(-\infty\leqq r\leqq+\infty)$, *tada je r-ta kontraharmonijska sredina niza* $\boldsymbol{a}$ *sa težinama* $\boldsymbol{p}$ *definisana sa*

$$\text{(47)}\qquad \begin{aligned} H_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}) &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i^r p_i}{\sum_{i=1}^n a_i^{r-1} p_i} && (-\infty<r<+\infty),\\ &=\max(\boldsymbol{a}) && (r=+\infty),\\ &=\min(\boldsymbol{a}) && (r=-\infty). \end{aligned}$$

Kao i kod ranije definisanih sredina, ukoliko nema zabune, pisaćemo samo $H_n^{[r]}$, dok će $H_n^{[r]}(\boldsymbol{a})$ označavati r-tu kontraharmonijsku sredinu niza $\boldsymbol{a}$ sa jednakim težinama. $H_I^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$ označavaće kontraharmonijsku sredinu u onom smislu koji smo koristili kod sredina ranije definisanih.

PRIMEDBE: 1° Sledeći identiteti se lako proveravaju:

$$H_n^{[1]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}),$$

$$H_n^{[0]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=H_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}),$$

$$H_n^{[-\infty]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=\lim_{r\to-\infty} H_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}),$$

$$H_n^{[+\infty]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=\lim_{r\to+\infty} H_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}),$$

$$H_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{a}^{r-1}\boldsymbol{p}) \qquad (-\infty<r<+\infty).$$

2° Takođe se proverava da je $H_n^{[2]}(a)$ tačka u kojoj $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i-x}{x}\right)^2$ dostiže minimum.

3° Kontraharmonijska sredina ima sledeće osobine:

(a) homogenost, tj. za $\lambda>0$ važi

$$H_n^{[r]}(\lambda\, a;\, p)=\lambda\, H_n^{[r]}(a;\, p);$$

(b) neprekidnost, tj. ako je $h=(h_1, \ldots, h_n)$, tada imamo

$$\lim_{h\to 0} H_n^{[r]}(a+h;\, p)=H_n^{[r]}(a;\, p).$$

Teorema 32. (a) *Ako su* a *i* p *pozitivne n-torke i* $1\leqq r\leqq +\infty$, *tada je*

$$H_n^{[r]}(a;\, p)\geqq M_n^{[r]}(a;\, p); \tag{48}$$

ako je $0<r\leqq 1$ *važi suprotna nejednakost.*

(b) *Ako je* $-\infty\leqq r\leqq 0$, *važi*

$$H_n^{[r]}(a;\, p)\leqq M_n^{[r-1]}(a;\, p). \tag{49}$$

Jednakost važi ako i samo ako je $r=1$, *ili* $r=0$, *ili* $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. Identitet

$$H_n^{[r]}=\left(\frac{M_n^{[r]}}{M_n^{[r-1]}}\right)^{r-1} M_n^{[r]}$$

na osnovu nejednakosti $(r-1;\, r)$ povlači (a). Stoga je

$$H_n^{[r]}(a;\; p)=\frac{1}{H_n^{[-r+1]}(a^{-1};\, p)}\leqq\frac{1}{M_n^{[-r+1]}(a^{-1};\, p)}=M_n^{[r-1]}(a;\, p),$$

čime je završen dokaz tvrđenja (b). Slučaj kada nastupa jednakost sleduje iz $(r-1;\, r)$.

Nejednakost (48) u slučaju jednakih težina i kada je $r=2$ prvi je dokazao Jacob [1].

Sledeća teorema potiče od Lewenta [1].

Teorema 33. *Ako je* $r<s$, *tada je*

$$H_n^{[r]}(a;\, p)\geqq H_n^{[s]}(a;\, p), \tag{50}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

***Dokaz* 1.** U dokazu teoreme 21 (c) pokazali smo da je $r\mapsto m(r)=\sum_{i=1}^{n} a_i^r p_i$ striktno konveksna funkcija ako je $a_i>1$ $(1\leqq i\leqq n)$ i ako svi a_i nisu jednaki. Na osnovu osnovne osobine konveksnih funkcija za $r>s$ je $m(r)-m(r-1)>$ $>m(s)-m(s-1)$, što je, u stvari, nejednakost (50) za $-\infty<r<+\infty$. Ako je $r=-\infty$ ili $s=+\infty$, rezultat se neposredno dobija.

***Dokaz* 2.** U slučaju kada su r i s celi brojevi, Angelescu [1] je dao sledeći dokaz: Kvadratni trinom

$$m(r-1)\, x^2-2\, m(r)\, x+m(r+1)=\sum_{i=1}^{n} p_i\,(x-a_i)^2\, a_i^{r-1}$$

nema realnih nula, pa je $m(r)^2\leqq m(r+1)\, m(r-1)$, odakle sleduje

$$H_n^{[r]}(a;\, p)\leqq H_n^{[r+1]}(a;\, p).$$

Ovim je završen dokaz u ovom slučaju.

PRIMEDBA: 3° Primenjujući (48), (49), (50) i teoremu 2 (c), (d), dobijamo opravdanje za uvedene definicije $H_n^{[r]}$ u slučajevima $r=-\infty$ i $r=+\infty$, tj.

$$\lim_{r\to-\infty} H_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=\min(\boldsymbol{a}),\qquad \lim_{r\to+\infty} H_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=\max(\boldsymbol{a}). \tag{51}$$

Teorema 33. *Ako je* $1\leqq r\leqq 2$, *imamo*

$$H_n^{[r]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b};\boldsymbol{p})\leqq H_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})+H_n^{[r]}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{p}); \tag{52}$$

ako je $0\leqq r\leqq 1$, *važi suprotna nejednakost. Jednakost važi ako i samo ako je* $r=1$ *ili ako je* $\boldsymbol{a}$ *proporcionalno sa* $\boldsymbol{b}$.

Dokaz. Ako stavimo $\Psi(t)=H_n^{[r]}(t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b};\boldsymbol{p})$, $A_i=ta_i+(1-t)b_i$, $B_i=a_i-b_i$, imamo

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i^{r-1}p_i\Big)^3\Psi''(t)=(r-1)(2P-rQ), \tag{53}$$

gde je

$$P=\sum_{j=1}^{n} A_j^r p_j\sum_{k=1}^{n} A_k^{r-1}p_k\sum_{l=1}^{n} A_l^{r-3}B_l^2 P_l-\sum_{j=1}^{n} A_j^r p_j\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^{r-2}B_k p_k\Big)^2,$$

$$\begin{aligned}Q=&\sum_{j=1}^{n} A_j^r p_j\sum_{k=1}^{n} A_k^{r-1}p_k\sum_{l=1}^{n} A_l^{r-3}B_l^2 p_l\\&+2\sum_{j=1}^{n} A_j^{r-1}p_j\sum_{k=1}^{n} A_k^{r-2}B_k p_k\sum_{l=1}^{n} A_l^{r-1}B_l p_l\\&-\Big(\sum_{j=1}^{n} A_j^{r-1}p_j\Big)^2\sum_{k=1}^{n} A_k^{r-2}B_k^2 p_k-2\sum_{j=1}^{n} A_j^r p_j\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^{r-2}B_k p_k\Big)^2.\end{aligned}$$

Na osnovu C imamo $P\geqq 0$. Primenjujući GA i zatim C, dobijamo

$$\begin{aligned}P-Q=&\Big(\sum_{j=1}^{n} A_j^{r-1}p_j\Big)^2\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^{r-2}B_k^2 p_k\Big)+\Big(\sum_{j=1}^{n} A_j^r p_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^{r-2}B_k p_k\Big)^2\\&-2\sum_{j=1}^{n} A_j^{r-1}p_j\sum_{k=1}^{n} A_k^{r-2}B_k p_k\sum_{l=1}^{n} A_l^{r-1}B_l p_l\\ \geqq& 2\sum_{j=1}^{n} A_j^{r-1}p_j\sum_{k=1}^{n} A_k^{r-2}B_k p_k\Bigg(\Big(\sum_{l=1}^{n} A_l^{r-2}B_l p_l\sum_{m=1}^{n} A_m^r p_m\Big)^{1/2}\\&-\sum_{l=1}^{n} A_l^{r-1}B_l p_l\Bigg)\geqq 0.\end{aligned}$$

Odavde za $0\leqq r\leqq 2$ izlazi $2P-rQ\geqq 0$, pa je Ψ konveksna funkcija za $1\leqq r\leqq 2$ i konkavna za $0\leqq r\leqq 1$. Stoga je $2\Psi\Big(\dfrac{1}{2}\Big)\leqq\Psi(0)+\Psi(1)$ za $1\leqq r\leqq 2$. Za $0\leqq r\leqq 1$ važi suprotna nejednakost. Odavde izlazi tvrđenje teoreme. Slučaj jednakosti se dobija pomoću C i GA.

PRIMEDBE: 4° Teorema 33 može se proširiti za $r=\pm\infty$, ali ako je $2<r<+\infty$ postoji $\varepsilon>0$ tako da za $\boldsymbol{a}=(1,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)$ i $\boldsymbol{b}=(1,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^2)$ nejednakost (52) ne važi. Sličan kontraprimer može da se nađe i za $-\infty<r<0$.

5° Koliko nam je poznato, ove sredine i njihove osobine potiču od Beckenbacha [2]. Identiteti (51) nalaze se u HLP, p. 62.

6° Alternativni dokazi (52) mogu se naći u BB, p. 27, i u članku [2] Beckenbacha.

7° Druge reference su: Bellman [2] i Hari das Bagchi i Chandra Maity [1].

4.2. Razni autori su generisali količnik (47) i teoremu 33. Tako su Mitrinović i Vasić [5] posmatrali izraz

$$F(x)=\frac{M_n^{[s]}(a^x;\,p)}{M_n^{[s]}(a^{x-k};\,p)}$$

i dokazali sledeće: Ako je $r=s$, tada je F monotono rastuća ili opadajuća funkcija prema tome da li je $rk>0$ ili $rk<0$. Ako je $s<r$, tada F ima jedinstveni maksimum za $x=\dfrac{kr}{r-s}$; ako je $s>r$, funkcija F ima jedinstveni maksimum u istoj tački.

Slučaj $r=s$ i $p_1=\cdots=p_n$ ranije je posmatrao Kobayashi [1]. Metodi dokaza zasnivaju se na elementarnom diferencijalnom računu.

Sada ćemo detaljnije posmatrati jednu drugu generalizaciju. Neka je (Gleser [1]):

$$(54)\qquad Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})=\frac{M_n^{[u]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})}{M_n^{[v]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})}\qquad(-\infty\leqq u,\,v\leqq+\infty).$$

Tada, ako je $u>v$, nejednakost $(r;\,s)$ implicira

$$(55)\qquad Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\geqq 1,$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

Teorema 34. (a) *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne n-torke i* $u>v$, *tada je*

$$Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\geqq\min_{1\leqq i\leqq n}Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a}_i';\,\boldsymbol{p});$$

(b) *Ako je, pored toga,* $M_n^{[v]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\leqq a_k\leqq M_n^{[u]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})$, *tada je*

$$Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\leqq\max_{1\leqq i\leqq n}Q_{n-1}^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a}_i';\,\boldsymbol{p}).$$

Dokaz. (a) Bez teškoće možemo proveriti da je

$$Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})=\frac{\left((n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(P_n-p_i)\left(M_{n-1}^{[v]}(\boldsymbol{a}_i';\,\boldsymbol{p})\right)^u\left(Q_{n-1}^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a}_i';\,\boldsymbol{p})\right)^u\right)^{\frac{1}{u}}}{\left((n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(P_n-p_i)\left(M_{n-1}^{[v]}(\boldsymbol{a}_i';\,\boldsymbol{p})\right)^v\right)^{\frac{1}{v}}}$$

$$\geqq\min_{1\leqq i\leqq n}Q_{n-1}^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a}_i';\,\boldsymbol{p})\frac{\left((n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(P_n-p_i)\left(M_{n-1}^{[v]}(\boldsymbol{a}_i';\,\boldsymbol{p})\right)^u\right)^{\frac{1}{u}}}{\left((n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(P_n-p_i)\left(M_{n-1}^{[v]}(\boldsymbol{a}_i';\,\boldsymbol{p})\right)^v\right)^{\frac{1}{v}}}$$

$$\geqq\min_{1\leqq i\leqq n}Q_{n-1}^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a}_i';\,\boldsymbol{p}),$$

gde je primenjena nejednakost $(r;\,s)$ i činjenica da je $(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(P_n-p_i)=1$.

(b) Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$. Tada učinjene pretpostavke dovode do nejednakosti:

$$P_n\big(M_n^{[u]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\big)^u \leqq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} p_i a_i + p_k M_n^{[u]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^u,$$

te je

$$M_n^{[u]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) \leqq \Big(\frac{1}{P_n - p_k}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} p_i a_i^u\Big)^{\frac{1}{u}}.$$

Ova nejednakost važi i kada se u zameni sa v, te imamo

$$Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) < Q_{n-1}^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a}_k';\ \boldsymbol{p}).$$

PRIMEDBA: 1° Sličan rezultat može da se dobije izdvajanjem proizvoljnog podskupa $\boldsymbol{a}$ (videti: Gleser [1]).

Teorema 35. *Ako je $v>0$ (<0) fiksno i ako svi elementi pozitivne n-torke $\boldsymbol{a}$ nisu međusobno jednaki, tada postoji jedinstveno $u_0=\theta v$ $(0<\theta<v)$ u kome $\big(Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big)^{uv}$ dostiže jedinstvenu minimalnu (maksimalnu) vrednost.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti, bez smanjenja opštosti, da je $a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$. Stavimo

$$g(u) = \log\big(Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big)^{uv}.$$

Jednostavna izračunavanja daju

$$g'(u) = v\,\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^u \log a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^u} - \log\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^u,$$

$$g''(u) = \frac{v}{\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^u\Big)^2}\left(\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^u \log a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^u\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^u \log a_i\Big)^2\right).$$

Ako je $v=0$, na osnovu C imamo $g''>0$, pa je g' rastuća funkcija. Dalje, ako je $v>0$, imamo

$$\lim_{n\to-\infty} g'(u) = \log\left(\frac{P_n a_n^v}{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^v}\right) < 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} g'(u) = \log\left(\frac{P_n a_n^v}{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^v}\right) > 0,$$

$$g'(0)>0,\ g'(v)>0.$$

Poslednje dve nejednakosti su posledice J-nejednakosti i konveksnosti logaritamske funkcije. Ove činjenice su dovoljne da potvrde tvrđenja teoreme ako je $v>0$. Slučaj $v<0$ razmatra se slično.

PRIMEDBE: 2° Kako je $Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\, Q_n^{[v,\,u]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) = 1$, nije teško formulisati slično tvrđenje ako se $\big(Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big)^{uv}$ posmatra kao funkcija od v pri fiksnom u.

3° Specijalno, ako je $0<v<u$, tada je $\big(Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big)^{uv} \geqq \big(Q_n^{[u,\,v]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big)^{v^2} = 1$, što je ekvivalentno sa fundamentalnom nejednakošću $(r;\ s)$.

4° Pretpostavimo li da je $1 \leqq s < r$, tada je

$$\left(Q_n^{[r,1]}(a;p)\right)^r \geqq \left(Q_n^{[s,1]}(a;p)\right)^s, \quad \text{tj. } A_n(a;p)^{r-s} \leqq \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i^r}{\sum_{i=1}^n p_i a_i^s}.$$

Ovaj rezultat, u slučaju jednakih težina, dobio je Berkolaĭko [1]. Jedan drukčiji dokaz dao je Ž. Mitrović [1]. O opštem slučaju videti: Mitrinović i Vasić [11].

5° O istraživanjima izraza $Q_n^{[u,v]}(a;p)$ u drugom pravcu videti 5.1.

4.3. Drugi autori su koristili slične količnike da bi uveli nove sredine (Gini [1], Gini i Zappa [1], Castellano [1]): Ako je $p \geqq q$ i definišimo

$$B_n^{[p,q]}(a) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} \quad (p \neq q), \quad B_n^{[p,p]}(a) = \left(\prod_{i=1}^n a_i^{a_i^p}\right)^{1 \Big/ \sum_{i=1}^n a_i^p}.$$

Primetimo da ograničenje $p > q$ ne dovodi do smanjenja opštosti.

Primedbe: 1° $B_n^{[p,0]}(a) = M_n^{[p]}(a)$ $(p \geqq 0)$ i $B_n^{[0,q]}(a) = M_n^{[q]}(a)(q \leqq 0)$. Pored toga $B_n^{[p,p-1]}(a) = H_n^{[r]}(a)$. Prema tome, ove sredine obuhvataju, kao specijalne slučajeve, potencijalne sredine i kontraharmonijske sredine.

Teorema 36. *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka i* $p \leqq q$, *tada je*

(a) $\lim_{p \to q} B_n^{[p,q]}(a) = B_n^{[p,p]}(a)$, (b) $\lim_{p \to +\infty} B_n^{[p,q]}(a) = \max(a)$,

(c) $\lim_{q = -\infty} B_n^{[p,q]}(a) = \min(a)$, (d) *ako je* $m \geqq 0$, *tada je* $B_n^{[q+m,q]}(a)$ *rastuća funkcija od* q, *i, osim ako je* $a_1 = \cdots = a_n$, *ona je strogo rastuća,*

(e) $B_n^{[p,q]}(a)$ *je rastuća funkcija od* p.

Dokaz. (a) Ovo se jednostavno dokazuje.

(b) $$\log \lim_{p \to +\infty} B_n^{[p,q]}(a) = \lim_{p \to +\infty} \frac{\log \sum_{k=1}^n a_k^p - \log \sum_{k=1}^n a_k^q}{p-q} = \lim_{p \to +\infty} \frac{\log \sum_{k=1}^n a_k^p}{p} = \log\max(a)$$

na osnovu primedbe 2.1.7°.

(c) Dokaz je sličan onome pod (b).

(d) Daćemo dokaz samo za $m > 0$. Za $m = 0$ dokaz je sličan. Neka je

$$f(q) = \log \sum_{k=1}^n a_k^{q+m} - \log \sum_{k=1}^n a_k^q.$$

Tada je

$$f'(q) = \frac{\sum_{k=1}^n a_k^{q+m} \log a_k}{\sum_{k=1}^n a_k^{q+m}} - \frac{\sum_{k=1}^n a_k^q \log a_k}{\sum_{k=1}^n a_k^q}.$$

Prema tome, dovoljno je dokazati da je g, definisano sa

$$g(q)=\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^q \log a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^q},$$

rastuća funkcija po q. Ovo sleduje iz

$$g'(q)=\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^q\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^q (\log a_k)^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^q \log a_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^q\right)^2}$$

$$=\frac{\sum_{k,\,l=1}^{n} a_k{}^q a_l{}^q (\log a_k-\log a_l)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^q\right)^2}\geqq 0.$$

(e) Kako je $B_n^{[p,\,q]}(\boldsymbol{a})=M_n^{[p-q]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{a}^q)$ i $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})$ je neopadajuća funkcija, imamo da je $B_n^{[p,\,q]}(\boldsymbol{a})$ neopadajuća funkcija od $p-q$, gde je q fiksno, tj. $B_n^{[p,\,q]}(\boldsymbol{a})$ je neopadajuća funkcija od p.

4.4. Drugi pravac generalizacije sugerirao je Bonferroni [3]. Ako je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, definišimo

$$M_n^{[p,\,q]}(\boldsymbol{a})=\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i\neq 1\\ i,\,j=1}}^{n} a_i{}^p a_j{}^q\right)^{\frac{1}{p+q}};$$

analogno se definišu opštije sredine $M_n^{[p,\,q,\,r]}(\boldsymbol{a})$, itd.

Teorema 37. *Ako je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, $h>0$ i $p>p-h>q$, tada je*

$$M_n^{[p,\,q]}(\boldsymbol{a})\geqq M_n^{[p-h,\,q+h]}(\boldsymbol{a}).$$

Za dokaz ove teoreme videti Bonferroni [3].

Sledeće sredine, koje je uveo Gini [2], predstavljaju dalje generalizacije:

$$B_n^{[p,\,c;\,q,\,d]}(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\binom{n}{d}\Sigma\, a_{i_1}{}^p\cdots a_{i_c}{}^p}{\binom{n}{c}\Sigma\, a_{i_1}{}^q\cdots a_{i_d}{}^q}\right)^{1/(pc-qd)}\qquad (pc-qd\neq 0),$$

$$=\lim_{q\to\frac{pc}{d}} B_n^{[p,\,c;\,q,\,d]}(\boldsymbol{a})\qquad (pc-qd=0).$$

O osobinama ovih sredina videti: Gini [6] i Castellano [2].

4.5. Mešane sredine. Neka je $\boldsymbol{a}$ data pozitivna n-torka, $k\,(1 \leqq k \leqq n)$ prirodan broj. Označimo sa $\vec{\alpha}_1^k, \ldots, \vec{\alpha}_k^k$ k-torke formirane od elemenata n-torke $\boldsymbol{a}$ $\left(\text{takvih } k\text{-torki ima ukupno } \varkappa = \binom{n}{k}\right)$.

Mešana sredina reda s i t $(-\infty \leqq s, t \leqq +\infty)$ od $\boldsymbol{a}$ definisana je sa

(57) $$M(s, t;\, k) = M^{[s]}\left(M_k^{[t]}(\vec{\alpha}_i^k);\ 1 \leqq i \leqq \varkappa\right).$$

PRIMEDBE: 1° Sledeći specijalni slučajevi se neposredno proveravaju:

$$M(s, t;\, 1) = M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}), \quad M(s, t;\, n) = M_n^{[t]}(\boldsymbol{a}), \quad M(s, s;\, k) = M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}).$$

2° Neposredna posledica nejednakosti $(r;\, s)$ je da je $M(s, t;\, k)$ rastuća funkcija i od s i od t. Prvi rezultat koji ćemo dokazati odnosi se na osobinu monotonosti $M(s, t;\, k)$ kao funkcije od k.

3° Ideje i glavni rezultati iz ovog odeljka potiču od Carlsona [2], [6] i Carlsona, Meanya i Nelsona [1] i [2].

Teorema 38. *Ako je $s<t$, tada je*

(58) $$M(s, t;\, k-1) \leqq M(s, t;\, k);$$

ako je $s>t$, važi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Označimo sa $\vec{\alpha}_{ij}^k\,(1 \leqq j \leqq k)$ kolekciju $(k-1)$-torki od $\vec{\alpha}_i^k$. Tada je svako $\vec{\alpha}_{ij}^k$ jednako sa $\vec{\alpha}_h^{k-1}$ $\left(1 \leqq h \leqq \varkappa' = \binom{n}{k-1}\right)$ i svako $\vec{\alpha}_h^{k-1}$ pojavljuje se $n-k+1$ puta u kolekciji $\vec{\alpha}_{ij}^k\,(1 \leqq j \leqq k,\ 1 \leqq i \leqq \varkappa)$; primetimo da je $\varkappa'(n-k+1) = \varkappa k$.

Kako je $M_k^{[t]}(\vec{\alpha}_i^k) = M_k^{[t]}\left(M_{k-1}^{[t]}(\vec{\alpha}_{ij}^k);\ 1 \leqq j \leqq k\right)$ za $s<t$, na osnovu $(r;\, s)$, imamo

(59) $$M_k^{[t]}(\vec{\alpha}_i^k) \geqq M_k^{[s]}\left(M_{k-1}^{[t]}(\vec{\alpha}_{ij}^k);\ 1 \leqq j \leqq k\right).$$

Odavde, na osnovu (57), dobijamo

$$\begin{aligned} M(s, t;\, k) &\geqq M_\varkappa^{[s]}\left(M_k^{[s]}\left(M_{k-1}^{[t]}(\vec{\alpha}_{ij}^k);\ 1 \leqq j \leqq k\right);\ 1 \leqq i \leqq \varkappa\right) \\ &= M_{\varkappa'}^{[s]}\left(M_{k-1}^{t}(\vec{\alpha}_i^{k-1});\ 1 \leqq i \leqq \varkappa'\right) = M(s, t;\, k-1), \end{aligned}$$

gde smo koristili ranije uvedene oznake.

Ako je $s>t$, nejednakost (59) je suprotna; u oba slučaja nejednakost je stroga osim ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Sada ćemo izvesti jednu nejednakost između različitih mešovitih sredina. Pretpostavimo da je $k+l>n$. Tada, ako je $\lambda = \binom{n}{l}$, imamo

(60) $$\vec{\alpha}_i^k \cap \vec{\alpha}_j^l \neq \varnothing \quad (1 \leqq i \leqq \varkappa,\ 1 \leqq j \leqq \lambda).$$

Korisno je da uvedemo oznake

$$\sigma_i = M_k^{[s]}(\vec{\alpha}_i^k)\ (1 \leqq i \leqq \varkappa), \quad \tau_j = M_l^{[t]}(\vec{\alpha}_j^l) \quad (1 \leqq j \leqq \lambda),$$
$$\sigma_{ij} = M^{[s]}(\vec{\alpha}_i^k \cap \vec{\alpha}_j^l), \quad \tau_{ij} = M^{[t]}(\vec{\alpha}_i^k \cap \vec{\alpha}_j^l).$$

Lema 39. *Ako je $k+l>n$, tada je*

(61) $\tau_j = M_{\varkappa}^{[t]}(\tau_{ij};\ 1 \leqq i \leqq \varkappa) \quad (1 \leqq j \leqq \lambda);$

(ili $\sigma_i = M_{\lambda}^{[s]}(\sigma_{ij};\ 1 \leqq j \leqq \lambda) \quad (1 \leqq i \leqq \varkappa).$

Dokaz. Ako je $t = \pm\infty$ rezultat se neposredno dobija. Ako je $t \neq 0$, na osnovu (60), suma na desnoj strani je linearna kombinacija t-tih stepena α_j^l. Kako se sumiranje proteže na sve k-torke α_i^k, suma je invarijantna na permutacije elemenata α_j^l. Stoga je desna strana multipl od τ_j; ako stavimo $a_1 = \cdots = a_n$, vidimo da je taj faktor jednak 1. Sličan dokaz se izvodi za $t = 0$.

Teorema 40. *Ako je $s<t$, $k+l>n$, tada je*

(62) $M(t, s; k) \leqq M(s, t; l),$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Primenom formule (57), leme 39, nejednakosti (31) i $(r; s)$ dobijamo

$$\begin{aligned} M(t, s; k) &= M_k^{[t]}(\sigma_i;\ 1<i<k) \\ &= M_{\varkappa}^{[t]}\big(M_{\lambda}^{[s]}(\sigma_{ij};\ 1 \leqq j \leqq \lambda);\ 1 \leqq i \leqq \varkappa\big) \\ &\leqq M_{\lambda}^{[s]}\big(M_k^{[t]}(\tau_{ij};\ 1 \leqq i \leqq \varkappa);\ 1 \leqq j \leqq \lambda\big) \\ &= M_{\lambda}^{[s]}(\tau_j;\ 1 \leqq j \leqq \varkappa) \\ &= M(s, t; l). \end{aligned}$$

Ovim je završen dokaz nejednakosti (62). Slučaj jednakosti sleduje iz slučaja jednakosti u (31) i $(r; s)$.

Primedbe: 3° Na osnovu primedbe 1° vidi se da za $k=l=n$, nejednakosti (58) i (62) sadrže $(r; s)$ kao specijalan slučaj.

4° Rezultati teorema 38 i 40 u slučaju $s<t$ mogu se sumirati na sledeći način:

(63)
$$\begin{array}{ccccccccccc} M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}) = M(s, t; 1) & \leqq & M(s, t; 2) & \leqq \cdots \leqq & M(s, t; n-1) & \leqq & M(s, t; n) = M_n^{[t]}(\boldsymbol{a}); \\ \text{VII} & & \text{VII} & & \text{VII} & & \| \\ M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}) = M(t, s; n) & \leqq & M(t, s; n-1) & \leqq \cdots \leqq & M(t, s; 2) & \leqq & M(t, s; 1) = M_n^{[t]}(\boldsymbol{a}), \end{array}$$

pri čemu su sve nejednakosti striktne osim za $a_1 = \cdots = a_n$.

5° Partikularan slučaj (62) je (videti 5.1):

(64) $$\left(\frac{(ab)^{1/2}+(bc)^{1/2}+(ca)^{1/2}}{3}\right) \leqq \left(\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}\right)^{1/3}.$$

5. KONVERZNE NEJEDNAKOSTI

Pojam konverznih ili komplementarnih nejednakosti definisan je u II. 4. Sada ćemo dokazati neke opšte rezultate ovog tipa.

5.1. Granice za količnik potencijalnih sredina. Neka je n prirodan broj >1, $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{p}$ dve pozitivne n-torke, $P_n = 1$ i neka je za $-\infty < s < r < +\infty$ količnik $Q_n^{[r,s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$ definisan sa (54). Tada, kako se vidi iz (55), $Q_n^{[r,s]}$ ima donju granicu nezavisnu od n, $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{p}$.

Gornja granica sa takvom osobinom ne postoji jer je na osnovu teoreme

$$\sup_{-\infty<s<r<+\infty} Q_n^{[r,s]}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) = \frac{\max(\boldsymbol{a})}{\min(\boldsymbol{a})}.$$

Međutim, ako posmatramo niz $\boldsymbol{a}$ takav da je $0<m\leqq a_k\leqq M$ $(1\leqq k\leqq n)$, takvu granicu možemo da dobijemo i tada je

$$Q_n^{[r,s]}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) \leqq \beta = \frac{M}{m}.$$

Specht [1] je dokazao da se ova granica može poboljšati. Taj rezultat su kasnije ponovo otkrili Cargo i Shisha [1] koji su takođe dobili i kada važi jednakost, što nije bilo sadržano u članku Spechta.

Teorema 41. *Neka je* $n>1$, $\boldsymbol{p}$ *pozitivna n-torka*, $P_n=1$, $0<m\leqq a_k\leqq M$ $(1\leqq k\leqq n)$, $\beta=\dfrac{M}{m}$, $-\infty<s<r<+\infty$; *tada je*

$$(65)\qquad Q_n^{[r,s]}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) < \Gamma_{r,s}(\beta),$$

gde je

$$\Gamma_{r,s}(\beta) = \left(\frac{s(\beta^r-\beta^s)}{(r-s)(\beta^s-1)}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{r(\beta^s-\beta^r)}{(s-r)(\beta^r-1)}\right)^{-\frac{1}{s}} \qquad (st\neq 0),$$

$$(66)\qquad \Gamma_{r,0}(\beta) = \left(\frac{\beta^{r/(\beta^r-1)}}{e\log(\beta^{r/(\beta^r-1)})}\right)^{\frac{1}{r}} \left(=\lim_{s\to 0-}\Gamma_{r,s}(\beta)\right),$$

$$\Gamma_{0,s}(\beta) = \left(\frac{\beta^{s/(\beta^s-1)}}{e\log(\beta^{s/(\beta^s-1)})}\right)^{-\frac{1}{s}} \left(=\lim_{r\to 0+}\Gamma_{r,s}(\beta)\right).$$

Neka je

$$\theta=\theta(r,s)=\frac{1}{s-r}\left\{\frac{r}{\beta^r-1}-\frac{s}{\beta^s-1}\right\} \qquad (rs\neq 0),$$

$$(67)\qquad \theta(0,s)=\lim_{r\to 0-}\theta(r,s)=\frac{1}{s\log\beta}-\frac{1}{\beta^s-1},$$

$$\theta(r,0)=\lim_{s\to 0+}\theta(r,s)=\theta(0,r);$$

tada je $0<\theta<1$ *i jednakost u* (65) *nastupa ako i samo ako postoji* $\mathbf{I}\subset\{1,\ldots,n\}$, *tako da je* $\sum_{k\in\mathbf{I}} p_k=\theta$, $a_k=M\ (k\in\mathbf{I})$, $a_k=m\ (k\notin\mathbf{I})$.

***Dokaz* 1.** Definišimo

$$\Gamma_{r,s}(\beta)=\sup\{x \mid x=Q_n^{[r,s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{p} \text{ tako da je } P_n=1,\ \boldsymbol{a} \text{ tako da je } m\leqq a_k\leqq M\}$$

pretpostavljajući, što će kasnije biti i dokazano, da gornja granica ne zavisi od n. Takođe definišimo i

$$A=\{\boldsymbol{a} \mid 1\leqq a_k\leqq\beta\ (1\leqq k\leqq n)\},$$

$$P=\{\boldsymbol{p} \mid P_n=1\},$$

$$\Gamma_{r,s}(\beta;\, \boldsymbol{p})=\sup_{\boldsymbol{a}\in A} Q_n^{[r,s]}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}).$$

Tada na osnovu jednostavnih osobina Q dobijamo

$$\Gamma_{r,s}(\beta)=\sup_{p\in P}\Gamma_{r,s}(\beta;\,p)=\sup_{\substack{a\in A\\ p\in P}} Q_n^{[r,s]}(a;\,p). \tag{68}$$

Kako je $\Gamma_{r,s}(\beta)\leqq\beta$, jednostavna izračunavanja dovode do sledećih identiteta:

$$\Gamma_{r,s}(\beta)=\Gamma_{-s,-r}(\beta), \tag{69}$$

$$\Gamma_{r,s}(\beta)^r=\Gamma_{1,s/r}(\beta^r) \qquad (0<r<s<+\infty), \tag{70}$$

$$\Gamma_{0,s}(\beta)^s=\Gamma_{0,1}(\beta^s) \qquad (0=r<s<+\infty), \tag{71}$$

$$\Gamma_{r,s}(\beta)^{-r}=\Gamma_{-1,-s/r}(\beta^{-r}) \qquad (-\infty<r<0<s<+\infty). \tag{72}$$

Prema prethodnom, dovoljno je izračunati $\Gamma_{r,s}$ u sledeća tri slučaja: (i) $0<r<s<+\infty$, (ii) $0=r<s<+\infty$, (iii) $-\infty<r<0<s<+\infty$. Koristeći (70), (71) i (72), ova tri slučaja svode se na ispitivanje $\Gamma_{1,t}\,(t>1)$ u slučaju (i); $\Gamma_{0,1}$ u slučaju (ii), i $\Gamma_{-1,t}\,(t>0)$ u slučaju (iii). Kako je određivanje ovih granica jednostavno, posmatraćemo samo prvi slučaj.

Da bismo izračunali $\Gamma_{1,t}(\beta)\,(t>1)$, posmatrajmo najpre $\Gamma_{1,t}(\beta;\,p)$. Kako je skup A kompaktan, postoji $b\in A$ tako da je

$$\left(\Gamma_{1,t}(\beta;\,p)\right)^t=\left(Q_n^{[1,t]}(b;\,p)\right)^t=\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k b_k^t}{\left(\sum_{k=1}^{k} p_k b_k\right)^t}. \tag{73}$$

Za neko i $(1\leqq i\leqq n)$ stavimo

$$p_i=p,\quad \sum_{k\neq i} p_k b_k^t=(1-p)\,\alpha_t,\quad \sum_{k\neq i} p_k b_k=(1-p)\,\alpha_1.$$

Tada, ako je $1\leqq x\leqq\beta$, funkcija Φ definisana sa

$$\Phi(x)=\left(Q_n^{[1,t]}(b_1,\ldots,b_{i-1},x,b_{i+1},\ldots,b_n;\,p)\right)^t=\frac{px^t+(1-p)\,\alpha_t}{(px+(1-p)\,\alpha_1)^t}$$

ima maksimum ili za $x=1$ ili za $x=\beta$, što sleduje posmatranjem izvoda Φ'.

Prema tome, pošto je i $(1\leqq i\leqq n)$ proizvoljno, tačka b iz A definisana sa (67) je takva da je $b_k=1$ ili $\beta\,(1<k<n)$. Pretpostavimo da je $\mathbf{I}\subset\{1,\ldots,n\}$ takvo da je $b_k=\beta\,(k\notin\mathbf{I})$, $b_k=1\,(k\notin\mathbf{I})$, i stavimo $y=\sum_{k\in\mathbf{I}} p_k\,(0\leqq y\leqq 1)$ (primetimo da je mogućno da bude $\mathbf{I}=\varnothing$). Tada je

$$\Gamma_{1,t}(\beta;\,p)^t=\frac{(1-y)+y\,\beta^t}{((1-y)+y\,\beta)^t}\left(=\psi(y)\right).$$

Stoga, na osnovu (68) je

$$\Gamma_{1,t}(\beta)^t=\sup_{0\leqq y\leqq 1}\psi(y)$$

i jednostavnim analiziranjem izvoda ψ' zaključujemo da ψ ima maksimum u y_0, gde je $0<y_0=\theta(1,t)<1$, pri čemu je θ definisano sa (67), Dakle $\mathbf{I}\neq\varnothing$ i

$$\Gamma_{1,t}(\beta)=\psi\left(\theta(1,t)\right)^{1/t},$$

što je vrednost data u (66).

Slučaj jednakosti se neposredno dobija iz prethodne analize.

***Dokaz* 2.** Znatno jednostavniji dokaz sleduje iz teoreme I.33 izborom funkcije f pomoću $f(x)=x^{r/s}$. O ovome videti članak [13] Mitrinovića i Vasića.

PRIMEDBE: 1° Više klasičnih nejednakosti su specijalni slučajevi teoreme 41. Stavljajući $r=-1$ i $s=1$, dobijamo Kantorovičevu nejednakost (videti Kantorovič [1]):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k p_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{a_k}\right) \leqq \frac{(M+m)^2}{4\,Mm}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2 \tag{74}$$

sa jednakošću ako i samo ako postoji $\mathbf{I}\subset\{1,\ldots,n\}$ tako da je $p_k=\frac{1}{2}$, $a_k=M(k\in\mathbf{I}), a_k=m(k\notin\mathbf{I})$.

Specijalan slučaj ove nejednakosti je sledeća nejednakost:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \leqq \frac{(M+m)^2}{4\,Mm}\, n^2 \tag{75}$$

sa jednakošću ako i samo ako postoji skup $\mathbf{I}\subset\{1,\ldots,n\}$ koji sadrži $n/2$ elemenata i $a_k=M\,(k\in\mathbf{I})$, $a_k=m\,(k\notin\mathbf{I})$. Posebno, ako je n neparno, jednakost ne može da nastupi. Ovo je Schweitzerova nejednakost [1].

Henrici [1] je dokazao da nejednakost (75) implicira opštiju nejednakost (74); dovoljno je da se zadržimo na racionalnom nizu $\mathbf{p}$ i pretpostavimo da je $p_k=q_k/Q\ (q_k\ (1\leqq k\leqq n),\ Q$ celi brojevi). Tada jednostavna izračunavanja pokazuju da se (74) svodi na (75).

Isti autor je takođe dao direktan dokaz nejednakosti (74) zasnovan na metodu koji su koristili Pólya i Szegö da bi dokazali svoju nejednakost (videti nejednakost (84) koja dalje sleduje).

Odredimo α_k, $\beta_k\ (1\leqq k\leqq n)$ na sledeći način

$$a_k=\alpha_k M+\beta_k m,\quad a_k^{-1}=\alpha_k M^{-1}+\beta_k m^{-1}.$$

Bez teškoće se zaključuje da je $\alpha_k\geqq 0$, $\beta_k\geqq 0\ (1\leqq k\leqq n)$ i kako je

$$1=a_k a_k^{-1}=(\alpha_k M+\beta_k m)(\alpha_k M^{-1}+\beta_k m^{-1})=(\alpha_k+\beta_k)^2+\alpha_k\beta_k\frac{(M-m)^2}{Mm}, \tag{76}$$

imamo $\alpha_k+\beta_k\leqq 1\ (1\leqq k\leqq n)$. Ako stavimo $\alpha=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k p_k$, $\beta=\sum_{k=1}^{n}\beta_k p_k$, imamo

$$(\alpha+\beta)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k+\beta_k)p_k\leqq\sum_{k=1}^{n}p_k=1. \tag{77}$$

Leva strana nejednakosti (70) jednaka je

$$\begin{aligned}(\alpha M+\beta m)(\alpha M^{-1}+\beta m^{-1})&=(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta\frac{(M-m)^2}{Mm}\\ &\leqq(\alpha+\beta)^2\left(1+\frac{(M-m)^2}{4\,Mm}\right) \qquad \text{(na osnovu } GA)\\ &\leqq(\alpha+\beta)^2\frac{(M+m)^2}{4\,Mm}\\ &\leqq\frac{(M+m)^2}{4\,Mm},\end{aligned}$$

čime je završen dokaz (74). Jednakost može nastupiti samo ako je $\alpha+\beta=1$ i koristeći uslove za jednakost u GA, ako je $\alpha=\beta$. Iz (77) prvi uslovi impliciraju $\alpha_k+\beta_k=1\ (1\leqq k\leqq n)$ što na osnovu (76) daje da za svako k je $\alpha_k=0$ ili $\beta_k=0$ pa stoga $a_k=M$ ili $a_k=m\ (1\leqq k\leqq n)$. Ako je $\mathbf{I}$ takav podskup indeksa da je $a_k=M\,(k\in\mathbf{I})$, drugi uslov implicira $\sum_{k\in\mathbf{I}}p_k=\sum_{k\notin\mathbf{I}}p_k=y^{1/2}$.

2° Beckenbach [3] je generalisao teoremu 41 pretpostavljajući da je $m\leqq a_k\leqq M\ (n_0\leqq k\leqq n)$ za neko $n_0\ (0\leqq n_0\leqq n)$. Njegov članak sadrži alternativni dokaz Spechtovog rezultata koji će biti dokazan u IV.6.2.

3° Drugi dokaz teoreme 41 koji je dao Goldman [1] zasnovan je na nejednakosti (koju je za $r=-1$, $s=1$ dobio Rennie [1]): Ako je $rs<0$, važi nejednakost

$$(78)\qquad (M^s-m^s)\, M_n^{[r]}(a;\, p)^r-(M^r-m^r)\, M_n^{[s]}(a;\, p)^s \leqq M^s m^r - M^r m^s.$$

Ako je $rs>0$, važi suprotna nejednakost. Da bismo izveli (65), napišimo (78) u obliku

$$\left(-\frac{r}{s-r}\right)\left(\frac{M^r-m^r}{rm^r}\right)\left(\frac{M_n^{[s]}}{m}\right)^s+\left(\frac{s}{s-r}\right)\left(\frac{M^s-m^s}{sm^s}\right)\left(\frac{M_n^{[r]}}{m}\right)^r \leqq \frac{M^s m^r-M^r m^s}{(s-r)\, m^r m^s},$$

odakle primenom GA dobijamo

$$\left(\left(\frac{M^r-m^r}{rm^r}\right)\left(\frac{M_n^{[s]}}{m}\right)^s\right)^{-\frac{r}{s-r}}\left(\left(\frac{M^s-m^s}{sm^s}\right)\left(\frac{M_n^{[r]}}{m}\right)^r\right)^{\frac{s}{s-r}} \leqq \frac{M^s m^r-M^r m^s}{(s-r)\, m^r m^s}$$

tj. (65).

4° Slučaj $r=1$, $s>1$ ranije je posmatrao Knopp [3].

5° Sledeće relevantne reference su Diaz i Metcalf [1], Diaz, Goldman i Metcalf [1], Lupaş [1], Marshall i Olkin [1], Mond [1], Mond i Shisha [1—4], Newman [1], Cargo [2].

5.2. Granice za razliku potencijalnih sredina. Neka je

$$D_n^{[r,\, s]}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) = M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) - M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}).$$

Tada, na osnovu $(r;\, s)$, imamo

$$D_n^{[r,\, s]}(\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{p}) \geqq 0 \qquad (r\leqq s),$$

pa slično kao za Q možemo postaviti pitanje da li postoji gornja granica za D nezavisna od n, $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{a}$ pod uslovom da je $\boldsymbol{a}$ pogodno izabrano. Jednu takvu granicu dobili su Mond i Shisha [1, 2] i ona će biti data u teoremi 44.

Najpre ćemo dokazati dve leme.

Lema 42. *Neka je* $0<m<M$, $-\infty<r<s<+\infty$,

$$(79)\qquad \alpha=\frac{M^r-m^r}{M^s-m^s},\qquad \beta=\frac{M^s m^r-M^r m^s}{M^s-m^s}$$

i

$$f(x)=r\,(x^r-\alpha x^s-\beta);$$

tada je $f(x)\geqq 0$ $(m<x<M)$ *sa jednakošću ako i samo ako je* $x=m$ *ili* $x=M$.

Dokaz. Jednostavna izračunavanja pokazuju da f' ima jedinstvenu nulu na $(0,\, +\infty)$ i, kako je $f(m)=f(M)=0$, dovoljno je dokazati da je $f'(m)>0$.

Kako je $f'(m)=rm^{r-1}(r-\alpha s m^{s-r})$, koristeći (79) i stavljajući $x=M/m$ dovoljno je pokazati da je $g(x)>0$ za $x>1$, gde je $g(x)=rx^s-sx^r-(r-s)$. Kako je $g(1)=0$ i $g'(x)=rsx^{r-1}(x^{s-r}-1)>0$ za $x>1$, dokaz je završen.

Lema 43. *Ako* M, m, α, β, r, s *imaju ista značenja kao u lemi* 42 *i ako je*

$$\begin{aligned} h(x) &= x^{1/s}-(\alpha x+\beta)^{1/r} && (rs\neq 0),\\ &= x^{1/s}-m\left(\frac{M}{m}\right)^{(x-m^s)/(M^s-m^s)} && (r=0),\\ &= m\left(\frac{M}{m}\right)^{(x-m^r)/(M^r-m^r)}-x^{1/r} && (s=0), \end{aligned}$$

kao i

$$\mathbf{I}=[\min(M^s,\, m^s),\ \max(M^s,\, m^s)]\quad (s\neq 0),\qquad \mathbf{I}=[M^r,\, m^r]\quad (s=0),$$

tada postoji jedinstveno $y \in \mathring{\mathbf{I}}$, *u kome* h *uzima maksimalnu vrednost u* $\mathbf{I}$. *Dalje,*

$$h(y) = (\theta M^s + (1-\theta) m^s)^{1/s} - (\theta M^r + (1-\theta) m^r)^{1/r} \qquad (rs \neq 0),$$

$$= (\theta M^s + (1-\theta) m^s)^{1/s} - M^\theta m^{s-1-\theta} \qquad (r = 0),$$

$$= M^\theta m^{1-\theta} - (\theta M^r + (1-\theta) m^r) \qquad (s = 0),$$

gde je

$$\theta = \frac{y - m^s}{M^s - m^s} \quad (s \neq 0), \qquad \theta = \frac{y - m^r}{M^r - m^r} \quad (s = 0).$$

Dokaz. (i) $rs \neq 0$. Kako je $h(m^s) = h(M^s) = 0$ i $h(x) > 0$ $(x \in \mathring{\mathbf{I}})$, jasno je da $y \in \mathring{\mathbf{I}}$ i $h'(y) = 0$.

Pretpostavimo da postoje dve tačke y_1, y_2 $(y_1 < y_2)$ takve da je $h(y_1) = h(y_2) = \sup \{h(x) \mid x \in \mathbf{I}\}$. Ako je $h'(x) = 0$, jednostavna izračunavanja pokazuju da je tada

$$h''(x) = s^{-1} x^{(1-2s)/s} (ax + b)^{-1} (a(s^{-1} - r^{-1}) x + b(s^{-1} - 1)).$$

Kako je $h''(y_i) \leqq 0$ $(i = 1, 2)$, iz prethodnog sleduje da je

$$s^{-1} (a(s^{-1} - r^{-1}) y_i + b(s^{-1} - 1)) \leqq 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Odavde sleduje da ako je $y_1 < x < y_2$ i $h'(x) = 0$, tada je $h''(x) < 0$. Kako, međutim, h mora da dostigne minimum u (y_1, y_2), ovo dovodi do kontradikcije, čime je dokazana jedinstvenost tačke y.

(ii) Slučajevi $r = 0$, $s = 0$ mogu da se ispituju na analogan način.

(iii) Preostali deo leme dokazuje se jednostavnim izračunavanjima.

Teorema 44. *Neka su* $M, m, \alpha, \beta, r, s, h, y, \theta$ *isti kao u lemi* 43. *Ako je* $n > 1$, $m \leqq a_k \leqq M$ $(1 \leqq k \leqq n)$, *tada je*

$$D_n^{[r,s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \leqq h(y) \tag{80}$$

sa jednakošću ako i samo ako postoji $\mathbf{I} \subset \{1, \ldots, n\}$ *tako da je* $\sum_{k \in \mathbf{I}} p_k = \theta$, $a_k = M$ $(k \in \mathbf{I})$, $a_k = m$ $(k \notin \mathbf{I})$.

Dokaz. (i) $rs \neq 0$. Primenom leme 42 dobijamo

$$D_n^{[r,s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \leqq M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) - (\alpha M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) + \beta)^{1/r} = h(M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^s), \tag{81}$$

sa jednakošću ako i samo ako je svako a_k jednako M ili m. Ovo, na osnovu leme 43, daje (80) sa jednakošću ako i samo ako je svako a_k jednako M ili m i $y = \sum_{k=1}^{n} p_k a_k^s$, što posle jednostavnih izračunavanja dovodi do dokaza teoreme u ovom slučaju.

(ii) Ako umesto leme 42 primetimo da je za $m \leqq x \leqq M$, $q > 0$

$$x^q \geqq M^{q(x^s - m^s)/(M^s - m^s)} m^{q(M^s - x^s)/(M^s - m^s)}$$

sa jednakošću ako i samo ako je x jednako M ili m, tada takođe možemo dobiti (81) u slučajevima $r = 0$ ili $s = 0$, čime je dokaz završen.

PRIMEDBA: 1° Slučaj $r=1$, $s>0$ ranije je posmatrao Knopp [3]. Ovaj slučaj se bez teškoće dobija iz teoreme I. 34 (videti Mitrinović—Vasić [13]).

5.3. Konverzne nejednakosti za nejednakosti *C*, *H* i *M*. Ove konverzne nejednakosti mogu se dobiti kao posledice prethodnih rezultata.

Teorema 45. *Neka su* $\boldsymbol{b}$ *i* $\boldsymbol{c}$ *dve pozitivne n-torke,* $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $0<m<M$, $\beta=\frac{M}{m}$ *i pretpostavimo da je* $m\leq\frac{b_k^{1/q}}{c_k^{1/q}}\leq M$ $(1\leq k\leq n)$. *Tada je*

$$(82)\qquad \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}\leq\Big(\frac{p+q}{\beta^p-\beta^q}\Big)\Big(\frac{q}{1-\beta^{-q}}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{\beta^p-1}{p}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Neka je $\theta=\frac{1}{p+q}\Big(\frac{q}{1-\beta^{-q}}-\frac{p}{\beta^p-1}\Big)$. *Tada jednakost u* (82) *nastupa ako i samo ako postoji* $\mathrm{I}\subset\{1,\ldots,n\}$ *tako da je* $(1-\theta)\sum_{k\in \mathrm{I}} b_k c_k=\theta\sum_{k\notin \mathrm{I}} b_k c_k$ *i* $b_k^{1/q}c_k^{-1/q}$ *je jednako M kada* $k\in\mathrm{I}$ *odnosno jednako m ako je* $k\notin\mathrm{I}$.

Dokaz. Ovaj rezultat se dobija iz teoreme 41 stavljajući $s=p$, $r=-q$, $a_k=b_k^{1/q}c_k^{-1/p}$ i $p_k=b_k c_k\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\Big)^{-1}$ $(1\leq k\leq n)$.

PRIMEDBE: 1° Pretpostavimo da je $0\leqq m_1\leqq b_k\leqq M_1$, $0<m_2\leqq c_k\leqq M_2$ $(1\leqq k\leqq n)$, pri čemu je $m_1m_2<M_1M_2$. Tada, ako je $\boldsymbol{p}$ proizvoljna, pozitivna n-torka važi

$$\Big(\frac{m_1}{M_2}\Big)^{1/2}\leqq\frac{(b_k p_k)^{1/2}}{(c_k p_k)^{1/2}}\leqq\Big(\frac{M_1}{m_2}\Big)^{1/2}$$

pa iz nejednakosti (82) sleduje

$$(83)\qquad \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 p_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k^2 p_k^2\Big)\leqq\frac{(m_1m_2+M_1M_2)^2}{4m_1m_2M_1M_2}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k p_k^2\Big)^2.$$

O ovoj nejednakosti videti Watson [1] i Greub i Rheinboldt [1]. Slučaj $p_1=\cdots=p_n=1$ dokazali su Pólya i Szegö [1]:

$$(84)\qquad \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\Big)\leqq\frac{1}{4}\Big(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}+\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\Big)^2\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\Big)^2.$$

2° Neposredno sleduje da je (84) specijalan slučaj Kantorovičeve nejednakosti (74). Važi i obrnuto.

3° Svaka od nejednakosti (74), (83) i (84) može se izvesti iz integralnog oblika nejednakosti (75) (videti M, p. 60).

4° Alternativni dokaz ovih nejednakosti dali su Diaz i Metcalf [1] koji su najpre dokazali sledeću elementarnu nejednakost.

Teorema 46. *Ako su* $\boldsymbol{b}$ *i* $\boldsymbol{c}$ *pozitivne n-torke takve da je* $0<m\leq\frac{c_k}{b_k}\leq M$ $(1\leq k\leq n)$, *tada je*

$$(85)\qquad \sum_{k=1}^{n} c_k^2+mM\sum_{k=1}^{n} b_k^2\leq(m+M)\sum_{k=1}^{n} b_k c_k$$

sa jednakošću ako i samo ako je $\frac{c_k}{b_k}=m$ *ili* M, *za svako* k $(1\leq k\leq n)$.

Dokaz. Iz pretpostavki teoreme sleduje

$$b_k^2\left(\frac{c_k}{b_k}-m\right)\left(M-\frac{c_k}{b_k}\right)\geqq 0 \quad (1\leqq k\leqq n),$$

odakle sumiranjem po k dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n}(c_k-mb_k)(M-c_k)\geqq 0,$$

a to je upravo (85).

Pokažimo sada kako se (84) dobija iz (85). Stavimo $m=\frac{m_2}{M_1}$, $M=\frac{M_2}{m_1}$. Tada iz (85), posle jednostavnih transformacija, dolazimo do nejednakosti (84).

Teorema 47. *Neka su $p, q, m, M, \beta, \theta$ isti kao u teoremi* 45 *i neka su* $\boldsymbol{b}$ *i* $\boldsymbol{c}$ *dve pozitivne n-torke takve da je*

$$m\leqq\left(\frac{b_k}{b_k+c_k}\right)^{1/q}\leqq M, \qquad m\leqq\left(\frac{c_k}{b_k+c_k}\right)^{1/q}\leqq M.$$

Tada je

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}c_k{}^p\right)^{1/p}}{\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k+c_k)^p\right)^{1/p}}\leqq\frac{p+q}{\beta^p-\beta^{-q}}\left(\frac{q}{1-\beta^{-q}}\right)^{1/p}\left(\frac{\beta^p-1}{p}\right)^{1/q}$$

sa jednakošću ako i samo ako: (*i*) *postoji* $\mathbf{I}\subset\{1,\ldots,n\}$ *tako da je*

$$(1-\theta)\sum_{k\in\mathbf{I}}b_k(b_k+c_k)^{p-1}=\theta\sum_{k\notin\mathbf{I}}b_k(b_k+c_k)^{p-1}\quad i\quad\left(\frac{b_k}{b_k+c_k}\right)^{1/q}=M\quad(k\in\mathbf{I}),$$

$$\frac{b_k}{b_k+c_k}^{1/q}=m\quad(k\notin\mathbf{I})\ i$$

(ii) *postoji* $\mathbf{J}\subset\{1,\ldots,n\}$ *tako da je*

$$(1-\theta)\sum_{k\in\mathbf{J}}c_k(b_k+c_k)^{p-1}=\theta\sum_{k\notin\mathbf{J}}c_k(b_k+c_k)^{p-1}\quad i\quad\left(\frac{c_k}{b_k+c_k}\right)^{1/q}=M\quad(k\in\mathbf{J}),$$

$$\left(\frac{c_k}{b_k+c_k}\right)^{1/q}=m\quad(k\notin\mathbf{J}).$$

Dokaz. Označimo desnu stranu u (82) sa E. Na osnovu teoreme 45 imamo

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k+c_k)^p=\sum_{k=1}^{n}b_k(b_k+c_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}c_k(b_k+c_k)^{p-1}$$

$$\geqq E^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k+c_k)^p\right)^{1/q}+E^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}c_k{}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k+c_k)^p\right)^{1/q},$$

odakle sleduje navedeni rezultat.

PRIMEDBA: 5° Ovaj rezultat su izveli Mond i Shisha [2].

Teorema 47. *Neka su b i c dve pozitivne n-torke,* $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $0<m\leqq \frac{a_k^{1/q}}{b_k^{1/p}}\leqq M$ $(1\leqq k\leqq n)$. *Tada uz oznake iz leme* 43 *imamo*

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k{}^p}{\sum_{k=1}^{n} b_k c_k}\right)^{1/p}-\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k c_k}{\sum_{k=1}^{n} c_k{}^q}\right)^{1/q}\leqq h(y),$$

sa jednakošću ako i samo ako postoji $\mathbf{I}\subset\{1,\ldots,n\}$, *tako da je*

$$(1-\theta)\sum_{k\in \mathbf{I}} b_k c_k=\theta\sum_{k\notin \mathbf{I}} b_k c_k \quad i \quad \frac{b_k{}^{1/q}}{c_k{}^{1/p}}=M\ (k\in\mathbf{I}) \quad i \quad \frac{b_k{}^{1/q}}{c_k{}^{1/p}}=m \quad (k\notin\mathbf{I}).$$

Dokaz. Ovaj rezultat sleduje iz teoreme 44 na isti način kao što teorema 45 sleduje iz teoreme 41.

Primedba: 6° U slučaju $p=1$ i $p=2$ konverzne nejednakosti drugačijeg oblika dobio je Benedetti ([1], [2]) koji je ispitivao maksimalne moguće vrednosti ovih sredina ako su članovi $\boldsymbol{a}$ ograničeni na jednom konačnom skupu vrednosti. Međutim, ovo izlazi iz okvira ove knjige. Za dalje reference o ovoj materiji videti knjige BB i M.

Poglavlje IV:

Kvaziaritmetičke sredine

1. DEFINICIJE I JEDNOSTAVNE OSOBINE

Ako stavimo $\Phi(x)=x^r\,(r\neq 0)$, $\Phi(x)=\log x\,(r=0)$, imamo

$$M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=\Phi^{-1}\left(\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_n\,\Phi(a_k)\right),$$

što sugerira sledeću definiciju:

Definicija 1. Neka je $m_1, m_2\in\overline{\mathbf{R}}$ i neka je $M:[m_1, m_2]\to\overline{\mathbf{R}}$ neprekidna i strikno monotona funkcija; neka je $\boldsymbol{a}$ n-torka takva da je $m_1\leqq a_k\leqq m_2\,(1\leqq k\leqq n)$, $\boldsymbol{p}$ nenegativna n-torka sa $P_n=1$. Tada je kvaziaritmetička M-sredina od $\boldsymbol{a}$ sa težinama $\boldsymbol{p}$ definisana sa

$$(1)\qquad M_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=M^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\,M(a_k)\right)=M^{-1}\Big(A_n\big(M(\boldsymbol{a});\,\boldsymbol{p}\big)\Big).$$

PRIMEDBE: 1° Koristićemo se oznakama M_n i $M_I(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$ onako kako je objašnjeno u II. 3.4 ako to ne bi stvaralo zabunu.

2° Pod pretpostavkama u definiciji 1, M^{-1} postoji, neprekidna je i strogo monotona funkcija na segmentu $\big[\min\big(M(m_1),\,M(m_2)\big),\,\max\big(M(m_1),\,M(m_2)\big)\big]$.

3° Pošto smo zahtevali da a_k pripada domenu M, nismo pretpostavljali da je $\boldsymbol{a}$ pozitivno. Naravno, ako je $[m_1,\ m_2]\subset\mathbf{R}_+^*$, to će biti slučaj. Primetimo takođe da m_1, m_2 ne moraju da su konačni dok elementi od $\boldsymbol{a}$ moraju biti konačni.

4° Kao što smo primetili, ako je $M(x)=x^r\,(r\neq 0)$, $M(x)=\log x\,(r=0)$, $[m_1,\ m_2]=[0,\ +\infty]$, tada je $M_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$. Drugi primer dobijamo uzimajući da je $M(x)=g^x\,(g\neq 1)$, $M(x)=x\,(g=1)$, $[m_1,\ m_2]=[-\infty,\ +\infty]$. Tada je

$$(2)\qquad M_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=M_{n,g}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=\log_g\left(\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_k\,g^{a_k}\right)\qquad(g\neq 1),$$

$$=A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\qquad(g=1).$$

Ove sredine zovu se eksponencijalne sredine. Njih su detaljno proučavali Bonferroni [1] i Pizzetti [1]. Takođe videti: Gini [6]. Od interesa su i druge sredine koje su ispitivali ovi autori, a koje su takođe specijalni slučajevi kvaziaritmetičkih sredina. Tako, ako μ označava sredinu, stavljajući $M(x)=g^{1/x}\,(g\neq 0,\ 1;\ g>0)$, imamo

$$g^{1/\mu}=\sum_{k=1}^{n} p_k\,g^{1/a_k}\qquad\text{(radikalne sredine);}$$

ako je $M(x)=x^x$:

$$\mu^{\mu}=\sum_{k=1}^{n} p_k\,a_k^{a_k}\qquad\text{(bazično-eksponencijalne sredine);}$$

i ako je $M(x)=x^{1/x}$:

$$\mu^{1/\mu}=\sum_{k=1}^{n} p_k\, a_k^{a_k} \qquad \text{(bazično-radikalne sredine).}$$

Primetimo da u poslednja dva slučaja, da bismo obezbedili monotoniju M, moramo $\boldsymbol{a}$ ograničiti na sledeći način: $a_k \geqq 1/e$ $(1 \leqq k \leqq n)$.

Navešćemo neke nejednakosti koje važe za ovako definisane sredine.

(a) Nejednakost između bazično-eksponencijalne i eksponencijalne sredine: Ako je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, važi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \geqq \sum_{i=1}^{n} (A_n(\boldsymbol{a}))^{a_i}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

(b) Nejednakost između bazično-eksponencijalne i potencijalne sredine: Ako je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, tada je

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{a_i}}{n} \geqq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{A_n(\boldsymbol{a})}}{n}\right)^{1/A_n(\boldsymbol{a})}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

(c) Nejednakost između radikalne i bazično-radikalne sredine: Ako je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, tada je

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/a_i} \leqq \sum_{i=1}^{n} (A_n(\boldsymbol{a}))^{1/a_i}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

(d) Nejednakost između aritmetičke i eksponencijalne sredine: Ako je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, tada je

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq \sum_{i=1}^{n} \left(M_n^{[r]}(\boldsymbol{a})\right)^{a_i},$$

gde je $r<\max x$ i $x=\left\{a_k \mid a_k< M_n^{[r]}(\boldsymbol{a})\right\}$, sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

Dokazi ovih nejednakosti mogu se naći u Pizzettievom članku [1]. Ove nejednakosti mogu se isto tako dokazati primenom opšteg rezultata, izloženog u 2.

5° Od interesa su trigonometrijske sredine koje su posebno ispitivali Pratelli [1] i Jecklin [9]. Ove sredine su takođe specijalni slučajevi kvaziaritmetičkih sredina.

Ako stavimo $M(x)=\cos x$ i $0 \leqq a_i < \frac{\pi}{2}$, dobijamo sinusnu sredinu S_n:

$$S_n(\boldsymbol{a})=\arcsin \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \sin a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

Ako stavimo $M(x)=\cos x$ i $0 \leqq a_i < \frac{\pi}{2}$, dobijamo kosinusnu sredinu C_n:

$$C_n(\boldsymbol{a})=\arccos \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cos a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

Ako stavimo $M(x)=\operatorname{tg} x$ i $0<a_i<\frac{\pi}{2}$, dobijamo tangensnu sredinu T_n:

$$T_n(a)=\operatorname{arctg}\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \operatorname{tg} a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

Najzad, ako stavimo $M(x)=\operatorname{cotg} x$ i $0<a_i<\frac{\pi}{2}$, dobijamo kotangensnu sredinu CT_n:

$$CT_n(a)=\operatorname{arccotg}\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \operatorname{cotg} a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

Sada ćemo navesti neke nejednakosti koje važe za aritmetičku, geometrijsku, harmonijsku, kvadratnu (potencijalnu sredinu za $r=2$), sinusnu, kosinusnu, tangensnu i kotangensnu sredinu:

Ako je $\boldsymbol{a}$ n-torka takva da je $a_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $(i=1, \ldots, n)$ i ako svi a_i nisu međusobno jednaki, važe nejednakosti

$$H<CT<G<S<A<C<T<Q \quad \text{za} \quad x_{TC} \leqq a_i \leqq x_{TQ};$$
$$H<CT<G<S<A<C<Q<T \quad \text{za} \quad x_{TQ} \leqq a_i \leqq x_{GS};$$
$$H<CT<S<G<A<C<Q<T \quad \text{za} \quad x_{GS} \leqq a_i \leqq x_{CTS};$$
$$H<S<CT<G<A<C<Q<T \quad \text{za} \quad x_{CTS} \leqq a_i \leqq x_{HS};$$
$$S<H<CT<G<A<C<Q<T \quad \text{za} \quad x_{HS} \leqq a_i \leqq x_{CTG};$$
$$S<H<G<CT<A<C<Q<T \quad \text{za} \quad x_{CTG} \leqq a_i \leqq \frac{\pi}{2},$$

gde A, G, H, Q, S, C, T, CT označavaju redom aritmetičku, geometrijsku, harmonijsku, kvadratnu, sinusnu, kosinusnu, tangensnu i kotangensnu sredinu u slučajevima jednakih težina. Dalje x_{TC} označava rešenje jednačine $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, x_{TQ} jednačine $\operatorname{cotg} x=2x$, x_{GS} jednačine $\operatorname{cotg} x=x$, x_{CTS} jednačine $\operatorname{cotg} x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, x_{HS} jednačine $\operatorname{tg} x=\frac{2}{x}$ i x_{CTG} rešenje jednačine $\operatorname{tg} x=2x$ (sva ova rešenja treba uzeti iz $(0, \pi/2)$).

Dokazi ovih nejednakosti mogu se naći u članku [9] Jecklina. One se, takođe, mogu dokazati primenom opšteg rezultata iz IV. 2.2.

6° Još važnije od gornje primedbe 3° je činjenica da dozvoljavamo da $\boldsymbol{p}$ bude ne samo pozitivno nego i negativno (sa $P_n=1$, tako da svi p_k nisu nule). Posledice ove generalizacije na ranije rezultate nije teško analizirati. Razmotrimo tri osnovne nejednakosti $(r; s)$, $\boldsymbol{H}$ u obliku (III. 28) i $\boldsymbol{M}$ u obliku (III. 30) (samo za konačno r i s). Očigledno, ovo proširenje znači da prvobitna tvrđenja za sredine reda r uključuju nejednakosti reda k $(1 \leqq k \leqq n)$. Što se tiče slučajeva jednakosti, oni moraju biti preformulisani kao što sleduje: Potrebno je da uslovi za jednakost budu primenjeni samo na one članove niza koji su pridruženi težinama različitim od nule. (Tako, na primer, za $(r; s)$ za izvesno α važi $a_i=\alpha$ za svako i za koje $p_i>0$). Posebno, jednakost važi ako je $p_i=1$ za neko i, dok je $p_k=0$ za $k \neq i$.

Što se tiče Radoove nejednakosti (II. 38), na primer, ili je $p_n=0$ u kom slučaju je nejednakost trivijalna, što predstavlja jedan drugi iskaz jednakosti, ili je $p_n \neq 0$ kada, kao ranije, prethodna tvrdnja uključuje sve nejednakosti za $2 \leqq k \leqq n$ i kada slučaj jednakosti ostaje nepromenjen. Na sličan način mogu se diskutovati nejednakosti kao (III. 46), (III. 44), itd.

U sledećim razmatranjima biće pretpostavljeno da svi nizovi $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}$ i funkcije M zadovoljavaju različite uslove definicije 1. Međutim, u primenama na partikularne slučajeve, i u diskusiji nejednakosti tipa Radoa, mi ćemo, radi uprošćenja, obično uzimati da je $\boldsymbol{p}$ pozitivna n-torka, ne pretpostavljajući da je $P_n = 1$. Dalje, u svim diskusijama koje se odnose na više sredina, nizovi $\boldsymbol{a}$ moraju očigledno biti ograničeni na preseke pridruženih intervala $[m_1, m_2]$.

Sledeća lema daje izvesne jednostavne osobine kvaziaritmetičkih sredina.

Lema 2. (a) *Ako je* $a_1 = \cdots = a_n = m$, $m_1 < m < m_2$, *tada je* $M_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = m$.

(b) *Ako je* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, *tada je* $M_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \leqq M_n(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})$ *sa jednakošću ako i samo ako je* $a_i = b_i$, *pri čemu je* $p_i > 0$.

(c) *Postoji jedinstveno* $m\,(\min(\boldsymbol{a}) \leqq m \leqq \max(\boldsymbol{a}))$, *tako da je* $M(m) = \sum_{k=1}^{n} p_k M(a_k)$. *Pored toga, osim ako su svi* a_i *međusobno jednaki kada je* $p_i > 0$, *postoje* a_i *koji su manji od* m *i oni koji su veći od* m.

(d) *Ako je* $n \geqq 2$ *i ako su dati* $\boldsymbol{a}$ *i* $m\,(\min(\boldsymbol{a}) \leqq m \leqq \max(\boldsymbol{a}))$, *postoji* $\boldsymbol{p}$ *tako da je* $M_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = m$; $\boldsymbol{p}$ *je jedinstveno osim ako je* $n = 2$.

(e) *Ako je* $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{q}$, *tada je* $M_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \leqq M_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})$.

Dokaz. (a) i (b) je trivijalno.

(c) neposredno sleduje iz definicije 1 i činjenice da je $\sum_{k=1}^{n} p_k \big(M(m) - M(a_k)\big) = 0$, što povlači, osim u slučaju kada su svi članovi zbira jednaki nuli, postojanje i članova koji su pozitivni i članova koji su negativni.

(d) je neposredna posledica činjenice da je m za dato $\boldsymbol{a}$ neprekidna funkcija za kompaktan skup p na zatvorenom intervalu $[\min(\boldsymbol{a}), \max(\boldsymbol{a})]$.

PRIMEDBE: 7° Ova lema opravdava korišćenje reči sredina u definiciji 1 i uopštava teoreme II. 2 (d), II. 5 (d) i III. 2 (a).

8° Isto tako ova lema tvrdi da je za dato M kvaziaritmetička sredina od $\boldsymbol{a}$ sa težinom $\boldsymbol{p}$ određena. Stoga je prirodno postaviti pitanje da li i obrnuto, poznavanje svih sredina određuje M; ili što je ekvivalentno, kada je za dve funkcije F i G, F sredina od $\boldsymbol{a}$ sa težinom $\boldsymbol{p}$ jednaka G sredini sa težinom $\boldsymbol{p}$, da li je tada F identički jednako G?

(e) je jednostavna posledica činjenice da je M striktno monotona funkcija.

Teorema 3. *Da bi za svako* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *važilo* $F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$, *potrebno je i dovoljno da za neko realno* $\alpha\,(\alpha \neq 0)$ *i* β *važi* $F = \alpha G + \beta$.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $F = \alpha G + \beta\,(\alpha \neq 0)$. Tada je

$$F\big(F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) = \sum_{k=1}^{n} p_k F(a_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \big(\alpha G(a_k) + \beta\big) = \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} p_k G(a_k)\right) + \beta$$
$$= \alpha G\big(G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) + \beta = F\big(G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big).$$

Odavde, na osnovu leme 2(c) imamo $F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$.

(ii) Dokažimo sada obrnuto tvrđenje. Neka je dato $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$, gde je $p_1 + p_2 = 1$. Pretpostavimo da je $F_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}) = G_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})$ za svako $\boldsymbol{a}$, tj. da je, za svako $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $F^{-1}\big(p_1 F(a_1) + p_2 F(a_2)\big) = G^{-1}\big(p_1 G(a_1) + p_2 G(a_2)\big)$. Izmenimo oznake, stavljajući $\Phi = F \circ G$, $x_1 = F(a_1)$, $x_2 = F(a_2)$. Tada zaključujemo da za svako (x_1, x_2) važi

$$\Phi(p_1 x_1 + p_2 x_2) = p_1 \Phi(x_1) + p_2 \Phi(x_2).$$

Na osnovu ovog (Aczél [21, p. 49]) zaključujemo da je Φ afina funkcija, tj. da je $\Phi(x)=\alpha x+\beta$ za neko α i β. Dakle, $F\circ G^{-1}(x)=\alpha x+\beta$, tj. $F(x)=\alpha G(x)+\beta$.

PRIMEDBE: 9° Kako je $-M$ linearna funkcija od M, mogućno je zahtevati u definiciji 1 da je M striktno rastuća.

10° Primetimo da se, primenom ovog rezultata, geometrijska sredina može prirodnije uklopiti u familiju potencijalnih sredina. Stavimo sada

$$F^{[r]}(x)=\int_1^x t^{r-1}\,\mathrm{d}t=\frac{x^r-1}{r}\quad (r\neq 0),\qquad F^{[0]}(x)=\log x.$$

Tada za $r=0$ imamo $F_n^{[0]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=M_n^{[0]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$ i za $r\neq 0$, $F_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$ na osnovu teoreme 3. Sličan postupak može da se iskoristi da bi se $M_{n,1}$ uklopilo u skalu $M_{n,g}$ sredina (videti primedbu 4°).

11° Kao primenu rezultata teoreme 3, mogućno je definisati metriku u klasi C neprekidnih monotono rastućih funkcija na $[m, M]$ normalizovanih tako da, ako $F\in C$, važi $F(m)=m$, $F(M)=M$. Metrika je definisana na sledeći način: $\rho(F, G)=\sup\{t\mid t=|F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})-G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})|$, $p>0$; $P_n=1$, $m\leq a_i\leq M\}$, gde je n dati prirodan broj. (O ovome videti Cargo i Shisha [2]). Ova metrika je homomorfna sa metričkim prostorom C dobijenim korišćenjem uobičajene sup norme. Ovaj prostor je ograničen ali ne totalno ograničen metrički prostor.

12° Ove sredine su detaljno ispitivane u HLP. Takođe se mogu naći i u S. Teoremu 3 dokazali su Knopp [2] i Jessen [1]; izvesni elementarni komentari o njima mogu se naći kod Jecklina [3].

Više puta je do sada isticano da su potencijalne sredine specijalni slučajevi ovde uvedenih opštijih sredina. Sada ćemo pokazati da su one jedine sredine koje imaju izvesna svojstva homogenosti (Nagumo [1], de Finetti [1], Jessen [3]).

Teorema 4. *Neka je $M:(0, +\infty)\to\mathbf{R}$ neprekidna i strogo monotona funkcija i pretpostavimo da je $M_n(k\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=kM_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$ za svako $k>0$ i sve pozitivne n-torke $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{p}$. Tada, za svako pozitivno $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{p}$ i neko $r\,(-\infty<r+\infty)$, važi $M_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$.*

Dokaz. Potencijalne sredine očigledno su homogene u ovom smislu. Prema teoremi 3 možemo pretpostaviti da je

$$M(1)=0. \tag{3}$$

Tada je, na osnovu pretpostavki, $M_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=k^{-1}M_n(k\,\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$, gde je $F(x)=M(kx)$. Na osnovu teoreme 3 postoje $\alpha(k)$ i $\beta(k)$ $(\alpha(k)\neq 0)$, tako da je

$$F(x)=M(kx)=\alpha(k)\,M(x)+\beta(k).$$

Na osnovu (3) dobijamo $\beta(k)=M(k)$, pa za svako pozitivno x i y važi

$$M(xy)=\alpha(y)\,M(x)+M(y). \tag{4}$$

Permutujući x i y i oduzimajući od (4), dolazimo do

$$\frac{\alpha(x)-1}{M(x)}=\frac{\alpha(y)-1}{M(y)},$$

odakle se vidi da je funkcija $\dfrac{\alpha-L}{M}$ konstantna, recimo c. Smenjujući ovo u (4), dobijamo da M zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$M(xy)=cM(x)\,M(y)+M(x)+M(y). \tag{5}$$

Treba razlikovati dva slučaja: (i) $c=0$. Tada se (5) svodi na

$$M(xy)=M(x)+M(y). \tag{6}$$

Opšte neprekidno rešenje ove funkcionalne jednačine za $x>0$ je $M(x)=$ $=A\log x$ (videti: Aczél [21, p. 48]), odakle, na osnovu teoreme 3 imamo

$$M_n(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})=G_n(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p}).$$

(ii) $c\neq 0$. Tada stavljajući $F=1+cM$, iz (5) dobijamo $F(xy)=F(x)F(y)$. Opšte neprekidno rešenje ove jednačine je $F(x)=x^r$ (Aczél [21, p. 48]), pa je $M(x)=$ $=\dfrac{x^r-1}{c}$. Odatle, na osnovu teoreme 3, imamo $M_n(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})=M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})$.

Primedba: 13° Gornji dokaz dao je Jessen (HLP, p. 68) i on je jednostavniji od onog koji je dao de Finetti [1].

2. KOMPARABILNE SREDINE

2.1. Zadržaćemo se na generalizaciji nejednakosti $(r;\,s)$, koja važi za kvaziaritmetičke sredine. Rezultat koji ćemo dobiti, teorema 8, daje jedan drugi dokaz nejednakosti GA, kao i dokaz $(r;\,s)$-nejednakosti.

Koliko nam je poznato, prvi je Jessen [1], [2] došao do ovog rezultata. Takođe videti HLP, 3.4 i 3.9.

Definicija 5. *Za F i G sredine kažemo da su komparabilne (uporedljive) ako funkcije F i G imaju iste domene i ako je ili* $F_n(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\leqq G_n(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})$ *ili* $F_n(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\geqq$ $\geqq G_n(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})$ *za sve pogodno izabrane n-torke* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$.

Primedbe: 1° Nejednakost GA kazuje da su aritmetička i geometrijska sredina komparabilne. Nejednakost $(r;\,s)$ kazuje da su dve potencijalne sredine komparabilne.

2° Cilj ovog odeljka je da se nađu potrebni i dovoljni uslovi za F i G tako da bi F i G sredine bile komparabilne.

Lema 6. *Neka su F i G dve neprekidne funkcije na* $[\alpha,\,\beta]$. *Tada, ako je F strogo monotona i konveksna funkcija u odnosu na G, imamo*

$$G\big(F_n(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\big)\leqq A_n\big(G(\boldsymbol{a});\,\boldsymbol{p}\big) \tag{7}$$

za sve n-torke $\boldsymbol{p}$ *i* $\boldsymbol{a}$ *pod uslovom da je* $\alpha\leqq a_k\leqq\beta$ $(1\leqq k\leqq n)$. *Ako je F striktno konveksna u odnosu na G, jednakost u (7) važi ako i samo ako je* $p_i>0$ *i ako su svi* a_i *međusobno jednaki. Ako je F konkavna funkcija u odnosu na G, važi suprotna nejednakost.*

Dokaz. Stavimo $\boldsymbol{b}=F(\boldsymbol{a})$, $\Phi=G\circ F^{-1}$. Nejednakost (7) svodi se na

$$\Phi\big(A_n(\boldsymbol{b};\,\boldsymbol{p})\big)\leqq A_n\big(\Phi(\boldsymbol{b});\,\boldsymbol{p}\big),$$

što je, u stvari, nejednakost J. Drugi deo teoreme sleduje iz slučaja kada u J važi jednakost kao i iz činjenice da je $-\Phi$ konveksna kada je Φ konkavna funkcija.

Primedba: 3° Ovaj jednostavan rezultat bio je ponovo otkriven više puta (videti, na primer, Bonferroni [2], Bullen [1,8], Cargo [1], Shisha i Cargo [1], Chimenti [1], Jecklin [1,3], Lob [1], Watanabe [1]). Zbog slabih pretpostavki lema 6 može se primeniti na dobijanje rezultata do kojih se ne može doći pomoću teoreme 8 koja je kasnije navedena. Tako su Bonferroni i Giaccardi [1] primetili da je $x\mapsto F(x)=x\log x$ konkavna funkcija i stoga, na osnovu leme 6, imamo

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k \log a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k}\geqq \log\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\right).$$

Lob je koristeći $F(x)=\sin x$ $(0\leqq x\leqq \pi/2)$, dokazao nejednakos

$$\sin\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right)\geqq \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \sin a_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \qquad \left(0\leqq a_k\leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Posledica 7. *Ako je* $0\leqq r<s$, $\left(\frac{s-r}{s+r}\right)^{r/s}\leqq a_k$ $(1\leqq k\leqq n)$, *i ako je* $\boldsymbol{p}$ *pozitivna n-torka, tada je*

$$(8)\qquad \frac{P_n}{1+M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^s}\leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{1+a_k{}^s},$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. Ako stavimo $F(x)=x^r$ $(r\neq 0)$, $G(x)=\frac{1}{1+x^s}$, zaključujemo da je $G\circ F^{-1}$ striktno konveksna funkcija za $0<r<s$ i $x^{s/r}\geqq\frac{s-r}{s+r}$. Rezultat u ovim slučajevima sleduje iz leme 6. Ako je $F(x)=\log x$, dolazimo do rezultata za slučaj $r=0$.

PRIMEDBE: 4° Nejednakost (8) u partikularnom slučaju za jednake težine i $s=1$ i $r=0$ dao je Henrici [1]. Takođe videti Mitrinović i Vasić [8], Bullen [5], Kalajdžić [1].

5° Gornji rezultat zavisi od striktne konveksnosti funkcije Φ date sa $\Phi(x)=\frac{1}{1+x^{s/r}}$ $(s\geqq r>0)$ za $x^{s/r}\geqq\frac{s-r}{s+r}$ ili $\Psi(x)=\frac{1}{1+e^{sx}}$ $(s>0)$ za $x\geqq 1$. Ako posmatramo funkciju f takvu da je $x\mapsto\frac{1}{1+f(x)}$ striktno konveksna za $\alpha\leqq x\leqq\beta$, nejednakost (8) možemo generalisati na sledeći način:

$$(9)\qquad \frac{P_n}{1+f(A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{1+f(a_k)},$$

gde je $\alpha\leqq a_k\leqq\beta$ $(1\leqq k\leqq n)$. Jednakost važi ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

Teorema 8. *Neka su F i G dve striktno monotone neprekidne funkcije definisane na istom intervalu, i neka je G rastuća funkcija. Tada za sve odgovarajuće n-torke* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *važi*

$$(10)\qquad F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\leqq G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$$

ako i samo ako je F konveksna u odnosu na G. Ako je F striktno konveksna u odnosu na G, jednakost važi ako i samo ako su svi a_i *jednaki uz* $p_i>0$. *Ako je G opadajuća ili F je konkavna u odnosu na F, u* (10) *važi suprotna nejednakost.*

Dokaz. Direktno sleduje iz leme 6 i definicije konveksnosti.

Posledica 9. *F-sredina i G-sredina su komparabilne ako i samo ako je F konveksna u odnosu na G ili je G konveksna u odnosu na F.*

Dokaz ovog rezultata je neposredan.

PRIMEDBE: 6° Ako je $F(x)=x^r$, $G(x)=x^s$, tada je $G\circ F^{-1}(x)=x^{s/r}$. Ova funkcija je konveksna (striktno) ako je $s>r$, pa vidimo da je (10) generalizacija nejednakosti $(r;s)$.

7° Slično, uzimajući $F(x)=f^x$, $G(x)=g^x$ imamo $G\circ F^{-1}(x)=g^{\log_f x}$, što je striktno konveksna funkcija ako je $g>f$. Stoga iz teoreme 8 imamo da je za $g>f$

$$M_{n,f}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\leqq M_{n,g}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$. Ovaj rezultat u slučaju jednakih težina dobili su Bonferroni [2] i Pizzetti [1].

2.2. Mikusiński [1] je dokazao da teorema 8 sleduje iz njenog specijalnog slučaja $n=2$. On je iskoristio ovu činjenicu da bi dobio posebno jednostavne potrebne i dovoljne uslove za važenje ove teoreme.

Primedba: 1° Jednostavna generalizacija teoreme 8 je sledeća: Ako je G striktno rastuća funkcija, tada je

$$f(F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))\leqq G_n(f(\boldsymbol{a});\boldsymbol{p})$$

ako i samo ako je $G\circ f\circ F^{-1}$ konveksna; ako je $G\circ f\circ F^{-1}$ striktno konveksna, ova nejednakost je striktna osim ako je $a_1=\cdots=a_n$.

Posebno, nejednakost

$$f(A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))\leqq G_n(f(\boldsymbol{a});\boldsymbol{p})$$

važi ako i samo ako je $\log\circ f$ konveksna. Na primer, kako je $x\mapsto x\log x$ striktno konveksna funkcija i $x\log x=\log x^x$, važi nejednakost

$$A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^{A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})}\leqq G_n(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{a}};\boldsymbol{p})$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

Ova nejednakost, za $a_k=p_k/q_k$, $P_n=Q_n=1$, svodi se na Shannonovu nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n} q_k\log p_k\leqq\sum_{k=1}^{n} q_k\log q_k$$

sa jednakošću ako i samo ako je $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}$.

Nije teško videti da je poslednja nejednakost ekvivalentna sa

$$0\leqq\sum_{k=1}^{n} p_k\frac{q_k}{p_k}\log\frac{q_k}{p_k},$$

pa se stoga može dobiti kao neposredna posledica nejednakosti J i striktne konveksnosti funkcije $x\mapsto x\log x$.

Lema 10. *Nejednakost* (10) *je dokazana samo ako se dokaže njen slučaj* $n=2$.

Dokaz. Pretpostavimo da je teorema 8 proverena za $n\,(2\leqq n\leqq s)$. Tada je

$$F_{s+1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=F_s(\boldsymbol{a}';\boldsymbol{p}'),$$

gde je

$$a_i'=a_i\ (1\leqq i\leqq s-1),\quad a_i'=F_2\left(a_s,\ a_{s+1};\ \frac{p_s}{p_s+p_{s+1}},\ \frac{p_{s+1}}{p_s+p_{s+1}}\right)\quad (i=s)$$

i $p_i'=p_i\ (1\leqq i\leqq s-1)$, $p_i'=p_s+p_{s+1}\ (i=s)$. Prema pretpostavkama leme je $\boldsymbol{a}'\leqq\boldsymbol{a}''$, gde je

$$a_i''=a_i'\ (1\leqq i\leqq s-1),\quad a_i''=G_2\left(a_s,\ a_{s+1};\ \frac{p_s}{p_s+p_{s+1}},\ \frac{p_{s+1}}{p_s+p_{s+1}}\right)\quad (i=s).$$

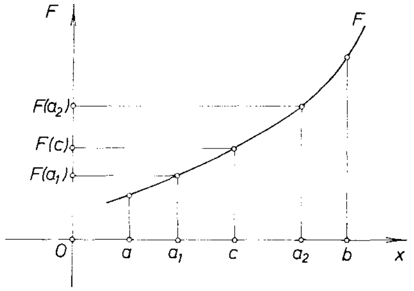
Stoga, na osnovu leme 2(b) i induktivnih pretpostavki, imamo

$$F_{s+1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=F_s(\boldsymbol{a}';\boldsymbol{p}')\leqq F_s(\boldsymbol{a}'';\boldsymbol{p}')\leqq G_s(\boldsymbol{a}'';\boldsymbol{p}')=G_{s+1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}).$$

Posledica 11. *Neka su F i G dve striktno monotone neprekidne funkcije na istom intervalu $[a, b]$ i definišimo $\bar{F}$ i $\bar{G}$ pomoću $\bar{F}(x)=\alpha F(x)+\beta$, $\bar{G}(x)=\gamma G(x)+\delta$ i $\bar{F}(a)=\bar{G}(a)=0$, $\bar{F}(b)=\bar{G}(b)=1$. Tada nejednakost* (10) *važi ako i samo ako grafik $\bar{F}$ leži iznad grafika $\bar{G}$, ili ekvivalentno, ako i samo ako za svako a_1, a_2, p_1, p_2, $a \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq b$, $p_1>0$, $p_2>0$, $p_1+p_2=1$, važi*

$$\frac{p_1 F(a_1)+p_2 F(a_2)-F(p_1 a_1+p_2 a_2)}{F(a_2)-F(a_1)} \leqq \frac{p_1 G(a_1)+p_2 G(a_2)-G(p_1 a_1+p_2 a_2)}{G(a_2)-G(a_1)}.$$

Dokaz. Prema teoremi 3, sredine u nejednakosti (10) su date sa $\bar{F}$ i $\bar{G}$ isto tako kao i sa F i G i na osnovu leme 9 dovoljno je posmatrati slučaj $n=2$. U ovom slučaju kvaziaritmetička sredina ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju na osnovu ovog rezultata (slika 7); na slici je $F_2(a_1, a_2; p_1, p_2)=c$ i $F(c)=p_1 F(a_1)+p_2 F(a_2)$.



Sl. 7

PRIMEDBE: 2° Slučajevi jednakosti u teoremi 8 i uslovi pod kojima važi suprotna nejednakost u (10) dobijaju se bez teškoće na sličan način.

3° Mikusiński je dao dva druga potrebna i dovoljna uslova za važenje nejednakosti (10). Prvi je da je F slabije logaritamski konveksna od G u smislu da za svako a_1, a_2 $(a_1 \neq a_2)$ važi

$$\frac{\Delta^2 F(a_1, a_2)}{\Delta F(a_1, a_2)} \leqq \frac{\Delta^2 G(a_1, a_2)}{\Delta G(a_1, a_2)},$$

gde je $\Delta F(a_1, a_2)=F(a_2)-F(a_1)$ i $\Delta^2 F(a_1, a_2)=\frac{1}{2}\left(F(a_1)+F(a_2)-2F\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\right)$.

Ovi uslovi, ako uvedemo dopunske pretpostavke (koje su od koristi) da su F'' i G'' neprekidni i da F' i G' nisu nikada nule, kazuju da je $\frac{F''}{F'} \leqq \frac{G''}{G'}$. O ovome takođe videti Cargo [1].

2.3. Pojam uporedljivosti sredina, uveden definicijom 5, može se očigledno proširiti na funkcije kao što je učinjeno u HLP, odeljak 1.6.

Definicija 12. *Za dve funkcije f i g od n promenljivih kaže se da su uporedljive ako imaju iste domene i ako je ili $f(a_1, \ldots, a_n) \leqq g(a_1, \ldots, a_n)$ za svako $(a_1, \ldots, a_n)$ koje pripada domenu ili ako je $f(a_1, \ldots, a_n) \geqq g(a_1, \ldots, a_n)$ za svako takvo $(a_1, \ldots, a_n)$.*

PRIMEDBE: 1° Prirodno, F-sredina je uporedljiva sa G-sredinom ako i samo ako je $f(a_1, \ldots, a_n, p_1, \ldots, p_n)=F^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i F(a_i)\right)$ uporedljivo sa $g(a_1, \ldots, a_n, p_1, \ldots, p_n)=G^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i G(a_i)\right)$.

2° Teorema III. 22 kazuje da je za svako r $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b};\boldsymbol{p})$ uporedljivo sa $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})+M_n^{[r]}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{p})$. Stoga je prirodno postaviti pitanje da li je $M_n^{[r]}(\boldsymbol{ab};\boldsymbol{p})$ uporedljivo sa $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\,M_n^{[r]}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{p})$. Odgovor je negativan i to je dokazano u teoremi 14 koja sleduje.

Definicija 13. *Dve n-torke pozitivnih brojeva* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *su slično uređene ako za svako* i, j $(1 \leqq i, j \leqq n)$ *važi* $(a_i-a_j)(b_i-b_j) \geqq 0$. *Ako u ovoj nejednakosti važi uvek suprotan znak, kažemo da su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *suprotno uređene.*

PRIMEDBA: 3° Očigledno, $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ su slično uređeni ako i samo ako su za neku permutaciju nizovi $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ neopadajući. Takođe oni su suprotno uređeni ako i samo ako su za neku permutaciju ovi nizovi takvi da je jedan neopadajući, a drugi nerastući.

Teorema 14. *Ako je* $r>0$ *i ako su* $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ *slično uređeni, tada, ako je* $\boldsymbol{p}$ *pozitivna n-torka, važi*

$$(11) \qquad M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\,M_n^{[r]}(\boldsymbol{b};\boldsymbol{p}) \leqq M_n^{[r]}(\boldsymbol{ab};\boldsymbol{p})$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$ *ili* $b_1=\cdots=b_n$. *Ako je* $r<0$ *ili ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *suprotno uređeni u* (11), *važi suprotna nejednakost. Ako je* $r=0$, *važi uvek jednakost.*

Dokaz. Slučaj $r=0$ je trivijalan i kako je dokazano u teoremi II. 5 i lemi III. 3 (a) dovoljno je posmatrati samo slučaj $r=1$:

$$\begin{aligned} P_n \sum_{k=1}^n p_k a_k b_k - \sum_{k=1}^n p_k a_k \sum_{k=1}^n p_k b_k &= \sum_{i,j=1}^n (p_i p_j a_j b_j - p_i p_j a_i b_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (p_i p_j a_i b_i - p_i p_j a_j b_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (p_i p_j a_j b_j - p_i p_j a_i b_j + p_i p_j a_i b_i - p_i p_j a_j b_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n p_i p_j (a_i-a_j)(b_i-b_j) \geqq 0, \end{aligned}$$

jer su nizovi $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ slično uređeni. Prema tome,

$$(12) \qquad A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\,A_n(\boldsymbol{b};\boldsymbol{p}) \leqq A_n(\boldsymbol{ab},\boldsymbol{p}).$$

Sledeći primedbu 3° možemo pretpostaviti da je $a_1 \geqq \cdots \geqq a_n$ i $b_1 \geqq \cdots \geqq b_n$, i stoga dvostruka suma sadrži član $p_1 p_n (a_1-a_n)(b_1-b_n)$ koji može biti nula samo ako je $a_1=\cdots=a_n$ ili $b_1=\cdots=b_n$.

PRIMEDBE: 4° Iz (11) neposredno sleduje: Ako je $r>0$ i ako su svi nizovi $\boldsymbol{a}^{(k)}$ $(1 \leqq k \leqq m)$ slično uređeni, tada je

$$\prod_{k=1}^m M_n^{[r]}(A^{(k)};\boldsymbol{p}) \leqq M_n^{[r]}\left(\prod_{k=1}^n \boldsymbol{a}^{(k)};\boldsymbol{p}\right).$$

Odavde, uzimajući $\boldsymbol{a}^{(1)}=\cdots=\boldsymbol{a}^{(k)}$, dobijamo nejednakost $(r;\,mr)$.

5° Nejednakost (12) je poznata pod imenom Čebiševljeva nejednakost (Čebišev [1]). O istorijatu, prioritetima i generalizacijama što se odnose na ovu nejednakost, videti Mitrinović—Vasić [12].

6° Uslov da su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ slično uređeni nizovi koji se pojavljuju u teoremi 12 je dovoljan ali ne i potreban za važenje nejednakosti (11). O drugim uslovima pod kojima važi ova nejednakost videti takođe Mitrinović—Vasić [12].

7° Primetimo da se ovi rezultati mogu primeniti na beskonačne sume, čime se dobija više interesantnih nejednakosti, kao na primer:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \leqq \operatorname{tg} 1 \operatorname{tg} xy \quad \left(0 \leqq x, y \leqq 1 \text{ ili } 1 \leqq x, y \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\arcsin x \arcsin y \leqq \frac{1}{2} \arcsin xy \qquad (0 \leqq x, y \leqq 1).$$

8° McLaughlin i Metcalf [4] su ispitivali nejednakost (11) u cilju dobijanja rezultata analognih Everittovim (II.3.5). Sličan, ali jednostavniji rezultat, dat je u Mitrinović—Mitrović [1].

Na kraju, navedimo sledeći rezultat:

Teorema 15. *Ako je* $r_k > 0$ $(0 \leqq k \leqq m)$, *tada su* $M_n^{[r_0]}\left(\prod_{k=1}^{m} \boldsymbol{a}^{(k)}; \boldsymbol{p}\right)$ *i* $\prod_{k=1}^{m} M_n^{[r_k]}(\boldsymbol{a}^{(k)}; \boldsymbol{p})$ *uporedljivi ako i samo ako je* $\frac{1}{r_0} \geqq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{r_k}$ *i tada je*

$$M_n^{[r_0]}\left(\prod_{k=1}^{m} (\boldsymbol{a}^{(k)}; \boldsymbol{p})\right) \leqq \prod_{k=1}^{m} M_n^{[r_k]}(\boldsymbol{a}^{(k)}; \boldsymbol{p}). \tag{13}$$

Dokaz. Da je navedeni uslov potreban, dobijamo iz (13) za $\boldsymbol{a}^{(k)} = (1, 0, \ldots, 0)$. Da je on i dovoljan, neposredno sleduje iz primedbe III.3.1.4° i $(r; s)$ nejednakosti.

3. REZULTATI RADOOVOG I EVERITTOVOG TIPA

Nejednakost (10) je u neku ruku krajnja generalizacija GA i prirodno je postaviti pitanje da li neka rafiniranja GA, kao ona koja su diskutovana u II.3, imaju proširenje na takve sredine. Ako je to tako, ta proširenja bi trebalo da kao specijalne slučajeve obuhvate ne samo rezultate iz II.3 već i one iz III.3.3.

U ovom odeljku daćemo jedno takvo proširenje i diskutovaćemo neke partikularne slučajeve koji su ranije bili dokazani ili koji se mogu uključiti u ranije odeljke koje smo gore pomenuli. Ti partikularni slučajevi mogu se jednostavno dokazati primenom raznih metoda koji su razmatrani u pomenutim odeljcima.

Teorema 16. *Neka je* $\boldsymbol{a}$ *data n-torka,* $\boldsymbol{p}$ *pozitivna n-torka, H i F dve neprekidne funkcije takve da je F striktno monotona i H konveksna u odnosu na F i definišimo*

$$\alpha(H, F, \boldsymbol{p}; \mathbf{I}) = \alpha(\mathbf{I}) = P_{\mathbf{I}} H\big(F_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big).$$

Tada, ako je $\mathbf{I} \cap \mathbf{J} = \varnothing$, *važi*

$$\alpha(\mathbf{I} \cup \mathbf{J}) \leqq \alpha(\mathbf{I}) + \alpha(\mathbf{J}). \tag{14}$$

Zatim, ako je H striktno konveksna funkcija u odnosu na F, nejednakost (14) *je striktna osim ako je* $H\big(F_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) = H\big(F_{\mathbf{J}}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big)$. *Ako je H konkavna u odnosu na F, tada važi suprotna nejednakost.*

Dokaz. Ovo je direktna posledica nejednakosti J i konveksnosti funkcije $H \circ F^{-1}$.

Posledica 17. *Neka je* $\boldsymbol{a}$ *data n-torka,* $\boldsymbol{p}$ *i* $\boldsymbol{q}$ *date pozitivne n-torke, F, G, H, K neprekidne funkcije takve da su F i H striktno monotone, H konveksna u odnosu na F, K konkavna u odnosu na G i definišimo*

$$\beta(\mathbf{I}) = \alpha(H, F; \boldsymbol{p}; \mathbf{I}) - \alpha(K, G; \boldsymbol{q}; \mathbf{I}).$$

Tada, ako je $\mathbf{I}\cap\mathbf{J}=\varnothing$, *važi*

(15) $\beta(\mathbf{I}\cup\mathbf{J})\leqq\beta(\mathbf{I})+\beta(\mathbf{J})$.

Ako je H striktno konveksna funkcija u odnosu na F i K striktno konkavna funkcija u odnosu na G, tada je nejednakost (15) *striktna osim ako je*: (i) $H(F_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))=H(F_{\mathbf{J}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))$ *i* (ii) $K(G_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q}))=K(G_{\mathbf{J}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q}))$. *Ako je H striktno konveksna funkcija u odnosu na F i* $K=aG+b$ *za neko realno a, b* $(a\neq 0)$, *tada jednakost u* (15) *važi samo ako* (i) *važi; ako je* $H=aF+b$ *za neko realno a, b* $(a\neq 0)$ *i ako je K striktno konkavna funkcija u odnosu na G, tada jednakost u* (11) *važi samo ako važi* (ii).

Dokaz. Ovo je direktna posledica teoreme 16.

PRIMEDBE: 1° Da ovi rezultati, koji su skoro trivijalne posledice nejednakosti *J*, sadrže kao specijalne slučajeve mnoge složene nejednakosti koje su razmatrane u II.4 i III.3, primetio je Everitt [5].

2° Ako je *H* konkavna funkcija u odnosu na *F* i *K* konveksna funkcija u odnosu na *G*, važi suprotna nejednakost od (15). Slučaj jednakosti se lako dobija.

3° Sledeći ideje teoreme II.24, nejednakosti (14) mogu se interpretirati na ovaj način: Skupovne funkcije α, β su konačno subaditivne na konačnom podskupu prirodnih brojeva.

4° Everitt [5] dokazao je teoremu 16 i posledicu 17. Međutim, mnogobrojne partikularne slučajeve ranije su dokazali Bullen [2], [3], [4], [5], [7], [9], [10], Mitrinović — Vasić [1], [2], [3], [10] i drugi.

Kao i kod nejednakosti Radoa i Popovicua najjednostavniji slučaj gornjih rezultata je za $\mathbf{I}=\{1,\ldots,n\}$, $\mathbf{J}=\{n+1,\ldots,n+m\}$, $\mathbf{I}\cup\mathbf{J}=\{1,\ldots,m+n\}$. Ako kao u II. 3.5. stavimo $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_{n+m})$, $\bar{\boldsymbol{a}}=(a_{n+1},\ldots,a_{n+m})$, $\bar{F}_m=(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=F^{-1}\left(\frac{1}{\bar{P}_m}\sum_{k=n+1}^{n+m}p_k F(a_k)\right)$, $\bar{P}_m=\sum_{k=n+1}^{n+m}p_k$, posledica 17 daje sledeći rezultat:

Posledica 18. *Pod pretpostavkama kao u posledici* 17 *i sa uvedenim oznakama imamo*

(16)
$$\begin{aligned}P_{n+m}H(F_{n+m}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))-Q_{n+m}K(G_{n+m}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q}))&\\ \leqq\big(P_nH(F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))-Q_nK(G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q}))\big)&\\ +\big(\bar{P}_mH(\bar{F}_m(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))-\bar{Q}_mK(\bar{G}_m(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q}))\big)&\end{aligned}$$

i posebno

(17) $P_nH(F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))-Q_nK(G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q}))$.

PRIMEDBA: 5° Uslovi kada u posledici 18 važi jednakost lako se dobijaju, jer se uslovi (i), (ii) iz posledice 17 svode za (16) na

(i)′ $H(F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))=H(\bar{F}_m(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))$, (ii)′ $K(G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))=K(\bar{G}_m(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q}))$

i, za (17), na

(i)″ $H(F_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}))=H(a_n)$, (ii)″ $K(G_{n-1}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q}))=K(a_n)$.

Sada ćemo posmatrati razne specijalne slučajeve koji daju uopštenja Radoove i Popoviciuove nejednakosti. Najpre ćemo dati neke rezultate Everittovog tipa (videti teoremu II. 24).

Posledica 19. (a) *Ako je* $r/t\leqq 1$, *tada je* $\mu(\mathbf{I})=P_{\mathbf{I}}M_{\mathbf{I}}^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^t$ *subaditivna na konačnom podskupu skupa prirodnih brojeva.*

(b) *Ako je* $r/t \leqq 1 \leqq s/u$, $\nu(\mathbf{I}) = P_{\mathrm{I}} M_{\mathrm{I}}^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^t - Q_{\mathrm{I}} M_{\mathrm{I}}^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^u$ *je subaditivna na konačnom podskupu skupa prirodnih brojeva.*

(c) *Ako je* $r \leqq 0 \leqq s$, $\rho(\mathbf{I}) = M_{\mathrm{I}}^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^{P_{\mathrm{I}}} M_{\mathrm{I}}^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^{-Q_{\mathrm{I}}}$ *je logaritamski subaditivna na konačnom podskupu skupa prirodnih brojeva.*

Dokaz. Ovo su specijalni slučajevi primedbe 3°:

(a) U teoremi 16 treba uzeti $H(x) = x^t$, $F(x) = x^r$ $(r \neq 0)$, $F(x) = \log x (r = 0)$.

(b) Staviti $F(x) = x^t$, $K(x) = x^u$, $F(x) = x^r$ $(r \neq 0)$, $F(x) = \log x$ $(r = 0)$, $G(x) = x^s$ $(s \neq 0)$, $G(x) = \log x$ $(s = 0)$ i primeniti posledicu 18.

(c) Isto kao pod (b) ali samo za $H(x) = K(x) = \log x$.

Primenom posledice 17 navešćemo uopštenja teorema II.25 i III.29. Oznake su iste kao u posledici 18.

Posledica 20. (a) *Ako je* $r/t \leqq 1 \leqq s/u$, *tada je*

$$(18) \qquad Q_{n+m} M_{n+m}^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^u - P_{n+m} M_{n+m}^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^t$$
$$\geqq \big(Q_n M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^u - P_n M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^t\big) + \big(\overline{Q}_m \overline{M}_m^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^u - \overline{P}_m \overline{M}_m^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^t\big)$$

sa jednakošću ako i samo ako je

(α) $\quad r/t < 1 < s/u$ *i* $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) = \overline{M}_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})$ *i* $M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q}) = M_m^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})$ *ili*

(β) $\quad r/t < 1 = s/u$ *i* $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) = \overline{M}_m^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})$ *ili*

(γ) $\quad r/t = 1 < s/u$ *i* $M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q}) = \overline{M}_m^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})$ *ili*

(δ) $\quad r/t = 1 = s/u$.

Posebno važi

$$(19) \qquad Q_n M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^u - P_n M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^t$$
$$\geqq Q_{n-1} M_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^u - P_{n-1} M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^t + q_n a_n{}^u - p_n a_n{}^t,$$

sa jednakošću ako i samo ako je

(α_1) $\quad r/t < 1 < s/u$ *i* $a_n = M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p}) = M_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})$ *ili*

(β_1) $\quad r/t < 1 = s/u$ *i* $a_n = M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})$ *ili*

(γ_1) $\quad r/t = 1 < s/u$ *i* $a_n = M_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})$ *ili*

(δ_1) $\quad r/t = 1 = s/u$.

(b) *Ako je* $r \leqq 0 \leqq s$, *tada je*

$$(20) \qquad \frac{M_{n+m}^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^{Q_{n+m}}}{M_{n+m}^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^{P_{n+m}}} \geqq \frac{M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^{Q_n}}{M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^{P_n}} \frac{\overline{M}_m^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^{Q_m}}{\overline{M}_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^{\overline{P}_m}}$$

sa jednakošću ako i samo ako je (α) $r < 0 < s$ *i jednakosti u* (*i*) (α) *važe ili* (β) $r < 0 = s$ *i jednakosti u* (*i*) (β) *važe ili* (γ) $r = 0 < s$ *i jednakosti u* (*i*) (γ) *važe ili* (δ) $r = 0 = s$. *Posebno imamo*

$$(21) \qquad \frac{M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^{Q_n}}{M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^{P_n}} \geqq \frac{M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{q})^{Q_{n-1}}}{M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})^{P_{n-1}}} a_n^{q_n - p_n}$$

sa jednakošću ako i samo ako je (α) $r < 0 < s$ *i jednakosti u* (*i*) (α_1) *važe ili* (β) $r < 0 = s$ *i jednakosti u* (*i*) (β_1) *važe ili* (γ) $r = 0 < s$ *i jednakosti u* (*i*) (γ_1) *važe ili* (δ) $r = 0 = s$.

Dokaz. Primenom metoda korišćenog u posledici 19 ovi rezultati proizilaze direktno iz posledice 17.

PRIMEDBA: 6° Stavljajući $p=q$, $s=u=t=1$, $r=0$, nejednakost (19) svodi se na Radoovu nejednakost (videti II. 39) dok se za $p=q$ i $r=0$, $s=1$ nejednakost (21) svodi na Popoviciuovu nejednakost (II. 45). Prema tome, vidi se da su obe partikularni slučajevi nejednakosti (17).

Posledica 21. *Neka je* α *takvo da su funkcije* $x\mapsto\left(1+\alpha(x^{1/r})\right)^{-1}$ $(r\neq 0)$, $x\mapsto\left(1+\alpha(e^{x})\right)$ $(r=0)$ *striktno konveksne i* $x\mapsto\left(1+\alpha(x)\right)^{-1}$ *striktno monotona. Tada je*

(a) $$\chi(\mathrm{I})=\frac{p_{\mathrm{I}}}{1+\alpha\left(M_{\mathrm{I}}^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\right)}-\sum_{i\in\mathrm{I}}\frac{q_i}{1+\alpha(a_i)}$$

subaditivna funkcija na konačnom podskupu skupa prirodnih brojeva;

(b) *uz ranije oznake,*

$$\sum_{i=1}^{n+m}\frac{q_i}{1+\alpha(a_i)}-\frac{P_{n+m}}{1+\alpha\left(M_{n+m}^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\right)}$$
$$\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{1+\alpha(a_i)}-\frac{P_n}{1+\alpha\left(M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\right)}+\sum_{i=n+1}^{m}\frac{q_i}{1+\alpha(a_i)}-\frac{\overline{P}_m}{1+\alpha\left(\overline{M}_m^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\right)}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})=\overline{M}_m^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})$;

(c) *posebno važi*

(22) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{1+\alpha(a_i)}-\frac{P_n}{1+\alpha\left(M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\right)}\geq\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{q_i}{1+\alpha(a_i)}-\frac{P_{n-1}}{1+\alpha\left(M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\right)}\right\}+\frac{q_n-p_n}{1+\alpha(a_n)}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_n=M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})$.

Dokaz. Ovi rezultati sleduju iz posledica 17 i 18 za $F(x)=x^r$ $(r\neq 0)$, $F(x)=\log x$ $(r=0)$; $H(x)=G(x)=K^{-1}(x)=\left(1+\alpha(x)\right)^{-1}$.

PRIMEDBE: 7° Treba primetiti da u partikularnim slučajevima pravi podinterval od $(0,+\infty)$ u kome je $x\mapsto\left(1+\alpha(x^{1/r})\right)^{-1}$ ili $x\mapsto\left(1+\alpha(e^{x})\right)^{-1}$ konveksna funkcija, može da nametne neka ograničenja za $\boldsymbol{a}$.

8° Ponovljena primena (22) daje

(23) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{1+\alpha(a_i)}\geq\frac{P_n}{1+\alpha\left(M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{p})\right)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i-p_i}{1+\alpha(a_i)},$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$. Ako je $p=q$ i $\alpha(x)=x^s$ $(0\leq r<s)$, (23) se svodi na Henricievu nejednakost (8). Nejednakost (22) predstavlja generalizaciju Henricieve nejednakosti Radoovog tipa.

9° Ako je $p=q$, nejednakosti (17), (19), (21), (22) (23) su mnogo prostije u tom smislu što u svima od njih nedostaje zadnji član na desnoj strani. Posebno, odgovarajuće funkcije skupova nisu samo subaditivne već su i opadajuće. Neka od ovih pojednostavljenja data su u sledećoj teoremi:

Teorema 22. *Neka* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, F, G, H, K$ *imaju ista značenja kao u posledici* 17 *i neka su* μ, ν *dva realna broja. Tada je*

(24) $$Q_n\left(H\circ F^{-1}\left(\lambda A_n\left(F(\boldsymbol{a});\,\boldsymbol{p}\right)+\mu\right)-K\circ G^{-1}\left(A_n\left(G(\boldsymbol{a});\,\boldsymbol{q}\right)+\nu\right)\right)$$
$$\leq Q_{n-1}\left(H\circ F^{-1}\left(\lambda' A_{n-1}\left(F(\boldsymbol{a});\,\boldsymbol{p}\right)+\mu'\right)\right.$$
$$\left.-K\circ G^{-1}\left(A_{n-1}\left(G(\boldsymbol{a});\,\boldsymbol{q}\right)+\nu'\right)\right),$$

gde je

$$\lambda=\left(\frac{P_n q_n}{p_n Q_n}\right)\frac{F\circ H^{-1}\circ K(a_n)}{F(a_n)},\quad \lambda'=\frac{Q_n P_{n-1}}{P_n Q_{n-1}}\lambda,\quad \mu'=\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\mu,\quad \nu'=\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\nu.$$

Ako je H striktno konveksna funkcija u odnosu na F, i K striktno konkavna funkcija u odnosu na G, tada je (24) *striktno osim ako je*

(i) $F\circ H^{-1}\circ K(a_n)=\lambda' A_{n-1}\big(F(\boldsymbol{a});\boldsymbol{p}\big)+\mu'$ *i* (ii) $G(a_n)=A_{n-1}\big(G(\boldsymbol{a});\boldsymbol{q}\big)+\nu'$.

Ako je H striktno konveksna u odnosu na F i $K=aG+b$ za neko realno a $(a\neq 0)$ i b, jednakost u (92) *važi samo ako važi* (i). *Ako je $H=aF+b$ za neko realno a, b $(a\neq 0)$ i K striktno konkavna funkcija u odnosu na G, jednakost u* (92) *važi samo ako važi* (ii).

Dokaz. Kako je $K\circ G^{-1}$ konkavna funkcija, imamo

$$\begin{aligned}&Q_n K\circ G^{-1}\Big(A_n\big(G(\boldsymbol{a});\boldsymbol{q}\big)+\nu\Big)\\&=Q_n K\circ G^{-1}\left(\Big(A_{n-1}\big(G(\boldsymbol{a});\boldsymbol{q}\big)+\nu'\Big)\frac{Q_{n-1}}{Q_n}+G(a_n)\frac{q_n}{Q_n}\right)\\&\geqq Q_{n-1}K\circ G^{-1}\Big(A_{n-1}\big(G(\boldsymbol{a});\boldsymbol{q}\big)+\nu'\Big)+q_n K(a_n).\end{aligned}$$

Kako je $H\circ F^{-1}$ konveksna funkcija, imamo

$$\begin{aligned}&Q_n H\circ F^{-1}\Big(\lambda A_n\big(F(\boldsymbol{a});\boldsymbol{p}\big)+\mu\Big)\\&=Q_n H\circ F^{-1}\left(\Big(\lambda' A_{n-1}\big(F(\boldsymbol{a});\boldsymbol{p}\big)+\mu'\Big)\frac{Q_{n-1}}{Q_n}+\frac{q_n}{Q_n}F\circ H^{-1}\circ K(a_n)\right)\\&\geqq Q_{n-1}H\circ F^{-1}\Big(\lambda' A_{n-1}\big(F(\boldsymbol{a});\boldsymbol{p}\big)+\mu'\Big)+q_n K(a_n).\end{aligned}$$

Nejednakost (24), kao i slučajevi jednakosti, neposredno se dobijaju primenom ***J***.

PRIMEDBA: 10° Ako je $\lambda=1$, $\mu=\nu=0$, $p=q$ i $H=K$, nejednakost (24) se svodi na specijalan slučaj (17): jednostavan slučaj u kome su dva zadnja člana na desnoj strani izostavljena.

Posmatraćemo sada neke specijalne slučajeve teoreme 22.

Posledica 23. (a) *Ako je* $-\infty<\dfrac{r}{t}\leqq 1\leqq\dfrac{s}{u}<+\infty$, $r\neq 0$, *tada je*

$$(25)\quad \begin{aligned}&Q_n\left(M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})^u-\left(\frac{P_n q_n}{p_n Q_n}\right)^{\frac{t}{r}}a_n^{(u-t)}M_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^t\right)\\&\geqq Q_{n-1}\left(M_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})^u-\left(\frac{P_{n-1}q_n}{p_n Q_{n-1}}\right)^{\frac{t}{r}}a_n^{(u-t)}M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})^t\right)\end{aligned}$$

sa jednakošću ako i samo ako je

(α) $\dfrac{r}{t}<1<\dfrac{s}{u}$ *i* $a_n=M_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})=\left(\dfrac{P_{n-1}q_n}{p_n Q_{n-1}}a_n^{\frac{(u-t)}{t}}M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\right)^{\frac{t}{ur}}$,

ili

(β) $\dfrac{r}{t}=1<\dfrac{s}{u}$ *i* $a_n=M_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q})$, *ili*

(γ) $\frac{r}{t} < 1 = \frac{s}{u}$ *i* $a_n = \left(\frac{P_{n-1} q_n}{p_n Q_{n-1}} a_n^{\frac{r(u-t)}{t}} M_{n-1}^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\right)^{\frac{t}{ur}}$,

ili

(δ) $\frac{r}{t} = 1 = \frac{s}{u}$.

(b) *Važi nejednakost*

$$(26) \qquad Q_n \left(A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q}) - G_n(a_n; \boldsymbol{p})^{\frac{p_n q_n}{p_n Q_n}}\right) \geqq Q_{n-1} \left(A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q}) - G_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^{\frac{P_{n-1} q_n}{p_n Q_{n-1}}}\right)$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_n = G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})^{\frac{p_n Q_{n-1}}{q_n P_{n-1}}}$.

(c) *Ako je* $\alpha > 0$, *važi*

$$(27) \qquad Q_n \left(A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q}) - \alpha \frac{q_n P_n}{p_n Q_n} G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\right)$$

$$\geqq Q_{n-1} \left(A_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q}) - \alpha^{\frac{p_n}{P_{n-1}}} \frac{q_n P_{n-1}}{p_n Q_{n-1}} G_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\right)$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_n = \alpha^{P_n/P_{n-1}} G_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$.

Dokaz. (a) Stavimo u teoremi 22: $H(x) = x^t$, $K(x) = x^u$, $F(x) = x^r$, $G(x) = x^s$, $\mu = \nu = 0$.

(b) Stavimo u teoremi 22: $H(x) = K(x) = G(x) = x$, $F(x) = \log x$, $\mu = \nu = 0$.

(c) Stavimo u teoremi 22: $H(x) = K(x) = -x$, $F(x) = x$, $G(x) = \log x$, $\mu = 0$, $\nu = \log \alpha$.

PRIMEDBE: 11° Ako stavimo $F(x) = \log x$, možemo posledicu 23 (a) proširiti na slučaj $r = 0$; na sličan način, stavljajući $G(x) = \log x$, može se dobiti slučaj $s = 0$.

12° Nejednakosti (26) i (27) i slučajevi navedeni u primedbi 11° mogu se dobiti iz teoreme II. 22, birajući specijalne vrednosti za λ i μ.

4. NEJEDNAKOST ČAKALOVA

Sledeći specijalni slučaj posledice 18 je jednostavna generalizacija teoreme II.18.

Teorema 24. *Ako je* $\boldsymbol{p}$ *pozitivan niz, potreban i dovoljan uslov da bi važilo*

$$(28) \qquad P_n\left(A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) - G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\right) \geqq P_{n-1}\left(A_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) - G_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\right)$$

za sve pozitivne nizove $\boldsymbol{a}$ *je da* G^{-1} *bude konveksna funkcija. Ako je* G^{-1} *striktno konveksna funkcija, tada je nejednakost* (28) *striktna osim ako je* $a_n = G_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$.

Dokaz. (a) Staviti $H(x) = K(x) = x$ i $p = q$ u (17) i povesti računa o primedbi 1°.

(b) Slučaj nejednakosti (28) za $n = 2$ dovodi direktno do

$$\frac{p_1 G^{-1}(b_1) + p_2 G^{-1}(b_2)}{p_1 + p_2} \geqq G^{-1}\left(\frac{p_1 b_1 + p_2 b_2}{p_1 + p_2}\right),$$

gde je $b_i = G(a_i)$ $(i = 1, 2)$; prema tome, ako (28) važi za svako $\boldsymbol{a}$, G^{-1} je konveksno.

PRIMEDBE: 1° Ovaj rezultat, u slučaju jednakih težina, dobio je Popoviciu ([2], [3]).
2° Ako je $G(x) = \log x$, nejednakost (28) je, u stvari, Radoova nejednakost (II. 38).

Pretpostavimo da svi $a_1, \ldots, a_{n-1}$ nisu međusobno jednaki. Tada se (28) može predstaviti u obliku

$$\frac{A_n - G_n}{A_{n-1} - G_{n-1}} \geqq \frac{P_{n-1}}{P_n}.$$

Ovo znači da je leva strana, posmatrana kao funkcija od niza $\boldsymbol{a}$, ograničena sa donje strane. Dalje, donja granica se dostiže samo ako je $a_n = G_{n-1}$. Budući da ta donja granica ne može biti dostignuta za nekonstantne nizove, takve da je $a_n \geqq \max(a_1, \ldots, a_{n-1})$, posebno za nekonstantne rastuće nizove, možemo postaviti pitanje da li se za takve nizove ova granica može poboljšati. Ovaj problem je u slučaju $G = \log$ i za jednake težine posmatrao Tchakaloff [1]:

Teorema 25. *Ako je G striktno monotona funkcija, $\boldsymbol{p}$ dati pozitivni niz, $\boldsymbol{a}$ rastući nekonstantni niz, tada je*

$$(29) \qquad \frac{P_n^2}{P_n - p_1}\big(A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) - G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) \geqq \frac{P_{n-1}^2}{P_{n-1} - p_1}\big(A_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) - G_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) \quad (n > 2),$$

ako je G^{-1} konveksna i 3-konveksna (konkavna) prema tome da li G raste (opada).

Dokaz. Jednostavnosti radi, stavimo $g = G^{-1}$ i $B_k = A_k\big(G(\boldsymbol{a}); \boldsymbol{p}\big) = G\big(G_k(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big)$ $(1 \leqq k \leqq n)$. Za $n > 2$ definišimo

$$D(a_1, \ldots, a_n) = \frac{P_n^2}{P_n - p_1}(A_n - G_n) - \frac{P_{n-1}^2}{P_{n-1} - p_1}(A_{n-1} - G_{n-1}))$$

i, za $0 \leqq k \leqq 1$,

$$D_k(x) = D(a_1, \ldots, a_k) \quad \text{kada je} \quad a_{k+1} = \cdots = a_n = x.$$

Tada, koristeći osobine 3-konveksnih (konkavnih) funkcija, zaključujemo da je D_k neprekidna i diferencijabilna funkcija, kao i

$$D'_k(x) = G'(x)\Big(\frac{P_n(P_n - P_k)}{P_n - p_1}\big(g' \circ G(x) - g'(B_n)\big)$$

$$- \frac{P_{n-1}(P_{n-1} - P_k)}{P_{n-1} - p_1}\big(g' \circ G(x) - g'(B_{n-1})\big)\Big)$$

$$= \frac{p_n P_k G'(x)\big(G(x) - B_k\big)}{P_n P_{n-1}(P_n - p_1)(P_{n-1} - p_1)}\Big(P_n P_{n-1}(P_k - p_1)[G(x), B_n; g']$$

$$+ P_k(P_n - p_1)(P_{n-1} - p_n)\big(G(x) - B_k\big)[G(x), B_n, B_{n-1}; g']\Big).$$

Ako je G^{-1} konveksna funkcija, tada je $[G(x), B_n; g'] \geqq 0$; ako je G rastuća (opadajuća) funkcija, tada je $G'(x) \geqq 0$ $(\leqq 0)$ i $G(x) - B_k \geqq 0$ $(\leqq 0)$; najzad, ako G^{-1} 3-konveksna (konkavna) funkcija, tada je $[G(x), B, B_{n-1}; g'] \geqq 0$ $(\leqq 0)$. Stoga, pod uslovima teoreme imamo $D'_k(x) \geqq 0$ ako je $x \geqq a_k$, odakle sleduje da je

$$D(a_1, \ldots, a_n) \geqq D(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n-1})$$

$$\geqq D(a_1, \ldots, a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-3}, a_{n-3})$$

$$\geqq \cdots \geqq D(a_1, \ldots, a_1) = 0.$$

PRIMEDBE: 3° Kako su A_n, A_{n-1}, G_n, G_{n-1} simetrični po $a_1, \ldots, a_{n-1}$, $p_1, \ldots, p_{n-1}$, teorema 25 može se formulisati i ovako: Ako G i $\boldsymbol{p}$ ispunjavaju pretpostavke teoreme 25 i ako je $\boldsymbol{a}$ nekonstantna n-torka, uz uslov $a_n \geqq \max(a_1, \ldots, a_{n-1})$, tada je

(30) $$A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) - G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \geqq \lambda_n \left(A_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) - G_{n-1}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\right),$$

gde je $\lambda_n = \dfrac{P_{n-1}^2(P_n - p_j)}{P_n^2(P_{n-1} - p_j)}$ (j je definisano pomoću $a_j = \min(a_1, \ldots, a_{n-1})$).

4° Lako se vidi da je $\lambda_n > \dfrac{P_{n-1}}{P_n}$, pa stoga nejednakost (29) daje precizniju donju granicu za količnik $\dfrac{A_n - G_n}{A_{n-1} - G_{n-1}}$; međutim, na žalost, λ_n je granica koja se ne može dostići.

5° Ako se u (30) λ_n zameni sa bilo kojim $\lambda_n' \,(\geqq \lambda_n)$, u opštem slučaju postoji n-torka za koju nejednakost ne važi. Tako stavljajući $G(x) = \log x$, $a_1 = 1 - \varepsilon$, $a_2 = \cdots = a_n = 1$, nalazimo

$$\frac{A_n - G_n}{A_{n-1} - G_{n-1}} = \frac{1 - \dfrac{p_1}{P_n} - (1-\varepsilon)^{p_1/P_n}}{1 - \dfrac{p_1}{P_{n-1}} - (1-\varepsilon)^{p_1/P_{n-1}}},$$

pa za $\varepsilon \to 0$ desna strana opada ka λ_n. Ovo pokazuje da se u (30) ne može λ_n zameniti ni sa jednim $\lambda_n' > \lambda_n$.

6° Bullen [4] i Diananda [3] su primetili da ne postoji odgovarajući rezultat za Popoviciuovu nejednakost. Sledeći primer to pokazuje: Neka je $a_1 = \cdots = a_{n-2} = 1$, $a_{n-1} = a_n = \varepsilon$, tada je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{A_n/G_n}{(A_{n-1}/G_{n-1})^{\lambda_n}} = 0 \text{ ako je } \lambda_n > \frac{n-1}{n}.$$

Drugim rečima, eksponent $\dfrac{n-1}{n}$ koji se pojavljuje u Popoviciuovoj nejednakosti u slučaju jednakih težina (II.45) ne može se poboljšati ako se pretpostavi da je $a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$.

5. GENERALIZACIJE NEJEDNAKOSTI HÖLDERA I MINKOWSKOG

5.1. U 2.1 proučavali smo uporedljivost sredina što je dovelo do nejednakosti koja je uopštenje nejednakosti $(r; s)$ (nejednakost (III.26)). Stoga je prirodno postaviti pitanje da li druge glavne nejednakosti između potencijalnih sredina, tj. nejednakosti (III.28) i (III.30) koje odgovaraju nejednakostima $\boldsymbol{H}$ i $\boldsymbol{M}$ imaju analogone za opštije sredine koje su ovde razmatrane.

Najpre ćemo dati jednostavnu generalizaciju teoreme III.21 (b), nejednakosti (III.30) (Aumann [3], Jessen [2]).

Teorema 26. *Neka su F i G neprekidne striktno monotone funkcije definisane na istom intervalu i neka je $H = G \circ F^{-1}$. Tada za sve nizove $\boldsymbol{a}^j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ $(1 \leqq j \leqq n)$, $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ $(1 \leqq i \leqq m)$ i nizove $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ važi*

(31) $$G_n\left(F_m(\boldsymbol{a}^j; \boldsymbol{p}); \boldsymbol{q}\right) \leqq F_m\left(G_n(\boldsymbol{a}_i; \boldsymbol{q}); \boldsymbol{p}\right)$$

ako i samo ako kvaziaritmetička H-sredina je konveksna funkcija na skupu nizova za koje je definisana.

Dokaz. Lako se vidi da je nejednakost (31) u stvari posledice osobina H datih u teoremi.

PRIMEDBA: 1° Jednostavni uslovi koje treba da zadovoljava H da bi ispunjavala uslove u ovoj teoremi dati su u teoremi 32.

5.2. Sada ćemo posmatrati opštiji problem. Da bismo izložili ideju, pretpostavićemo da imamo tri kvaziaritmetičke sredine:

$$K_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = K^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k K(a_k)\right); \quad K:[k_1, k_2] \to \overline{\mathbf{R}};$$

$$L_n(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}) = L^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k L(b_k)\right); \quad L:[l_1, l_2] \to \overline{\mathbf{R}};$$

$$M_n(\boldsymbol{c}; \boldsymbol{p}) = M^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k M(c_k)\right); \quad M:[m_1, m_2] \to \overline{\mathbf{R}}.$$

Od interesa je da se vidi kada važe nejednakosti oblika

$$f\big(K_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}),\ L_n(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})\big) \geqq M_n\big(f(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}); \boldsymbol{p}\big), \tag{32}$$

ili suprotne nejednakosti, gde je $f:[k_1, k_2] \times [l_1, l_2] \to [m_1, m_2]$ neprekidna funkcija i:

$$\big(f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\big) = \big(f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n)\big).$$

Najvažniji primeri takvih funkcija su

(i) $f(x, y) = x + y$, (ii) $f(x, y) = xy$.

U slučaju (i) nejednakost (32) nazivaćemo aditivna, a u slučaju (ii) multiplikativna.

PRIMEDBA: 2° Nejednakost (III.28) je primer multiplikativne nejednakosti; nejednakost (III.30) je aditivna nejednakost.

Zbog velike opštosti nejednakosti (32) mnoge nejednakosti koje su po izgledu sasvim različite, u nekom smislu su ekvivalentne i to vredi raščistiti pre nego što pređemo na našu glavnu teoremu.

(A) Jedna nova nejednakost može se dobiti iz (32) menjajući f na sledeći način:

Neka je $\sigma:[m_1, m_2] \to [j_1, j_2]$ striktno rastuća neprekidna funkcija i stavimo $g = \sigma \circ f$, $J = M \circ \sigma^{-1}$. Tada (32) postaje

$$g\big(K_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}),\ L_n(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})\big) \geqq J_n\big(g(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}); \boldsymbol{p}\big); \tag{33}$$

ako je σ opadajuća funkcija, važi suprotna nejednakost.

PRIMEDBA: 3° Posebno, uzimajući $\sigma = M$ kada je $J = 1$ i $g = h = M \circ f$, iz (33) nalazimo

$$h\big(K_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}),\ L_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) \geqq A_n\big(h(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}); \boldsymbol{p}\big),$$

ili suprotnu nejednakost, prema tome da li je M rastuća ili opadajuća funkcija.

(B) Umesto promene f možemo izmeniti $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u (32) na sledeći način:

Neka je $\varkappa:[k_1, k_2] \to [s_1, s_2]$, $\lambda:[l_1, l_2] \to [t_1, t_2]$ striktno monotona neprekidna funkcija i neka je $\boldsymbol{c} = \varkappa\, \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d} = \lambda\, \boldsymbol{b}$, $g:[s_1, s_2] \times [t_1, t_2] \to [m_1, m_2]$, pri čemu je g definisano sa $g(s, t) = f\big(\varkappa^{-1}(s), \lambda^{-1}(t)\big)$. Takođe stavimo $S = K \circ \varkappa^{-1}$ i $T = L \circ \lambda^{-1}$. Tada (32) postaje

$$g\big(T_n(\boldsymbol{c}; \boldsymbol{p}),\ F_n(\boldsymbol{d}; \boldsymbol{p})\big) \geqq M_n\big(g(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}); \boldsymbol{p}\big). \tag{34}$$

PRIMEDBA: 4° Posebno, ako je $S=1$, $T=1$ i $g=j$, gde je $j(s, t)=f(K^{-1}(s), L^{-1}(t))$ uzećemo $\varkappa=K$, $\lambda=L$. Tada (34) postaje

$$j(A_n(c; p), A_n(d; p)) \geqq M_n(j(c; d); p).$$

Definicija 27. *Za nejednakosti koje su izvedene iz nejednakosti oblika* (32) *pomoću konačnog broja primene postupka* (A) *i/ili* (B), *reći ćemo da su ekvivalentne.*

PRIMEDBE: 5° Nije teško videti da je relacija između nejednakosti uvedena definicijom 27 jedna relacija ekvivalencije.

6° Nije takođe teško ustanoviti da je svaka multiplikativna nejednakost ekvivalentna nekoj aditivnoj nejednakosti. Pretpostavimo da je $f(x, y)=xy$ i da su domeni K i L u $\mathbf{R}_+$. Tada, primenjujući (B) sa $\varkappa=\lambda=\log$ na (32), koje u ovom slučaju glasi $K_n(a; p)\, L_n(b; p) \geqq M_n(ab; p)$, imamo $S_n(c; p)+T_n(d; p) \geqq U_n(c+d; p)$, gde je $c=\log a$, $d=\log b$, $S=K\circ\exp$, $T=L\circ\exp$, $U=M\circ\exp$.

7° Posmatrajmo nejednakost (III. 28) sa q, r, $s>0$ i $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r} \leqq \dfrac{1}{s}$:

$$M_n^{[s]}(ab; p) \leqq M_n^{[q]}(a; p)\, M_n^{[r]}(b; p).$$

Tada, na osnovu primedbe 6°, stavljajući $x=e^q$, $y=e^r$, $z=e^s$, dobijamo sledeću ekvivalentnu aditivnu nejednakost (koristeći skalu sredina definisanu u primedbi 1.4°);

$$M_{n, x}(a; p)+M_{n, y}(b; p) \geqq M_{n, z}(a+b; p) \tag{35}$$

ako je $\dfrac{1}{\log x}+\dfrac{1}{\log y} \leqq \dfrac{1}{\log z}$ $(x, y, z>1)$.

8° Jasno je da transformacije (A) i (B) prevode striktnu nejednakost u striktnu, pa stoga ako je poznat slučaj jednakosti za jednu od nejednakosti, lako se može odrediti slučaj jednakosti za svaku od ekvivalentnih nejednakosti. Prema tome, polazeći od slučaja jednakosti za (III. 28), dobijamo da je (35) striktno osim ako je $\dfrac{1}{\log x}+\dfrac{1}{\log y}=\dfrac{1}{\log z}$ i x^a je proporcionalno sa y^b.

9° Aditivna nejednakost (III. 30) ekvivalentna je multiplikativnoj nejednakosti:

$$\exp \sum_{k=1}^{n} p_k (\log a_k)^p \exp \sum_{k=1}^{n} p_k (\log b_k)^p \geqq \exp \sum_{k=1}^{n} p_k (\log a_k b_k)^p \qquad (p>1).$$

5.3. Sada ćemo navesti jednostavne potrebne i dovoljne uslove za važenje (32).

Teorema 28. *Potreban i dovoljan uslov da nejednakost* (32) *važi je da je funkcija H, definisana sa $H(s, t)=M\big(f(K^{-1}(s), L^{-1}(t))\big)$, konkavna; ako je H konveksna, u* (32) *važi suprotna nejednakost.*

Dokaz. Primenjujuci transformaciju (A) u obliku primedbe 3° i zatim transformaciju (B) u obliku primedbe 4°, dobijamo nejednakost ekvivalentnu sa (32):

$$H(A(c; p), A(d; p)) \geqq A(H(c; d); p)$$

a ovim je baš izražena činjenica da je H konkavna funkcija.

PRIMEDBE: 1° Daćemo neke primere ove teoreme.

(i) Ako je $(s, t) \mapsto H(s, t)=K^{-1}(s)\, L^{-1}(t)$ konkavna funkcija, tada (32) daje sledeću generalizaciju (III. 28) (za $r=1$):

$$A_n(ab; p) \leqq K_n(a; p)\, L_n(b; p). \tag{36}$$

Posebno, ako je $H(s, t) = s^{1/p} t^{1/q}$, H je konkavna ako je $p, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqq 1$; ako je $p, q < 1$ i $pq \geqq p+q$, H je konveksna; u oba slučaja (36) se svodi na (III. 28) sa $s = 1$, tj. na H.

(ii) Ako je $H(s, t) = s^{r/p} t^{r/q}$, H je konkavna ako i samo ako je $\frac{r}{q} \geqq 0$, $\frac{r}{p} \geqq 0$ i $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} \leqq 1$ i (32) se svodi na (III. 26).

(iii) Uzimajući $H(s, t) = (s^{1/p} + t^{1/p})^p$, zaključujemo da je H konkavna ako je $p > 1$ i tada se (32) svodi na (III. 30), tj na nejednakost M.

(iv) Konačno, stavljajući $H(s, t) = \exp\left(\frac{\log z}{\log x} \log s + \frac{\log z}{\log y} \log t\right)$, imamo da je H konkavno ako je $\frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log y} \leqq \frac{1}{\log z}$ i tada se (32) svodi na (35).

2° Iz diskusije o konveksnim funkcijama dve promenljive (I. 5.2) sleduje da je često korisno pretpostaviti da takve funkcije imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda. Funkcije koje se sreću u praksi obično ispunjavaju ove uslove.

Posledica 29. *Ako je p pozitivna n-torka, $H_{11}'' < 0$ (ili $H_{22}'' < 0$) i $H_{11}'' H_{22}'' - (H_{12}'')^2 > 0$, u (32) važi jednakost ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$ i $b_1 = \cdots = b_n$.*

Dokaz. Neposredno iz I. 5.2.

PRIMEDBE: 3° Ako, međutim, imamo $H_{11}'' \leqq 0$ (ili $H_{22}'' \leqq 0$) i $H_{11}'' H_{22}'' - (H_{12}'')^2 \geqq 0$, postoje i drugi slučajevi jednakosti. Mogućno je preciznije reći o tim „drugim slučajevima" (videti: Beck [1]).

4° Posmatrajmo jedan primer koji je ranije bio diskutovan, naime: $H(s, t) = s^{r/p} t^{r/q}$; tada je

$$H_{11}''(s, t) = \frac{r}{p}\left(\frac{r}{p} - 1\right) s^{\frac{r}{p}-2} t^{\frac{r}{q}}, \qquad H_{22}''(s, t) = \frac{r}{q}\left(\frac{r}{q} - 1\right) s^{\frac{r}{p}} t^{\frac{r}{q}-2},$$

$$H_{11}''(s, t)\, H_{22}''(s, t) - (H_{12}''(s, t))^2 = s^{2\left(\frac{r}{p}-1\right)} t^{2\left(\frac{r}{q}-1\right)} \frac{r^2}{pq}\left(1 - \frac{r}{q} - \frac{r}{p}\right).$$

Očevidno, ako je $\frac{r}{p} \geqq 0$, $\frac{r}{q} \geqq 0$, $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} \leqq 1$, tada je $H_{11}'' \leqq 0$, $H_{22}'' \leqq 0$ i $H_{11}'' H_{22}'' - (H_{12}'')^2 < 0$, pa je H konkavna funkcija kao što je to ranije tvrđeno. Ako je u ovom slučaju $\frac{r}{p} > 0$, $\frac{r}{q} > 0$, $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} < 1$, iz posledice 29 sleduje da jednakost u (32) nastupa ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$ i $b_1 = \cdots = b_n$. Pretpostavimo li, međutim, da je $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$ (kao u H kada je $r = 1$), da bismo odredili slučaj jednakosti, moramo posmatrati kvadratnu formu

$$H_{11}''(s, t)\, h^2 + 2 H_{12}''(s, t)\, hk + H_{22}''(s, t)\, k^2$$

koja, u ovom slučaju, ima oblik

$$-s^{\frac{r}{p}} t^{\frac{r}{q}} \frac{r^2}{pq}\left(\frac{h}{s} - \frac{k}{t}\right)^2,$$

što postaje nula ako je $\frac{h}{k} = \frac{s}{t}$, i stoga, kao u Uvodu 5.2, jednakost u (32) nastupa ako su a^p i b^q proporcionalni.

Posledica 30. *Ako je $f(x, y) = x + y$ u slučaju $H(s, t) = M\left(K^{-1}(s) + L^{-1}(t)\right)$ i ako je $E = \frac{K'}{K''}$, $F = \frac{L'}{L''}$, $G = \frac{M'}{M''}$, pri čemu su svi K', L', M', K'', L'', M'' pozitivni, tada (32) važi ako i samo ako je*

$$(37) \qquad G(x+y) \geqq E(x) + F(y).$$

Dokaz. Uslovi u ovom slučaju postaju

$$\frac{1}{G(x+y)} \leqq \frac{1}{E(x)}, \quad \frac{1}{G(x+y)} \leqq \frac{1}{F(y)}, \quad \frac{1}{G(x+y)} \left(\frac{1}{E(x)} + \frac{1}{F(y)}\right) \leqq \frac{1}{E(x)\,F(y)},$$

odakle se bez teškoće dobija rezultat.

PRIMEDBA: 5° K, L, M određuju E, F, G respektivno. Važi i obrnuto. U stvari, imamo, na primer,

$$K(x) = c \int_a^x \exp\left(\int_a^u \frac{dt}{E(t)}\right) du, \quad c>0, \quad x' \geqq a.$$

Razmotrimo neke primere.

(i) Ako je $E = F = G = D$, tada (37) izražava činjenicu da je D superaditivna funkcija, što je tačno ako je $x \mapsto D(x)/x$ rastuća funkcija (I.5).

Na primer, uzimajući $D(x) = cx$ $(c>0)$, imamo $K(x) = x^{1+(1/c)}$ i (32) daje (III.30) ako se stavi $c = \dfrac{1}{p-1}$.

Ako umesto toga uzmemo $D(x) = \operatorname{tg} x$, kada je $K(x) = -\cos x$, tada (32) dovodi do nejednakosti

$$\arccos\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \cos a_k\right) + \arccos\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \cos b_k\right) \geqq \arccos\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \cos(a_k + b_k)\right),$$

sa $0 \leqq a_k, b_k \leqq \dfrac{\pi}{4}$ $(1 \leqq k \leqq n)$.

(ii) Druga mogućnost je da uzmemo da su sve tri funkcije konstantne: $E = \varepsilon$, $F = \Phi$, $G = \gamma$, gde je, recimo, $\gamma \geqq \varepsilon + \Phi$. Tada je $K(s) = x^s$, $L(s) = y^s$, $M(s) = z^s$, sa $x = e^{1/\varepsilon}$, $y = e^{1/\Phi}$, $z = e^{1/\gamma}$ i (32) dovodi do (35).

Posledica 31. *Ako je $f(x, y) = xy$, kada je $H(s, t) = M\left(K^{-1}(s) L^{-1}(t)\right)$, i ako je*

$$A(x) = \frac{K'(x)}{K'(x) + xK''(x)}, \quad B(x) = \frac{L'(x)}{L'(x) + xL''(x)}, \quad C(x) = \frac{M'(x)}{M'(x) + xM''(x)},$$

tada, ako su funkcije K', L', M', A, B, C pozitivne, (32) *važi ako i samo ako je $C(xy) \geqq C(x) + C(y)$.*

Dokaz posledice 31 je sličan dokazu posledice 30 (Beck [1]).

PRIMEDBE: 6° Kao u prethodnoj primedbi i ovde A, B, C određuju K, L, M respektivno. Na primer, $K(x) = C \displaystyle\int_a^x \exp\left(\int_a^u \frac{dt}{tA(t)}\right) \frac{du}{u}$.

7° Ako u ovom slučaju uzmemo $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $\gamma \geqq \alpha + \beta$, tada se (32) svodi na (III.27), gde je $p = \dfrac{1}{\alpha}$, $q = \dfrac{1}{\beta}$, $r = \dfrac{1}{\gamma}$.

5.4. Kao drugu primenu teoreme 28, moguće je dobiti uslove pod kojima je $F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$ konveksna funkcija kao funkcija od $\boldsymbol{a}$ (I.5.2.).

Teorema 32. *Ako F ima neprekidne izvode drugog reda i striktno je rastuća i striktno konveksna, tada je $F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$ konveksna funkcija od $\boldsymbol{a}$ ako i samo ako je $\dfrac{F'}{F''}$ konkavna funkcija.*

Dokaz. Na osnovu neprekidnosti, $F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$ je konveksna ako i samo ako nejednakost

$$F_n\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}; \boldsymbol{p}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) + F_n(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})\right) \tag{38}$$

važi za svako $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Primenjujući teoremu 28 za $K=L=M=F$ i $f(x, y)=\frac{x+y}{2}$, zaključujemo da (38) važi ako i samo ako je $H(s, t)=F\left(\frac{1}{2}F^{-1}(s)+\frac{1}{2}F^{-1}(t)\right)$ konkavna funkcija. Na osnovu I.5. lako se vidi da će to biti ako i samo ako je

$$\frac{F'\left(\frac{x+y}{2}\right)}{F''\left(\frac{x+y}{2}\right)} \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{F'(x)}{F''(x)}+\frac{F'(y)}{F''(y)}\right),$$

čime je dokaz završen.

PRIMEDBE: 1° Glavne rezultate iz ovog odeljka dobio je Beck [1], mada je jedan manje uspešan pokušaj dobijanja rezultata tipa (32) učinio Cooper [1], [2].

2° Nejednakost (38) je jedno uopštenje nejednakosti $\boldsymbol{M}$.

5.5. Nejednakost (36) generališe $\boldsymbol{H}$; ova druga nejednakost kazuje da (36) važi ako je, za neko $\alpha>0$,

$$K(x)=x\,k(x), \qquad L(x)=x\,l(x), \tag{39}$$

ili

$$K(x)=\int_0^x k, \qquad L(x)=\int_0^x l. \tag{40}$$

Pri traženju direktnijeg uslova nego što je uslov da funkcija $K^{-1}(s)L^{-1}(t)$ bude konkavna, moglo bi se postaviti pitanje: Postoje li neki drugi parovi inverznih funkcija k i l koji bi mogli biti korišćeni? Da ovo nije slučaj, sleduje iz sledeće teoreme:

Teorema 33. *Neka je k striktno rastuća funkcija sa neprekidnim drugim izvodom definisana na $\mathbf{R}_+$, $k(0)=0$ i neka je l njoj inverzna funkcija. Ako su K i L definisane sa* (39) *ili* (40), *tada ako* (36) *važi za svako* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$, *funkcija k je potencijalna funkcija i* (36) *se svodi na* $\boldsymbol{H}$.

Dokaz. (a) Kako je na osnovu teoreme 28 funkcija $K^{-1}(s)L^{-1}(t)$ konkavna, na osnovu teoreme I.27 je $(K^{-1})''\leqq 0$, $(L^{-1})''\leqq 0$ i, za svako $x, y\geqq 0$,

$$\left((K^{-1})'(x)\,(L^{-1})'(y)\right)^2 \leqq K^{-1}(x)\,L^{-1}(y)\,(K^{-1})''(x)\,(L^{-1})''(y). \tag{41}$$

Dalje, prema (39), imamo $x=K\left(K^{-1}(x)\right)=K^{-1}(x)\,k\left(K^{-1}(x)\right)$, te je

$$K^{-1}(x)=l\left(\frac{x}{K^{-1}(x)}\right)=\frac{K^{-1}(x)}{x}\,\frac{x}{K^{-1}(x)}\,l\left(\frac{x}{K^{-1}(x)}\right)$$

i, na osnovu (39), $x=L\left(\frac{x}{K^{-1}(x)}\right)$, tj.

$$L^{-1}(x)\,K^{-1}(x)=x. \tag{42}$$

Diferencirajući dva puta, nalazimo

(43) $$(K^{-1})'' L^{-1} + 2 (K^{-1})' (L^{-1})' + K^{-1} (L^{-1})'' = 0.$$

Primenjujući (41) za $x = y$, iz (43) dobijamo

$$\big((K^{-1})'' L^{-1} + K^{-1} (L^{-1})''\big)^2 = \big(2 (K^{-1})' (L^{-1})'\big)^2 \leqq 4 K^{-1} L^{-1} (K^{-1})'' (L^{-1})'',$$

tj.

$$\big((K^{-1})'' L^{-1} - K^{-1} (L^{-1})''\big)^2 \leqq 0.$$

Ovo implicira

$$(K^{-1})'' L^{-1} = K^{-1} (L^{-1})'' = -(K^{-1})' (L^{-1})', \quad (K^{-1})'' L^{-1} + (K^{-1})' (L^{-1})' = 0,$$

tj. $(K^{-1})' L^{-1}$ je konstantno, što na osnovu (42) povlači da je i $x \dfrac{(K^{-1})'(x)}{K(x)}$ konstantno, pa je K^{-1} potencijalna funkcija od x.

(b) Kao i u prethodnom slučaju $K^{-1}(s) L^{-1}(t)$ je konkavna, pa stoga nejednakost (41) važi; međutim, koristeći (40), ova nejednakost je u stvari $\dfrac{k(\alpha) l(\beta)}{\alpha \beta k'(\alpha) l'(\beta)} \leqq 1$, gde smo stavili $x = K(\alpha)$, $y = L(\beta)$. Kako je l inverzna funkcija za k, ovo se može napisati u obliku

$$\frac{k(\alpha)}{\alpha k'(\alpha)} \leqq \frac{k(\gamma)}{\gamma k'(\gamma)} \qquad \big(\gamma = l(\beta)\big).$$

Kako su α i γ proizvoljni, $\dfrac{x k'(x)}{k(x)}$ je konstantno, pa je k potencijalna funkcija.

Primedba: 1° Deo (b) teoreme 33 pripada Cooperu [3]; videti HLP, pp. 82—83.

6. KONVERZNE NEJEDNAKOSTI

U ovom odeljku konverzne nejednakosti iz III.5 proširene su na kvaziaritmetičke sredine. Rezultate je dobio Beck [1].

Teorema 34. *Neka su F i G dve striktno monotone funkcije i G rastuća, koje su definisane na intervalu $[m, M]$, F striktno konveksna u odnosu na G, $f: [m, M] \times [m, M] \to \mathbf{R}$ neprekidna, striktno rastuća po prvoj promenljivoj, striktno opadajuća po drugoj promenljivoj i $f(x, x) = C$ $(m \leqq x \leqq M)$. Tada za sve (odgovarajuće) n-torke $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{p}$*

(a) *važi*

(44) $$f\big(G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}),\ F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) \geqq C$$

sa jednakošću ako i samo ako su svi a_i jednaki uz $p_i > 0$;

(b) *postoji najmanje jedno θ $(0 < \theta < 1)$ takvo da je*

(45) $$f\big(G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}),\ F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) \leqq f\big(G_2(m, M;\ \theta, 1-\theta),\ F_2(m, M;\ \theta, 1-\theta)\big).$$

Ako je θ jedinstveno, jednakost u (45) važi ako i samo ako postoji $\mathbf{I} \subset \{1, \ldots, n\}$ takvo da je $\sum_{k \in \mathbf{I}} p_k = \theta$ i $a_k = M$ $(k \in \mathbf{I})$, $a_k = m$ $(k \notin \mathbf{I})$.

Dokaz. (a) Ovo je neposredna posledica teoreme 8 i osobina f.

(b) Kako je $m \leqq a_i \leqq M$ $(1 \leqq i \leqq n)$, iz leme 2 (d) sleduje da za neko α_i $(0 < \alpha_i < 1)$ imamo $a_i = G_2(m, M; \alpha_i, 1 - \alpha_i)$, i stoga je

(46) $\quad G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) = G_2(m, M; \beta, 1 - \beta),$

gde je $\beta = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_k \alpha_k = A_n(\vec{\alpha}; \boldsymbol{p})$. Stavimo

$$c_i = F_2(m_2, M; \alpha_i, 1 - \alpha_i) \quad (1 \leqq i \leqq n), \qquad F_n = (\boldsymbol{c}; \boldsymbol{p}) = F_2(m, M; \beta, \beta - \beta).$$

Na osnovu teoreme 8 je $\boldsymbol{c} \leqq \boldsymbol{a}$, pa je, prema lemi 2 (b), $F_n(\boldsymbol{c}; \boldsymbol{p}) \leqq F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$, tj.

(47) $\quad F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \geqq F_2(m, M; \beta, 1 - \beta).$

Stoga, primenjujući (46) i (47) i osobine f, imamo

$$f\big(G_n(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}), F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) \leqq f\big(G_2(m, M; \beta, 1 - \beta), F_2(m, M; \beta, 1 - \beta)\big).$$

Označimo desnu stranu poslednje nejednakosti sa $\lambda(\beta)$ $(0 \leqq \beta \leqq 1)$. Tada je λ neprekidna funkcija, $\lambda(0) = \lambda(1) = C$ i, s obzirom na (a), $\lambda(\beta) \geqq C$ $(0 \leqq \beta \leqq 1)$. Stoga postoji najmanje jedna vrednost β, recimo θ, u kojoj λ dostiže maksimalnu vrednost. Ovim je završen dokaz nejednakosti (45).

Da bi važila jednakost u (45), mora važiti jednakost u (47), što daje $c = a$ i $F_2(m; M; \alpha_i, 1 - \alpha_i) = G_2(m, M; \alpha_i, 1 - \alpha_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

Međutim, kako je $m \neq M$, na osnovu hipoteza imamo $\alpha_i = 1$, ili $\alpha_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, odakle dobijamo slučaj jednakosti.

PRIMEDBE: 1° Osnovni primeri funkcije f su $(x, y) \mapsto x - y$ i $(x, y) \mapsto x/y$ ako je $C = 0$ i $C = 1$ respektivno.

° Primetimo da je bitno različit slučaj nenegativnih težina od slučaja pozitivnih težina.

3° Ako je $f(x, y) = x/y$ i ako je

$$G(x) = x^s \quad (s \neq 0), \qquad G(x) = \log x \quad (s = 0);$$

$$F(x) = x^r \quad (r \neq 0), \qquad F(x) = \log x \quad (r = 0),$$

gde je $r < s$, tada se teorema 34 (b) svodi na teoremu III. 41.

4° Za $f(x, y) = x - y$ i G i F kao u 3°, teorema 34 (b) svodi se na teoremu III. 44.

6.2. U primedbi III. 5.1.2° navedena je Beckenbachova generalizacija [3]. Sada ćemo pokazati da odgovarajuća generalizacija postoji i za prethodni opšti slučaj i da se Beckenbachov rezultat dobija kao posledica ove generalizacije.

Ako je $\boldsymbol{a} = (b_1, \ldots b_s, c_1, \ldots, c_{n-s})$, stavimo $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_s)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_{n-s})$. Tada je $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Slično postupamo i sa težinama $\boldsymbol{p}$, kada možemo izraziti $\boldsymbol{p}$ u obliku $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$.

Teorema 35. *Neka su F, G, f isti kao u teoremi 34. Neka je, dalje, $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ niz iz $[m, M]$ i $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ nenegativan niz sa $\sigma = 1 - P_s = \sum_{k=1}^{n-s} r_k$. Tada za odgovarajuće $\boldsymbol{c}$ i $\boldsymbol{r}$:*

(a) *Postoji bar jedno y $(m \leqq y \leqq M)$ takvo da je*

(48) $\quad f\big(G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}), F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big) \geqq f\big(G_{s+1}(\boldsymbol{b}, y; \boldsymbol{q}, \sigma), F_{s+1}(\boldsymbol{b}, y; \boldsymbol{q}, \sigma)\big);$

ako je y jedinstveno, tada jednakost u (48) važi ako i samo ako za svako c_i za koje je $p_i > 0$, imamo $c_i = y$.

(b) *Postoji bar jedno* θ $(0>\theta>\sigma)$ *takvo da je*

$$(49)\qquad \begin{aligned} & f\big(G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}),\ F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\big) \\ & \leqq f\big(G_{s+2}(\boldsymbol{b}, m, M;\ \boldsymbol{q}, \theta, 1-\theta),\ F_{s+2}(\boldsymbol{b}, m, M; \boldsymbol{q}, \theta, 1-\theta)\big); \end{aligned}$$

ako je θ *jedinstveno, jednakost važi ako i samo ako postoji* $\mathbf{I}\subset\{1, \ldots, n\}$ *takvo da je* $\sum\limits_{k\in \mathbf{I}} p_k=\theta$ *i* $a_k=M$ $(k\in\mathbf{I})$, $a_k=m$ $(k\notin\mathbf{I})$.

Dokaz. (a) Stavimo $x=G_{n-s}\left(\boldsymbol{c}; \frac{p_{s+1}}{\sigma}, \ldots, \frac{p_n}{\sigma}\right)$. Tada je

$$(50)\qquad G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=G_n(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c};\ \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})=G_{s+1}(\boldsymbol{b}, x;\ \boldsymbol{q}, \sigma).$$

Ako je $z=F_{n-s}\left(\boldsymbol{c}; \frac{p_{s+1}}{\sigma}, \ldots, \frac{p_n}{\sigma}\right)$, tada imamo $F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=F_{s+1}(\boldsymbol{b}, z;\ \boldsymbol{q}, \sigma)$.

Na osnovu pretpostavki i teoreme 8 je $z\leqq x$, pa je, stoga, na osnovu leme 2 (b),

$$(51)\qquad F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=F_{s+1}(\boldsymbol{a}, z;\ \boldsymbol{q}, \sigma)\leqq F_{s+1}(\boldsymbol{b}, x;\ \boldsymbol{q}, \sigma).$$

Odavde, koristeći uvedene pretpostavke, (50) i (51) impliciraju

$$f\big(G_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}),\ F_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\big)\geqq f\big(G_{s+1}(\boldsymbol{b}, x;\ \boldsymbol{q}, \sigma),\ F_{s+1}(\boldsymbol{b}, x;\ \boldsymbol{q}, \sigma)\big).$$

Dajući x vrednost y za koju desna strana ove nejednakosti postaje minimalna, dobijamo (48). Slučaj jednakosti se neposredno utvrđuje.

(b) Ovaj dokaz je sličan sa odgovarajućim dokazom u teoremi 34.

PRIMEDBA: 5° Primetimo da teorema 34 (a) pokazuje da u opštem slučaju desna strana od (48) predstavlja poboljšanje očigledne donje granice, naime C.

Posledica 36. *Neka su date pozitivna n-torka* $\boldsymbol{p}$ *i pozitivna m-torka* $\boldsymbol{b}$ $(1\leqq m\leqq n)$. *Za sve* $(n-m)$*-torke* $\boldsymbol{c}=(c_{m+1}, \ldots, c_n)$ *i za svako* r, s $(-\infty\leqq r\leqq s\leqq +\infty)$ *važi*

$$(52)\qquad \frac{M_n^{[s]}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c};\ \boldsymbol{p})}{M_n^{[r]}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c};\ \boldsymbol{p})}\geqq\frac{M_n^{[s]}(\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{b}};\ \boldsymbol{p})}{M_n^{[r]}(\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{b}};\ \boldsymbol{p})},$$

gde je svaki element $\overline{\boldsymbol{b}}$, *osim u kombinaciji* $r=-\infty$, $s=+\infty$, *dat sa*

$$\begin{aligned} \overline{b}_j=\beta &=\min \boldsymbol{b} \quad (r=-\infty,\ -\infty<s<+\infty), \\ &=\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} p_k b_k{}^s}{\sum\limits_{k=1}^{m} p_k b_k{}^s}\right)^{\frac{1}{s-r}} \quad (-\infty<r,\ s<+\infty), \\ &=\max \boldsymbol{b} \quad (-\infty<r<+\infty,\ s=+\infty); \end{aligned}$$

ako je $r=-\infty$, $s=+\infty$ *svako od* $\overline{b}_j$ *je proizvoljno s tim što mora da je* $\min \boldsymbol{b}\leqq\overline{b}_j\leqq\max \boldsymbol{b}$. *U* (52) *važi jednakost ako i samo ako je* $c_j=\beta$ $(m+1\leqq j\leqq n)$, *osim u slučaju* $r=-\infty$, $s=+\infty$ *kada jednakost važi ako i samo ako je* $\min \boldsymbol{b}\leqq c_j\leqq\max \boldsymbol{b}$ $(m+1\leqq j\leqq n)$.

Dokaz. U svim slučajevima, osim za $r=-\infty$ ili $s=+\infty$, ovo je neposredna posledica teoreme 35 (a) za $f(x, y)=x/y$, i gde su F i G stepeni logaritamske funkcije.

Kao tipičan slučaj kada je neko od r ili s beskonačno, posmatrajmo slučaj $-\infty<r<+\infty$, $r\neq 0$, $s=+\infty$, i uočimo funkciju f definisanu sa

$$f(c_{m+1}, \ldots, c_n)=\frac{\max(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{M_n^{[r]}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}; \boldsymbol{p})}.$$

Jednostavna izračunavanja daju

$$\frac{\partial f}{\partial c_j}<0 \quad \big(\text{za } c_j<\max(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\big), \quad \frac{\partial f}{\partial c_j}>0 \quad \big(\text{za } c_j=\max(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\big),$$

pa stoga (52) važi u tom slučaju sa jednakošću ako i samo ako je $c_j=$ $=\max \boldsymbol{b}$ $(m+1\leqq j\leqq n)$.

Ako je $r=-\infty$, posmatrajmo funkciju f definisanu sa

$$f(c_{m+1}, \ldots, c_n)=\frac{\max(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{\min(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

Iz definicije $\overline{\boldsymbol{b}}$ u ovom slučaju sleduje $\min(\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{b}})=\min \boldsymbol{b}$, $\max(\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{b}})=\max \boldsymbol{b}$. Kako je $\min(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\leqq\min \boldsymbol{b}$ i $\max(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\geqq\max \boldsymbol{b}$, rezultat važi u ovom slučaju sa jednakošću kao što je i tvrđeno.

Posledica 37. *Neka je $0<m<M$, $\boldsymbol{p}$ pozitivna n-torka, $P_n=1$ i $\boldsymbol{b}$ pozitivna u-torka. Za svaku $(n—u)$-torku $\boldsymbol{c}$ takvu da je $m\leqq c_j<M$, $u+1\leqq j\leqq n$ i proizvoljno r, s takvo da je $-\infty\leqq r<s\leqq+\infty$, imamo*

$$\frac{M_n^{[s]}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}; \boldsymbol{p})}{M_n^{[r]}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}; \boldsymbol{p})}\leqq\frac{M_{u+2}^{[r]}(\boldsymbol{b}, m, M; \boldsymbol{q}, \sigma-\alpha, \alpha)}{M_{u+2}^{[r]}(\boldsymbol{b}, m, M; \boldsymbol{q}, \sigma-\alpha, \alpha)}, \tag{53}$$

gde je $\boldsymbol{q}=(p_1, \ldots, p_u)$, $\sigma=1-P_u$,

$$\alpha=0 \quad (\theta<0), \qquad \alpha=\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\sigma), \qquad \alpha=\sigma \quad (\theta>\sigma),$$

gde je θ dato sa

$$\theta=\frac{1}{s-r}\left(\frac{r\left(\sum_{k=1}^{u} p_k b_k{}^r+\sigma m^r\right)}{M^r-m^r}-\frac{s\left(\sum_{k=1}^{u} p_k b_k{}^s+\sigma m^s\right)}{M^s-m^s}\right), \tag{54}$$

za r, s konačno i $rs\neq 0$. Ako je $r=0$ ili $s=0$, tada je θ definisano kao granična vrednost (54) pod pretpostavkom da je parametar koji je različit od nule konačan; $\theta=0$ ako je r konačno i $s=+\infty$; $\theta=\sigma$ ako je $r=-\infty$ i s konačno i $\theta=\sigma/2$ ako je $r=-\infty$, $s=+\infty$. (Ako je $u=0$ tada je $0\leqq\theta\leqq\sigma$). Jednakost u (53) važi: za konačno r i s ako i samo ako postoji $\mathbf{I}\subset\{m+1, \ldots, n\}$ takvo da je $\sum_{k\in\mathbf{I}} p_k=\alpha$, $c_k=M$ $(k\in\mathbf{I})$, $c_k=m$ $(k\notin\mathbf{I})$; za $r=-\infty$ i s konačno ako i samo ako važe prethodni uslovi i $\min \boldsymbol{b}=m$; za r konačno i $s=+\infty$ ako i samo ako važe prethodni uslovi i $\max \boldsymbol{b}=M$; za $r=-\infty$ ako i samo ako je $\min(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=m$, $\max(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=M$.

Dokaz. Ako su r i s konačni, ovo je posledica teoreme 35 (b); ostali slučajevi se direktno proveravaju.

7. GENERALIZACIJE KVAZIARITMETIČKIH SREDINA

L. Losonczi ([1] i [2]) je generalisao kvaziaritmetičke sredine na sledeći način: Pretpostavimo da je $\mathbf{I}$ zatvoren interval iz $\mathbf{R}$ i da I $\vec{\Phi}:\mathbf{I}^n \to (\mathbf{R}_+^*)^n$, $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, $\Phi_i : \mathbf{I} \to \mathbf{R}_+^*$ $(1 \leqq i \leqq n)$; $M : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ strogo monotona funkcija. Stavimo

$$(55) \qquad M_n(a; \vec{\Phi}) = M^{-1}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \Phi_k(a_k)\, M(a_k)}{\sum_{k=1}^{n} \Phi_k(a_k)}\right).$$

Primedbe: 1° Ako je $\vec{\Phi}$ konstantno, recimo $\vec{\Phi}(a) = (p_1, \dots, p_n)$ za svako $a \in \mathbf{I}^n$, tada se (55) svodi na (1).

2° Drugi jednostavan slučaj je ako je $\Phi_1 = \cdots = \Phi_n = \Phi$. Tada se (55) svodi na

$$(56) \qquad M_n(a; \vec{\Phi}) = M^{-1}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k)\, M(a_k)}{\sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k)}\right).$$

3° Specijalan slučaj za $M(x) = x^p$ i $\Phi(x) = x^\alpha$ daje

$$(57.1) \qquad M_n^{[p;\, \alpha]}(a) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha+p}}{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ako je $M(x) = \log x$, imamo

$$(57.2) \qquad M_n^{[0;\, \alpha]}(a) = \exp\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} \log a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}}\right).$$

Ove sredine za $\alpha = 0$ svode se na obične potencijalne sredine sa jednakim težinama tj. $M_n^{[p;\, 0]}(a) = M_n^{[p]}(a)$. Dresher [1] je prvi ispitivao ove sredine.

4° Stavljajući da je $\vec{\Phi} = (q_1 x^\alpha, \dots, q_n x^\alpha)$, sredine (57) mogu se proširiti na težinske sredine

$$(58) \qquad M_n^{[p;\, \alpha]}(a; q) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k a_k^{\alpha+p}}{\sum_{k=1}^{n} q_k a_k^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \neq 0,\ -\infty < p < +\infty),$$

$$= \exp\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k a_k^{\alpha} \log a_k}{\sum_{k=1}^{n} q_k a_k^{\alpha}}\right) \qquad (p = 0).$$

Naravno, $M_n^{[p;\,0]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})=M_n^{[p]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})$.

5° Primer naveden u prethodnoj primedbi takođe je generalizacija kontraharmonijske sredine iz III. 4. U stvari, $M_n^{[1;\,r-1]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})=H_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\,\boldsymbol{q})$.

Sada ćemo izložiti jedan rezultat koji proširuje teoremu 28 na ove opštije sredine (Losonczi [2], Bullen [13]).

Teorema 38. *Neka su K, L, M: $\mathbf{I}\to\mathbf{R}$ diferencijabilne funkcije, $\vec{\Phi}$, $\vec{\psi}$, $\vec{\chi}$: $\mathbf{I}^n\to(\mathbf{R}_+^*)^n$, $f{:}\mathbf{I}^2\to\mathbf{I}$ diferencijabilna funkcija. Tada, ako je $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbf{I}^n$, važi*

$$(59)\qquad f\big(K_n(\boldsymbol{a};\,\vec{\Phi}),\ L_n(\boldsymbol{b};\,\vec{\psi})\big)\leq M_n\big(f(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b});\,\vec{\chi}\big)$$

ako i samo ako je, za svako u, v, s, t iz $\mathbf{I}$ i $1\leq i\leq n$,

$$(60)\qquad \left(\frac{M\circ f(u,\,v)-M\circ f(t,\,s)}{M'\circ f(t,\,s)}\right)\left(\frac{\chi_i\circ f(u,\,v)}{\chi_n\circ f(t,\,s)}\right)$$
$$\leq\left(\frac{K(u)-K(t)}{K'(t)}\right)\frac{\Phi_i(u)}{\Phi_n(t)}\,f_1'(t,s)+\left(\frac{L(v)-L(s)}{L'(s)}\right)\frac{\psi_i(v)}{\psi_n(s)}\,f_2'(t,s).$$

U (59) i (60) istovremeno $\geq$ može da se zameni sa $\leq$ ili sa $=$.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je M rastuća funkcija. Slučaj kada je opadajuća, razmatra se slično. Ako je $1\leq i\leq n$, stavljajući $a_i=u$, $a_k=t\ (k\neq i)$, $b_i=v$, $b_k=s$ $(k\neq i)$ u (59), nalazimo

$$(61)\qquad \chi_i\circ f(u,\,v)\big(M\circ f(u,\,v)-M\circ f(K_n,\,L_n)\big)$$
$$\leq\sum_{\substack{k\neq i\\k=1}}^{n}\chi_k\circ f(t,\,s)\big(M\circ f(K_n,\,L_n)-M\circ f(t,\,s)\big).$$

Ovde K_n, L_n označavaju $K_n(\boldsymbol{a};\,\vec{\Phi})$ i $L_n(\boldsymbol{b};\,\vec{\psi})$ respektivno, gde $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ zadovoljavaju gornje uslove. Kako su M i f diferencijabilne funkcije, imamo

$$(62)\qquad M\circ f(K_n,\,L_n)-M\circ f(t,\,s)$$
$$=\big(M'\circ f(t,\,s)+\varepsilon_1\big)\Big(\big(f_1'(t,\,s)+\varepsilon_2\big)(K_n-t)$$
$$+\big(f_2'(t,\,s)+\varepsilon_3\big)(L_n-s)\Big),$$

gde $\varepsilon_k\to 0$ kada $(K_n,\,L_n)\to(t,\,s)$ $(k=1,\,2,\,3)$.

Ako definicije χ_i, ψ_i proširimo stavljajući $\chi_i=\chi_n$ $(i\geq n)$, $\psi_i=\psi_n$ $(i\geq n)$, nije teško dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty}K_n\leq t$, $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n=s$ i stoga $\varepsilon_k\to 0$ kada $n\to+\infty$ $(k=1,\,2,\,3)$. U stvari, imamo

$$\lim_{n\to+\infty}(K_n-t)\sum_{\substack{k\neq i\\k=1}}^{n}\chi_k\circ f(t,\,s)=\left(\frac{K(u)-K(t)}{K'(t)}\right)\frac{\Phi_i(u)\,\chi_n\circ f(t,\,s)}{\Phi_n(t)},$$

$$\lim_{n\to+\infty}(L_n-s)\sum_{\substack{k\neq i\\k=1}}^{n}\chi_k\circ f(t,\,s)=\left(\frac{L(v)-L(s)}{L'(s)}\right)\frac{\psi_i(v)\,\chi_m\circ f(s,\,t)}{\psi_n(s)}.$$

Koristeći ove rezultate, iz (61) i (62) dobijamo (60).

(ii) Stavljajući $u=a_i$, $v=b_i$, $t=K_n(\boldsymbol{a};\vec{\Phi})=K_n$, $s=L_n(\boldsymbol{b};\vec{\psi})=L_n$ u (60) i sabirajući n tako dobijenih jednačina, dolazimo do nejednakosti

$$\frac{M\left(M_n\left(f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b});\vec{\chi}\right)\right)-M\circ f(K_n,L_n)}{M'\circ f(K_n,L_n)}\leqq 0,$$

odakle nalazimo (59).

Prirodno, znak nejednakosti u (59) ili (60) može da se zameni suprotnim, ili znakom jednakosti, ako i samo ako je to urađeno i u drugoj od ovih formula.

Primedbe: 6° Ako su $\vec{\Phi}=\vec{\psi}=\vec{\chi}$ konstantne funkcije (videti primedbu 1°, nejednakost (60) se svodi na

$$\frac{M\circ f(u,v)-M\circ f(b,s)}{M'\circ f(t,s)}\leqq\frac{K(u)-K(t)}{K'(t)}f_1'(t,s)+\frac{L(v)-L(s)}{L'(s)}f_2'(t,s).$$

Ako sada pretpostavimo da K, L, M i f imaju neprekidne druge izvode, poslednja nejednakost je ekvivalentna, za svako h i k, sa

$$H_{11}''h^2+2H_{12}''hk+H_{22}''k^2\leqq 0,$$

gde je H funkcija definisana u teoremi 28. Ovo u stvari znači da je ova kvadratna forma negativno definitna, što je ekvivalentno sa tvrđenjem da je H konkavna funkcija (Uvod 5.2.).

Prema tome, u svim slučajevima teorema 38 se svodi na teoremu 28.

7° Neka je $E_i=\{(u,v,t,s)\mid$ za ove vrednosti u (60) važi jednakost$\}$ $(1\leqq i\leqq n)$. Gornji dokaz pokazuje da jednakost u (59) važi ako i samo ako je $(a_i,b_i,K_n(\boldsymbol{a};\vec{\Phi}),L_n(\boldsymbol{b};\vec{\psi}))\in E_i$ $(1\leqq i\leqq n)$.

Teorema 38 može se proširiti na slučaj $f:\mathbf{I}^m\to\mathbf{I}$.

Posebno, iz teoreme 38 možemo izvesti uslove pod kojima su ove opštije sredine komparabilne.

Posledica 39. *Sa oznakama iz teoreme* 38 *imamo* $M_n(\boldsymbol{a};\vec{\chi})\leqq K_n(\boldsymbol{a};\vec{\Phi})$ *za svako* $\boldsymbol{a}\in\mathbf{I}^n$ *ako i samo ako je, za svako* $u,t\in\mathbf{I}$ *i* $1\leqq i\leqq n$,

$$\frac{M(u)-M(t)}{M'(t)}\,\frac{\chi_i(u)}{\chi_n(t)}\leqq\frac{K(u)-K(t)}{K'(t)}\,\frac{\Phi_i(u)}{\Phi_n(t)}.$$

Posebno: (i) *ako je* $\vec{\Phi}=\vec{\chi}$, *sredine* $M_n(\boldsymbol{a};\vec{\Phi})$ *i* $K_n(\boldsymbol{a};\vec{\Phi})$ *su kompararabilne ako i samo ako je K rastuća (opadajuća) i M je konveksna (konkavna) funkcija u odnosu na K*; (ii) *ako je* $M=K$, $\Phi_1=\cdots=\Phi_n=\Phi$, $\chi_1=\cdots=\chi_n=\chi$, *sredine* $M_n(\boldsymbol{a};\vec{\chi})$ *i* $M_n(\boldsymbol{a};\vec{\Phi})$ *su komparabilne ako i samo ako je* $\frac{\Phi}{\chi}$ *monotona funkcija.*

Dokaz. Tvrđenje neposredno sleduje iz teoreme 38 za $f(x,y)\equiv x$. Partikularan slučaj (ii) je očigledan. Partikularan slučaj (i) sleduje iz činjenice $\frac{M(u)-M(t)}{M'(t)}\leqq\frac{K(u)-K(t)}{K'(t)}$, za rastuće K, ekvivalentno sa činjenicom da je M konveksno u odnosu na K, (primedba I.5.3°).

Primedbe: 9° Rezultati iz prethodne posledice mogu se bez teškoća proširiti: za svako $F:\mathbf{I}\to\mathbf{I}$, nejednakost $M_n(F(\boldsymbol{a});\vec{\chi})\leqq F(K_n(\boldsymbol{a};\vec{\Phi}))$ važi ako i samo ako je

$$\left(\frac{M\circ F(a)-M\circ F(t)}{M'\circ F(t)}\right)\frac{\chi_i(u)}{\chi_n(t)}\leqq\left(\frac{K(u)-K(t)}{K'(t)}\right)\frac{\Phi_i(u)}{\Phi_n(t)}F'(t).$$

10° Jedan drugi, veoma važan, partikularan slučaj je $f(x, y)=x+y$. Tada iz teoreme 33 izlazi da je $K_n(\boldsymbol{a}; \vec{\Phi})+L_n(\boldsymbol{b}; \vec{\psi})\leqq M_n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}; \vec{\lambda})$ ako i samo ako je, za $1\leqq i\leqq n$, $u, v, s, t\in \mathbf{I}$,

$$(63)\qquad \frac{M(u+v)-M(t+s)}{M'(t+s)}\,\frac{\chi_i(u+v)}{\chi_n(t+s)}\leqq \frac{K(u)-K(t)}{K'(t)}\,\frac{\Phi_i(u)}{\Phi_n(t)}+\frac{L(v)-L(s)}{L'(s)}\,\frac{\psi_i(v)}{\psi_n(s)}.$$

Posledica 40. *Ako je $p\geqq 0$ i $1\geqq \alpha\geqq \max\{1-p, 0\}$ ili $p<0$ i $1-p\geqq\alpha\geqq\max\{1, -p\}$, tada je*

$$(64)\qquad M_n^{[p;\,\alpha]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}; \boldsymbol{q})\leqq M_n^{[p;\,\alpha]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})+M_n^{[p;\,\alpha]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{q}).$$

Ako je $p\geqq 0$ i $-p\leqq\alpha\leqq\min\{1-p, 0\}$ ili $p<0$ i $0\leqq\alpha\leqq\min\{1, -p\}$, u (64) važi suprotna nejednakost.

Dokaz. Za $K=L=M$, $\vec{\Phi}=\vec{\psi}=\vec{\chi}$ i $\vec{\chi}(x)=(q_1\chi(x), \ldots, q_n\chi(x))$, nejednakost (63) postaje

$$(65)\qquad G(u+v, t+s)\leqq G(u, t)+G(v, s)\left(G(x, y)=\left(\frac{M(x)-M(y)}{M'(y)}\right)\frac{\chi(x)}{\chi(y)}\right).$$

U ovom slučaju imamo $M(x)=x^p$ ili $\log x$, $\chi(x)=x^\alpha$, te je

$$G(x, y)=\frac{y}{p}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{p+\alpha}-\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}\right)\ (p\neq 0),\quad G(x, y)=y\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}\log\frac{x}{y}\ (p=0),$$

tj. $G(x, y)=y\Gamma(x/y)$, gde je

$$\Gamma(t)=\frac{1}{p}(t^{p+\alpha}-t^\alpha)\ (p\neq 0),\qquad \Gamma(t)=t^\alpha\log t\ (p=0).$$

Bez teškoća se proverava da (63) implicira da je Γ konveksna funkcija, pa je $\Gamma''(t)\geqq 0$ za $t>0$ (α, p zadovoljavaju prvi skup uslova).

Drugi skup uslova implicira da je Γ konkavna funkcija, što opet povlači (65) sa obrnutim znakom nejednakosti.

PRIMEDBE: 11° Treba istaći da nejednakost (63) ne pravi razliku između $\vec{\Phi}$, $\vec{\psi}$, $\vec{\chi}$ i $\vec{\varphi}'=(q_1\varphi_1, \ldots, q_n\varphi_n)$, $\vec{\psi}'=(q_1\psi_1, \ldots, q_n\psi_n)$, $\vec{\chi}'=(q_1\chi_1, \ldots, q_n\chi_n)$ za neku pozitivnu n-torku $\boldsymbol{q}$.

12° Ako je $\alpha=0$, kao što smo videli, $M_n^{[p;\,0]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})=M_n^{[p]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})$, pa se prvi skup uslova svodi na $p\geqq 1$. Stoga (64) generališe (III.29).

13° Ako je $p=1$, $\alpha=r-1$, kao što smo ustanovili, važi $M_n^{[1;\,r-1]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})=H_n^{[r]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q})$, pa se prvi skup uslova svodi na $1\leqq r\leqq 2$; stoga (64) generališe (III.52).

Ako pretpostavimo da je $\mathbf{I}=\mathbf{R}$, kao i da je M dva puta diferencijabilna i χ diferencijabilna funkcija, tada (65) može da bude rešeno na način koji je u suštini jedinstven.

Posledica 41. *Ako je $\mathbf{I}=\mathbf{R}$, M dva puta diferencijabilna i ako je $\vec{\chi}$ diferencijabilna funkcija, tada je, za svako $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$,*

$$(66)\qquad M_n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}; \vec{\chi})\leqq M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\chi})+M_n(\boldsymbol{b}; \vec{\chi})$$

ako i samo ako je $\chi(t)=a+bt$ za neko a, b $(b\neq 0)$, tj. ako i samo ako je

$$M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\chi})=A_n(\boldsymbol{a}).$$

Dokaz. Kao i u prethodnoj posledici, (66) će važiti ako i samo ako (65) važi za svako $u, v, s, t\in\mathbf{R}$. Pretpostavimo da je $t=0$, $u>0$. Tada (65) može da se predstavi u obliku

$$\frac{G(u+v, s)-G(v, s)}{u}\leqq\frac{G(u, v)-G(0, 0)}{u}.$$

Ako $u \to 0$, odavde dobijamo da je, $G_1'(v, s) \leqq G_1'(0, 0)$ za svako v, s. Međutim, ako je $u > 0$, na sličan način dobijamo $G_1'(v, s) \geqq G_1'(0, 0)$. Prema tome, $G_1'(v, s) = G_1'(0, 0) = a$. Slično, $G_2'(u, v) = G_2'(0, 0) = b$, pa je $G(u, v) = au + bv$, $G(a, u) = 0$, $a + b = 0$, tj.

$$(67) \qquad \frac{M(x) - M(y)}{M'(y)} \frac{\chi(x)}{\chi(y)} = a(x - y).$$

Stavljajući $y = 0$, odavde nalazimo

$$(68) \qquad M(x) = M(0) + a\chi(0) M'(0) \frac{x}{\chi(x)}.$$

Zamenjujući ovaj izraz u (67), dobijamo

$$\frac{x\chi(y) - y\chi(x)}{\chi(y) - g\chi'(y)} = a(x - y).$$

Za $y = 0$ dobijamo $a = 1$. Za $y = 1$ nalazimo $\chi(x) = Ax + B$. Kako je $\chi > 0$, imamo $A = 0$, $B > 0$. Iz (68) nalazimo $M(x) = M(0) + M'(0)x$.

Prema tome, ove sredine se svode na artimetičku sredinu, kao posledica teoreme 3.

Posledica 42. *Neka su K, $M : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ dve diferencijabilne strogo monotone funkcije i $\vec{\Phi}, \vec{\chi} : \mathbf{I}^n \to (\mathbf{R}_+^*)^n$. Tada je $M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\chi}) = K_n(\boldsymbol{a}; \vec{\Phi})$ za svako $\boldsymbol{a} \in \mathbf{I}^n$ ako je $K(x) = \dfrac{aM(x) + b}{cM(x) + d}$ i $\Phi_i(x) = k\chi_i(x)(cM(x) + d)$, gde konstante a, b, c, d, k zadovoljavaju uslov $k(c^2 + d^2)(ad - bc) \neq 0$. Ako je $c \neq 0$, $-\dfrac{d}{c}$ nije jednako K i $\dfrac{a}{c}$ nije jednako M.*

Dokaz. Koristeći slučaj kada nastupa jednakost u teoremi 38 i primedbu 9°, vidimo da prethodna jednakost važi ako i samo ako je, za $1 \leqq i \leqq n$,

$$(69) \qquad \frac{M(u) - M(t)}{M'(t)} \frac{\chi_i(u)}{\chi_n(t)} = \frac{K(u) - K(t)}{K'(t)} \frac{\Phi_i(u)}{\Phi_n(t)}.$$

Fiksirajući $t = t_0 \in \mathbf{I}$ i stavljajući

$$\mu(u) = \frac{M(u) - M(t_0)}{M'(t_0)}, \quad \varkappa(u) = \frac{K(u) - K(t_0)}{K'(t_0)},$$

bez teškoće se vidi da za u, $t\,(\neq t_0) \in \mathbf{I}$ važi

$$\left(\frac{\mu(u) - \mu(t)}{\mu'(t)}\right) \frac{\mu(t)}{\mu(u)} = \left(\frac{\varkappa(u) - \varkappa(t)}{\varkappa'(t)}\right) \frac{\varkappa(t)}{\varkappa(u)}.$$

Fiksirajući ovde $t = t_1 \neq t_0$, dobijamo $K(u) = \dfrac{aM(u) + b}{cM(u) + d}$ $(u \neq t_0)$, gde se konstante mogu odrediti polazeći od vrednosti M, M', K, K' u t_0 i t_1. Formula, na osnovu neprekidnosti, važi i kada je $u = t_0$, pa kako K nije konstantno, imamo $c^2 + d^2 > 0$ i $ad - bc \neq 0$. Ako je $c \neq 0$ izraz može da se predstavi u obliku

$$K(u) - \frac{a}{c} = -\frac{ad - bc}{c^2 M(u) + dc},$$

odakle se dobija poslednji uslov u tvrđenju teoreme. Zamenjujući izraz za K u (69), dobijamo

$$\left(\frac{\Phi_i(u)}{\chi_i(u)}\right) \frac{1}{CM(u) + d} = \left(\frac{\Phi_n(t)}{\chi_n(t)}\right) \frac{1}{CM(t) + d} \qquad (u \neq t).$$

Prema tome, leva strana je konstantna (i kao funkcija od u i od i). Ovim je završen dokaz ovog dela teoreme. Suprotno tvrđenje se lako proverava. O ovome videti: Aczél i Daróczy [1], Bajraktarević [1], Danskin [1], Daróczy [1], Daróczy i Losonczi [1].

PRIMEDBA: 14° Mada glavni rezultat ovog odeljka pripada Losoncziu [1], mnogi drugi partikularni rezultati za sredine ovog tipa dobili su ranije drugi autori. Posebno sve reference iz III. 4.1 o kontraharmonijskoj sredini su relevantne.

Darocsy i Losonczi [1] uveli su i opštije sredine. Navešćemo samo neke od rezultata koji se odnose na sredine koje je uveo Losonczi jer se iz ovih sredina kao specijalan slučaj dobijaju sredine koje je definisao Daróczy.

Neka je $\mathbf{I}$ dati interval. Označimo sa $E(\mathbf{I})$ skup svih funkcija $K:\mathbf{I}^2\to\mathbf{R}$ takvih da je za svako $x\in\mathbf{I}$ funkcija $y\mapsto K(x, y)$ neprekidna, strogo rastuća na $\mathbf{I}$ i $K(x, x)=0$. Posmatrajmo jednačinu

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(a_i, y)=0,$$

gde je $\varphi_i\in E(\mathbf{I})$, $a_i\in\mathbf{I}$ $(i=1, \ldots, n)$. Funkcija $k:\to\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(a_i; y)$ je po pretpostavci strogo rastuća i $k(\min \boldsymbol{a})\leqq 0\leqq k(\max \boldsymbol{a})$, tako da posmatrana jednačina ima jedinstveno rešenje po y takvo da je $\min a_i\leqq y\leqq \max a_i$. Ovo rešenje zvaćemo $\vec{\varphi}=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sredina i označavaćemo $M_n(\boldsymbol{a})_\varphi$.

Za $\varphi_i=\varphi$ $(i=1, \ldots, n)$ dobijamo simetrične sredine koje je uveo i ispitivao Daroczy [1].

Za $\varphi(x, y)=\varphi(y)-\varphi(x)$, gde je $\varphi:\mathbf{I}\to\mathbf{R}$ neprekidna i strogo rastuća funkcija na $\mathbf{I}$, dobijamo (55).

Niz $\vec{\varphi}=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, gde je $\varphi_i\in E(\mathbf{I})$, naziva se reproduktivan niz ako sledeća jednakost važi

$$\lim_{m\to+\infty}\big(M(\boldsymbol{a}^m)\varphi_m-t\big)\, m=\Phi(t)\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(a_i, t),$$

gde je Φ negativna funkcija koja zavisi od φ i

$$\boldsymbol{a}^m=(a_1, \ldots, a_k, \underbrace{t, \ldots, t}_{m}), \quad \varphi^m=(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+m}).$$

Skup svih reproduktivnih nizova označavaćemo sa $R(\mathbf{I})$.

Sledeći Losoncziev rezultat predstavlja generalizaciju prethodnih rezultata iz ovog odeljka.

Pretpostavimo da su $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ proizvoljni intervali, $f:\mathbf{I}_1\times\mathbf{I}_2\to\mathbf{I}$ proizvoljna diferencijabilna funkcija na $\mathbf{I}_1\times\mathbf{I}_2$ i $\varphi_k\in R(\mathbf{I})$, $\psi_k\in R(\mathbf{I}_1)$, $\chi_k\in R(\mathbf{I}_2)$ reproduktivni nizovi. Nejednakost

$$M_n\big(f(a, b)\big)_\varphi\leqq f\big(M_n(a)_\psi, M_n(b)_\chi\big)$$

važi za svako $a\in\mathbf{I}_1{}^n$, $b\in\mathbf{I}_2{}^n$ $(n=1, 2, \ldots)$ ako i samo ako je

$$(\alpha)\qquad \varphi_k^*\big(f(u, v), f(t, s)\big)\leqq\varphi_k^*(u, t)\frac{\partial}{\partial t}f(t, s)+\chi_k^*(v, s)\frac{\partial}{\partial s}f(t, s)$$

za svako $u, t\in I_1$; $v, s\in I_2$ $(k=1, 2, \ldots)$, gde je $\varphi_k^*(x, t)=\Phi(t)\varphi_k(x, t)$.

Ako su ovi uslovi uspunjeni jednakost u (α) važi ako i samo ako je $\big(a_i, b_i, M_n(a)_\psi, M_n(b)_\chi\big)\in E_i$ $(i=1, \ldots, n)$, gde je E_k skup (u, v, t, s) takvih da važi jednakost u (α).

8. NEKE DRUGE NEJEDNAKOSTI

Dva pododeljka koja sleduju mogle su da dođu odmah iza odeljka o potencijalnim sredinama. Međutim, korišćenje kvaziaritmetičkih sredina znatno pojednostavljuje razmatranje i to je razlog što se nalaze na ovom mestu.

8.1. Teorema Godunove. Sledeći jednostavan rezultat (Godunova [1]) ima interesantne posledice.

Teorema 43. *Neka je* $F: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ *neprekidna strogo rastuća funkcija takva da je* F^{-1} *konveksna funkcija i* $\lim_{x\to 0} F(x)=0$ *ili* $-\infty$. *Pretpostavimo da su* $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots)$ *i* $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots)$ *dva pozitivna niza i da je za svako* $n \geqq 1$, $\boldsymbol{q}^n=(q_1^n, \ldots, q_n^n)$ *pozitivna n-torka takva da je* $\sum_{k=1}^{n} q_k^n=1$ $(n\geqq 1)$ *i* $\sum_{n=k}^{+\infty} b_n q_k^n \leqq C$ $(k \geqq 1)$. *Tada je*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{q}^n) \leqq C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \tag{70}$$

Ako je $C=\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k$, *konstanta u* (70) *je najbolja moguća.*

Dokaz. Iz teoreme 8, za svako $n \geqq 1$, dobijamo

$$F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \leqq A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}^n)=\sum_{k=1}^{n} p_k^n a_k.$$

Prema tome, imamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}^n) \leqq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sum_{k=1}^{n} p_k a_k=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{n=k}^{+\infty} p_n b_n \leqq C \sum_{k=1}^{+\infty} a_k, \tag{71}$$

što je i trebalo dokazati.

Ako sada stavimo $a_k=1$ $(1 \leqq k \leqq m)$, $a_k=0$ $(k>m)$, tada iz (70) izlazi

$$C \geqq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} b_n+\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n F^{-1}\left(F(1) \sum_{k=1}^{m} p_k^n\right) \geqq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} b_n$$

jer pretpostavke o F impliciraju $F(1)>0$, $F(0)>0$ i $F^{-1}>0$. Ovim je završen dokaz teoreme.

Posledica 40. *Sledeće nejednakosti važe za pozitivne nizove* $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots)$ *i brojeve* $p, q>1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{q^n-1}{q^n}\right)^{1-p}(q-1)^p\left(\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} a_k\right)^p<\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p; \tag{a}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n-1}{q^n}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q^{k-1}}\right)^{\frac{q-1}{q^n-1}}<\sum_{n=1}^{+\infty} a_n; \tag{b}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \operatorname{tg}^p \frac{\pi}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n} a_k\right)^p<2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^p; \tag{c}$$

(d) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{\sin\frac{k\pi}{n}} \right)^{\operatorname{tg}(2\pi/n)} < 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} a_k;$$

(e) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)^p < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^p}{k};$$

(f) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(n! \prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/n} < \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Dokaz. (a) Stavimo $F(x)=x^{1/p}$, $q_k{}^n=\dfrac{q^{k-1}(q-1)}{q^n}$ $(n, k\geqq 1)$, $b_k=\dfrac{q^k-1}{q^k}$ i na niz $\boldsymbol{a}^p$ primenimo teoremu 43.

(b) Kao u slučaju (a), ali za $F(x)=\log x$ i niz $\boldsymbol{a}$.

(c) Za $F(x)=x^{1/p}$, $q_k{}^n=\dfrac{\sin(k\pi/n)}{\operatorname{cotg}(\pi/(2n))}$ $(n, k\geqq 1)$, $b_k=\dfrac{k}{k+1}$ $(k\geqq 1)$ primenimo teoremu 43 na $\boldsymbol{a}^p$.

(d) Kao pod (c) samo za $F(x)=\log x$ i niz $\boldsymbol{a}$.

(e) Stavimo $F(x)=x^{1/p}$, $q_k{}^n=\dfrac{1}{n}$ $(n, k\geqq 1)$, $b_k=\dfrac{1}{k+1}$ $(k\geqq 1)$ i primenimo (71) na niz $\boldsymbol{a}^p$ $\left(\text{primetimo da je } \dfrac{1}{k}\leqq \sum_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

(f) Kao za (e) samo za $F(x)=\log x$ i niz $\boldsymbol{a}$.

PRIMEDBE: 1° Kako je $\dfrac{(n!)^{1/n}}{n+1}>e^{-1}$, deo (f) implicira Carlemanovu nejednakost $\sum_{k=1}^{+\infty} G_k(a)< <e\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ (videti takođe primedbu II. 6.1°).

2° U stvari, ako uzmemo da je $F(x)=x^{1/p}$ ili $F(x)=\log x$, $q_k{}^n=\dfrac{\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k}{(\alpha+\beta)^n}$ $(n, k\geqq 1$, $\alpha, \beta>0$, $\alpha+\beta>1)$; $b_k=1$ $(k\geqq 1)$ i nizove $\boldsymbol{a}^p$ ili $\boldsymbol{a}$ respektivno, Knoppova [2] generalizacija Carlemanove nejednakosti sleduje iz teoreme 43 (takođe videti Levin [1]).

8.2. Oppenheimov problem. Proučićemo sledeće interesantno pitanje: Ako su F sredine n-torki $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u nekom poretku, kada iz toga možemo zaključiti da isti poredak važi između G sredina od $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Pitanje je postavio i, za $n=3$ u slučaju aritmetičkih i geometrijskih sredina, rešio Oppenheim [1, 2]. Proširenje na opšte n dali su Godunova i Levin [1]. Jedan drugi odgovor u opštem slučaju dao je Vasić [1]. Sledeću diskusiju izvršili su Bullen, Vasić i Stanković [1].

Teorema 41. *Neka su* $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ *dve pozitivne n-torke takve da je*

$$(72)\qquad \begin{aligned} &0<a_1\leqq\cdots\leqq a_n, \qquad 0<b_1\leqq\cdots\leqq b_n,\\ &a_i\leqq b_i \ (1\leqq i\leqq n-m,\ 1<m<n), \qquad a_i\geqq b_i\ (n-m+2\leqq i\leqq n). \end{aligned}$$

Zatim neka je $\boldsymbol{p}$ *druga pozitivna n-torka i* $F:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ *monotono rastuća i konkavna funkcija, takva da je* $x\mapsto xF'(x)$ *rastuća funkcija. Ako je*

$$(73)\qquad A_n(\boldsymbol{b};\boldsymbol{p})\geqq A_n(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}),$$

tada za $0<\alpha\leqq 1-\dfrac{P_{n-m}}{P_n}$ *važi*

(74) $$A_n(F(\boldsymbol{b});\ \boldsymbol{p})-\alpha F(A_n(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p}))\geqq A_n(F(\boldsymbol{a});\ \boldsymbol{p})-\alpha F(A_n(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})).$$

Ako je $\alpha=0$, *rezultat važi bez pretpostavke da je* $x\mapsto xF'(x)$ *rastuća funkcija. Ako je* F *strogo rastuća,* F' *strogo opadajuća i* $x\mapsto xF'(x)$ *strogo rastuća funkcija (ili,* $\alpha=0$, *tj.* F' *je strogo opadajuća), tada jednakost važi u* (74) *ako i samo ako je* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

Dokaz. Jednostavnosti radi stavimo, za $0\leqq\lambda\leqq 1$, $c_k=\lambda b_k+(1-\lambda)a_k$. Tada iz (72) imamo $0<c_1\leqq\cdots\leqq c_n$. Ako stavimo $\Phi(\lambda)=A_n(F(\boldsymbol{c});\ \boldsymbol{p})-\alpha F(A_n(\boldsymbol{c};\ \boldsymbol{p}))$, (74) postaje $\Phi(1)\geqq\Phi(0)$, pa je dovoljno dokazati da je $\Phi'(\lambda)\geqq 0$. Pođimo od

(75) $$P_n\Phi'(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}p_k(b_k-a_k)\,F'(c_k)-\alpha\left(\sum_{k=1}^{n}p_k(b_k-a_k)\right)F'\left(\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}p_k\,c_k\right),$$

i uočimo drugi član na desnoj strani ove jednakosti. Na osnovu (74) je $\sum_{k=1}^{n}p_k(b_k-a_k)\geqq 0$ i, na osnovu monotonije niza $\boldsymbol{c}$,

$$\sum_{k=1}^{n}p_k\,c_k>\sum_{k=n-m+1}^{n}p_kc_k\geqq c_{n-m+1}(P_n-P_{n-m}),$$

tako da drugi član u (75) nije veći od

(76) $$\alpha\left(\sum_{k=1}^{n}p_k(b_k-a_k)\right)F'\left(c_{n-m+1}\left(1-\frac{P_{n-m}}{P_n}\right)\right)$$

$$\leqq\alpha\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\,(b_k-a_k)\right)\frac{1}{1-\dfrac{P_{n-m}}{P_n}}F'(c_{n-m+1})\leqq\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\,(b_k-a_k)\right)F'(c_{n-m+1}),$$

gde smo iskoristili monotoniju funkcije $x\mapsto xF'(x)$. Posmatrajmo sada prvi član desne strane u jednakosti (75). On je jednak sa

$$\sum_{k=1}^{n-m}p_k(b_k-a_k)\,F'(c_k)-\sum_{k=n-m+1}^{n}p_k(a_k-b_k)\,F'(c_k)$$

(77) $$\geqq\left(\sum_{k=1}^{n-m}p_k(b_k-a_k)\right)F'(c_{n-m+1})-\left(\sum_{k=n-m+1}^{n}p_k(a_k-b_k)\right)F'(c_{n-m+1})$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\,(b_k-a_k)\right)F'(c_{n-m+1}),$$

gde smo primenili monotoniju funkcije F'.

Iz (76) i (77) sleduje $\Phi'(\lambda)\geqq 0$. Ako je $\alpha=0$, (76) može da se izostavi i rezultat proističe jer je $F'\geqq 0$, tako da je izraz u (77) nenegativan.

PRIMEDBA: 1° Bez teškoća utvrđujemo da je nejednakost (74) obrnuta ako je F opadajuća i konkavna i $x\mapsto xF'(x)$ opadajuća funkcija. Ako je F konveksna i rastuća i $x\mapsto xF'(x)$ rastuća funkcija, tada ako u (73) važi suprotna nejednakost i nejednakost (74) je suprotna (u oba slučaja ako je $\alpha=0$ uslov za funkciju $x\mapsto xF'(x)$ je nepotreban).

Posledica 42. *Neka su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *pozitivne n-torke koje zadovoljavaju* (72) *i neka je* $\boldsymbol{p}$ *pozitivna n-torka. Ako je* $-\infty < s < +\infty$ *i ako je* $M_n^{[s]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}) \geqq M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$, *tada za* $t < s$ *i* $0 \leqq \alpha \leqq 1 - \frac{P_{n-m}}{P_n}$ $(t \neq 0)$, *važi*

$$(78) \qquad \Big(\big(M_n^{[t]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})\big)^t - \alpha\big(M_n^{[s]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})\big)^t\Big)^{1/t} \geqq \Big(\big(M_n^{[t]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big)^t - \alpha\big(M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})\big)^t\Big)^{1/t}.$$

Ako je $t=0$, *pod istim pretpostavkama važi*

$$(78') \qquad G_n(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}) \geqq \left(\frac{M_n^{[s]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})}{M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})}\right)^{\alpha} G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}).$$

Ako važi suprotna nejednakost u (76) *i ako je* $t > s$, *tada u* (78) i (78') *važe suprotni znaci nejednakosti. Jednakosti u* (78) i (78') *važe ako i samo ako je* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Dokaz. Neposredno se dobija iz teoreme 41 i primedbe 1° ako se za F uzmu redom funkcije $x \mapsto x^r$, $x \mapsto \log x$ i $x \mapsto e^x$.

Primedba: 2° Slučaj $n=3$, $p_1 = p_2 = p_3$, $s=1$, $\alpha = 2/3$ u (78') razmatrao je Oppenheim [1]. Posmatranjem specijalnog slučaja on je ukazao da kada je $s=0$ analogna nejednakost (78'), gde je G_n zamenjeno sa A_n, ne mora da važi u opštem slučaju. Korektna forma je, kao što smo videli, data sa (72).

Slučaj $\alpha = 0$ teoreme 41 ili posledice 42 daje odgovor na postavljeni problem.

Posledica 43. *Neka je* $F: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ *strogo rastuća konkavna funkcija i neka su* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne n-torke pri čemu* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *zadovoljavaju* (72). *Tada, ako je*

$$(79) \qquad A_n(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}) \geqq A_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}),$$

važi

$$(80) \qquad F_n(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}) \geqq F_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}).$$

Ako je F' *strogo opadajuća funkcija, tada jednakost u* (80) *važi ako i samo ako je* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Primedbe: 3° Ova posledica je ekvivalentna sa sledećim: Ako $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ zadovoljavaju (72) i ako je $G: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ strogo rastuća funkcija tada ako je $G_n(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}) \geqq G_n(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$, imamo

$$F_n(G(\boldsymbol{b}); \boldsymbol{p}) \geqq F_n(G(\boldsymbol{a}); \boldsymbol{p}).$$

4° Na osnovu primedbe 3° zaključujemo da posledica 43 ostaje u važnosti ako se pretpostavi da je F konveksna i opadajuća funkcija. Ako je, međutim, F konveksna i rastuća funkcija i ako u (79) važi suprotna nejednakost, tada u (80) važi suprotna nejednakost.

5° Bullen, Vasić i Stanković [1] oslabili su uslove (72) za važenje posledice 43. Međutim, tada primedba 3° prestaje da važi i stoga ovaj opštiji rezultat ima manju primenu.

Posledica 44. *Neka su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *dve pozitivne n-torke koje zadovoljavaju* (72), *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivna n-torka. Ako je* $-\infty < s < +\infty$, *tada:*

(a) *ako je* $M_n^{[s]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}) \geqq M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p})$ *i* $t < s$, *tada je*

$$(81) \qquad M_n^{[t]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}) \geqq M_n^{[t]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p});$$

(b) *ako je* $M_n^{[s]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \geqq M_n^{[s]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p})$ *i* $t > s$, *tada je*

$$(82) \qquad M_n^{[t]}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{p}) \geqq M_n^{[t]}(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{p}).$$

Jednakost u (81) i (82) nastupa ako i samo ako je $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

Dokaz. Neposredno proističe iz posledice 43 sa $F(x)=x^r$, $\log x$ ili e^x i uzimajući u obzir primedbu 4°

PRIMEDBA: 6° Slučajevi $n=3$, $s=1$, $t=0$ ($s=0$, $t=1$), $p_1=p_2=p_3$ posledice 44 prvobitno je diskutovao Oppenheim ([1], [2]) na jedan potpuno drugačiji način.

Posledica 45. *Pretpostavimo da su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ dve pozitivne n-torke takve da jedna nije preuređenje druge i da je $\boldsymbol{p}$ takođe jedna n-torka. Ako je $M_n^{[-\infty]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})< M_n^{[-\infty]}(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p})$, $M_n^{[+\infty]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})>M_n^{[+\infty]}(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p})$ i ako $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u nekom preuređenju zadovoljavaju (72), tada postoji jedinstveno s ($-\infty<s<+\infty$) takvo da je*

(i) $\quad M_n^{[t]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})<M_n^{[t]}(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p}) \quad (t<s),$

(ii) $\quad M_n^{[t]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})>M_n^{[t]}(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p}) \quad (t>s),$

(iii) $\quad M_n^{[s]}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})=M_n^{[s]}(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p}).$

Dokaz. Ovo neposredno sleduje iz posledice 44 i neprekidnosti $M_n^{[s]}$ kao funkcije od s.

PRIMEDBA: 7° Očigledno je da sa rašćenjem α nejednakost (74) postaje stroža. Stoga je posledica 44 preciznija od posledice 45.

U opštem slučaju (74) ne mora da važi ako je $\alpha>1-\frac{P_{n-m}}{P_n}$. Na primer, neka je $n=3$, $p_1=p_2=p_3$ i $0<a_1\leqq a_2\leqq a_3$, $0<b_1\leqq b_2\leqq b_3$; tada, da bi važilo (72), mora da je $a_1\leqq b_1$, $b_3\leqq a_3$, pa posledica 42 u slučaju $s=1$, $t=0$ kazuje da ako je $b_2+b_2+b_3\geqq a_1+a_2+a_3$, tada je

$$b_1 b_2 b_3 \geqq \left(\frac{b_1+b_2+b_3}{a_1+a_2+a_3}\right)^{\beta} a_1 a_2 a_3 \qquad (0\leqq\beta\leqq 2).$$

Međutim, ako je $a_1=b_1=1$, $a_2=a-1$, $a_3=b_2=b_3=a$ sa $a>2$, tada je

$$A=\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{a_1+a_2+a_3}\right)^{\beta}\frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 b_3}=1+\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\frac{1}{a}+O\left(\frac{1}{a^2}\right).$$

Stoga ako je $\beta>2$ i ako je a dovoljno veliko, tada je $A>1$, što daje traženi kontraprimer.

8.3. Fanova nejednakost. Jedna nejednakost, koja je u vezi sa (74), pojavljuje se pod sasvim različitim okolnostima u sledećoj teoremi:

Teorema 46. (a) *Neka je $F\colon \mathbf{I}\to\mathbf{R}$ konveksna funkcija reda 3 i neka su a_i, $b_i\in\mathbf{I}$ $(1\leqq i\leqq n)$ takvi da je*

(83) $\quad \max(\boldsymbol{a})\leqq\min(\boldsymbol{b}), \qquad a_1+b_1=\cdots=a_n+b_n.$

Ako je $\boldsymbol{p}$ pozitivna n-torka, tada je

(84) $\quad A_n\big(F(\boldsymbol{b});\ \boldsymbol{p}\big)-F\big(A_n(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p})\big)\geqq A_n\big(F(\boldsymbol{a});\ \boldsymbol{p}\big)-F\big(A_n(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big).$

Ako je F strogo konveksna funkcija reda 3, jednakost u (84) važi ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$ (tada je i $b_1=\cdots=b_n$).

(b) *Obrnuto, ako neprekidna funkcija F zadovoljava* (84) *za svako n i bilo koju od $2n$ tačaka koje zadovoljavaju* (83) (*pri čemu svi a_i nisu jednaki*) *i sve pozitivne n-torke $\boldsymbol{p}$, tada je F konveksna funkcija reda* 3. *Ako pri ovim pretpostavkama u* (84) *važi stroga nejednakost, F je strogo konveksna funkcija reda* 3.

Dokaz. Primetimo da se oznake koje ćemo koristiti kao i osobine konveksnih funkcija reda 3 mogu naći u Uvodu.

(b) Stavimo $n=2$, $a_1=x$, $a_2=b_2=x+(3h/2)$, $b_1=x+3h$, $p_1=1$, $p_2=2$. Tada se (84) svodi na $6h^3 V_3(F;\ x+3h,\ x+2h,\ x+h,\ x)\geqq 0$. Kako naše pretpostavke povlače da ova nejednakost važi za svako x, $h>0$, sleduje da je F konveksna reda 3.

(a) Možemo pretpostaviti da je $a_1\leqq a_2\leqq \cdots \leqq a_n\leqq b_n\leqq b_{n-1}\leqq \cdots \leqq b_1$. Daćemo dokaz primenom matematičke indukcije. Neka je $n=2$. Ako je F konveksna funkcija reda 3, važi

$$(85)\qquad V_2(F;\ x_0,\ x_1,\ x_2)\geqq V_2(F;\ x_3,\ x_4,\ x_5),$$

gde je $x_0>x_3$, $x_1>x_4$, $x_2>x_5$ (ako je F strogo konveksna, ova nejednakost je stroga).

Stavimo $x_0=b_1$, $x_2=b_2$, $x_1=A_2(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p})$, $x_3=a_2$, $x_5=a_1$, $x_4=A_2(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})$. Ako je $a_1+b_1=a_2+b_2$ i $a_1<a_2\leqq b_2<b_1$, nejednakost (85) se svodi na (84) za $n=2$ (stroga nejednakost ako je nejednakost (85) stroga).

Pretpostavimo da je rezultat dokazan za $n=2, 3, \ldots, m-1$. Tada je

$$A_m\big(F(\boldsymbol{a});\ \boldsymbol{p}\big)-A_m\big(F(\boldsymbol{b});\ \boldsymbol{p}\big)=$$

$$\frac{P_{m-1}}{P_m}\Big(A_{m-1}\big(F(\boldsymbol{a});\ \boldsymbol{p}\big)-A_{m-1}\big(F(\boldsymbol{b});\ \boldsymbol{p}\big)\Big)+\frac{p_m}{P_m}\big(F(a_m)-F(b_m)\big)$$

$$\leqq \frac{P_{m-1}}{P_m}\Big(F\big(A_{m-1}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big)-F\big(A_{m-1}(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p})\big)\Big)+\frac{p_m}{P_m}\big(F(a_m)-F(b_m)\big),$$

na osnovu induktivne pretpostavke. Poslednji izraz je, na osnovu slučaja $n=2$,

$$\left(\frac{P_{m-1}}{P_m}F\big(A_{m-1}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big)+\frac{p_m}{P_m}F(a_m)\right)-\left(\frac{P_{m-1}}{P_m}F\big(A_{m-1}(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p})\big)+\frac{p_m}{P_m}F(b_m)\right)$$

$$\leqq F\big(A_m(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p})\big)-F\big(A_m(\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{p})\big).$$

Slučaj kada je F strogo konveksna funkcija reda 3 i slučaj kada nastupa jednakost utvrđuje se na osnovu gornjeg dokaza.

PRIMEDBE: 1° Nejednakost (84) može se dobiti iz (72) za $\alpha=1$.

2° Ako je F konveksna funkcija reda 3 u (84), važi suprotna nejednakost.

3° Ako je $F(x)=x^r$, tada je $F'''(x)=r(r-1)(r-2)x^{r-3}$, pa je (videti Uvod 5.3) F strogo konveksna reda 3 ako i samo ako je $0<r<1$ ili $r>2$; ako je $r<0$ ili $1<r<2$, F je strogo konkavna funkcija reda 3. Obe funkcije $x\mapsto F(x)=\log x$ i $x\mapsto F(x)=e^x$ su strogo konveksne reda 3.

Posledica 47. *Neka su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ dve pozitivne n-torke koje zadovoljavaju* (83) *i neka je $\boldsymbol{p}$ takođe pozitivna n-torka. Tada imamo*

a) *ako je* $s>0$, $t<s$ *ili* $t>2s$, *ili* $s=0$, $t>s$ *lli* $s<0$, $s>t>2s$, *tada je*

$$\left((M_n^{[t]}(b;p))^t-(M_n^{[s]}(b;p)^t)\right)^{1/t}$$
$$\geqq\left((M_n^{[t]}(a;p))^t-(M_n^{[s]}(a;p))^t\right)^{1/t}\quad(t\neq0), \tag{86}$$

$$G_n(b;p)\geqq\frac{M_n^{[s]}(b;p)}{M_n^{[s]}(a;p)}G_n(a;p)\quad(t=0);$$

(b) $s>0$, $s<t<2s$ *ili* $s=0$, $t<s$ *ili* $s<0$, $t>s$, *tada u* (86) *važe suprotne nejednakosti.*

Jednakost u (86) *važi ako i samo ako je* $a_1=\cdots=a_n$ (*u kom slučaju je i* $b_1=\cdots=b_n$).

Dokaz. Neposredno sleduje iz teoreme 46 za funkcije iz primedbe 3°.

PRIMEDBE: 4° Posledica 47 je analogna posledici 42.

5° Ako stavimo $p_1=\cdots=p_n$, $s=1$, $b_i=1-a_i$, $0<a_i\leqq\frac{1}{2}$ $(1\leqq i\leqq n)$, nejednakost (86) postaje

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^n}\leqq\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)\right)^n}, \tag{87}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$. Ovo je Fanova nejednakost [1] (videti BB, p. 5; M, pp. 66—70). Njegov rezultat generalisali su u obliku teoreme 8 Levinson [1] i Popoviciu [6]. Takođe videti: Bullen [14], Vasić i Janić [1], Chan, Goldberg i Gonek [1].

9. KLASIČNE SREDINE PROIZVOLJNIH NIZOVA

Do sada smo pretpostavljali da su elementarne klasične sredine (potencijalna sredina, aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina) sve definisane za pozitivne n-torke. Prosta razmatranja pokazuju da konveksna funkcija koja se koristi za izvođenje $(r;s)$ $(r, s\neq0)$ iz (7) ili (10) ili nije definisana za negativne vrednosti promenljive, ili menja karakter ili zadržava karakter. U prvom slučaju — svi r, s izuzimajući celobrojne vrednosti ili racionalne vrednosti sa neparnim imeniteljima — sredine nisu definisane i ne može se ništa reći. U drugom slučaju — r, s neparne celobrojne vrednosti ili racionalne vrednosti sa neparnim imeniocima — vrednosti promenljivih moraju biti ili sve pozitivne ili sve negativne; ali tada prosta promena znaka svodi problem na slučaj kada su sve pozitivne i ne preostaje ništa novo za posmatranje. Poslednji slučaj: parne celobrojne vrednosti od r, s; ovde imamo u stvari posla sa apsolutnim vrednostima i opet ničeg novog nema.

Ako se dozvoli da su izvesne vrednosti jednake nuli, tada se lako vidi da su nejednakosti striktne sem u slučaju kada su sve vrednosti 0. Prema tome, pretpostavimo da je $a_n=0$, $a_i>0$ $(1\leqq i\leqq n-1)$. Ako je $r<s$ $(r\neq0,\ s\neq0)$, imamo

$$M_n^{[r]}(a;p)=\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right)^r M_{n-1}^{[r]}(a;p)\leqq\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right)^r M_{n-1}^{[s]}(a;p)$$
$$=\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right)^{r-s}M_n^{[s]}(a;p)<M_n^{[s]}(a;p).$$

Tada izgleda da su mogućna proširenja za $\boldsymbol{a}$ na generalnije n-torke od vrlo malog interesa. Od većeg interesa je mogućnost da se dozvole opšte težine; naravno $P_n \neq 0$ postavlja izvesna ograničenja u pogledu težina, ali sledeća jednostavna lema zahteva jedno drugo, važnije, ograničenje.

Lema 48. *Ako je* $a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$, *tada je*

$$a_1 \leqq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \leqq a_n$$

ako i samo ako je

$$(88) \qquad P_n \neq 0 \ i \ 0 < \frac{P_k}{P_n} \leqq 1 \qquad (1 \leqq k \leqq n).$$

Dokaz. Na osnovu Abelove sumacione formule imamo

$$\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i = a_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P_n} (a_{k+1} - a_k),$$

odakle neposredno proizilazi dovoljnost uslova (88). S druge strane, ako je $a_1 = \cdots = a_k = 1$, $a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ $(1 \leqq k \leqq n)$, dobijamo da je uslov (88) potreban.

PRIMEDBE: 1° Ovaj uslov je već bio upotrebljen u (I.45), da bi se proširilo J, teorema I. 32. 2° Ova lema pokazuje da ako se upotrebe opšte težine, tada je potrebno da se uvede pretpostavka (88) da bi aritmetička sredina zadržala jednu od svojih osnovnih osobina.

Ovo i teorema I. 32 sugeriraju sledeću generalizaciju nejednakosti $(r; s)$:

Teorema 49. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka* $(a_1 \leqq \cdots \leqq a_n)$ *i* $\boldsymbol{p}$ *realna n-torka koja zadovoljava* (88), *tada*:

(a) *sa oznakama i uslovima leme* 6 *važi* (7),

(b) *sa oznakama i uslovima teoreme* 8 *važi* (10),

(c) *ako je* $r < s$, *važi* $(r; s)$.

Uslovi jednakosti su upravo oni koji se nalaze u odgovarajućim rezultatima.

Dokaz. Neposredno sleduje iz dokaza koji je izložen uz teoremu I. 32 (videti: Bullen [8]).

Poglavlje V:

Simetrične sredine

1. DEFINICIJE I JEDNOSTAVNE OSOBINE

U ovom poglavlju posmatraćemo sredine koje su pridružene raznim tipovima simetričnih sredina i njihovim generalizacijama. Ovo je potpuno drugačiji tip generalizacija aritmetičke i geometrijske sredine od onih koje su posmatrane u poglavljima III i IV. Simetrične funkcije se prirodno pojavljuju u ispitivanju algebarskih jednačina (videti, na primer, Uspensky [1, odeljak IX]). Mnogi od ovih rezultata poznati su već dugo vremena — osnovna nejednakost (7) pripada Newtonu (videti Campbell [1]). Osobine ovih sredina ispitivane su u mnogim osnovnim referencama (videti: BB, pp. 33—35; HLP, 2.18—2.22; M. 2.15) i, naravno, u raznim člancima (na primer, Muirhead [4]; Fujisawa [1] je ponovo pronašao dokaze mnogih fundamentalnih rezultata).

Definicija 1. *Neka je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna* n*-torka i* r $(1 \leqq r \leqq n)$ *prirodan broj. Tada je* r*-ta simetrična funkcija* n*-torke* $\boldsymbol{a}$ *definisana sa*

$$(1) \qquad e_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) = \sum_r ! \prod_{j=1}^{r} a_{i_j};$$

r*-ta simetrična sredina* n*-torke* $\boldsymbol{a}$ *definisana sa*

$$(2) \qquad P_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{e_n^{[r]}(\boldsymbol{a})}{\binom{n}{r}} \right)^{1/r}.$$

Primedbe : 1° Gornja definicija r-te simetrične sredine nije jedina koja je uobičajena. U mnogim referencama (videti HLP, p. 51; M, p. 95), navodi se sledeća definicija:

$$(3) \qquad p_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) = \left(P_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) \right)^r = \frac{e_n^{[r]}(\boldsymbol{a})}{\binom{n}{r}}.$$

Opravdanje za ovu promenu je da $P_n^{[r]}$ ima više osobina koje se očekuju od sredina nego što ih ima $p_n^{[r]}$, kao na primer osobine iz leme 2. Posebno, ako je $a_1 = \cdots = a_n = a$, imamo $P_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) = a$. Međutim, mnoge algebarske osobine lakše se iskazuju pomoću $p_n^{[r]}$ (videti (10)). Iz tog razloga, kao i zbog tradicije, nastavićemo da koristimo $p_n^{[r]}$ isto kao i $P_n^{[r]}$.

2° Kada je to potrebno, rang r u gornjim definicijama može se proširiti na sledeći način:

$$e_n^{[0]}(\boldsymbol{a}) = p_n^{[0]}(\boldsymbol{a}) = P_n^{[0]}(\boldsymbol{a}) = 1, \qquad e_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) = p_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) = P_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) = 0 \qquad (r > n,\ r < 0).$$

3° r-ta simetrična sredina za ekstremne vrednosti r, poklapa se sa drugim sredinama: $P_n^{[1]}(\boldsymbol{a})=A_n(\boldsymbol{a})$, $P_n^{[n]}(\boldsymbol{a})=G_n(\boldsymbol{a})$. Stoga izgleda prirodno očekivati da $P_n^{[r]}$ $(1\leqq r\leqq n)$ ima jednu skalu komparabilnih sredina na čijim se krajevima nalaze aritmetička i geometrijska sredina i koja je potpuno različita od skale za potencijalne sredine $M_n^{[r]}$ $(0\leqq r\leqq 1)$. Potvrda ovog očekivanja biće data u tekstu koji sleduje, a posebno u teoremi 6.

4° Veoma je važno primetiti da se simetrične sredine mogu generirati na sledeće načine:

$$\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)=\sum_{k=0}^{n} e_n^{[k]}x^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_n^{[k]}x^{n-k}, \tag{4}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i x)=\sum_{k=0}^{n} e_n^{[k]}x^{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_n^{[k]}x^{k}. \tag{5}$$

5° Mogućno je, takođe, definisati težinske simetrične sredine. Neka je $\boldsymbol{p}$ pozitivna n-torka; tada je

$$P_n^{[r]}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=\left(\frac{e_n^{[r]}(\boldsymbol{ap})}{e_n^{[r]}(\boldsymbol{p})}\right)^{1/r} \tag{6}$$

r-ta simetrična sredina od $\boldsymbol{a}$ sa težinama $\boldsymbol{p}$. Međutim, kako osobine (6) nisu potpuno zadovoljavajuće, nećemo iscrpno posmatrati ove sredine (o njima videti Bullen [1]).

6° Pomoću elementarnih simetričnih funkcija mogućno je dati jednostavnu formulu za tangens zbira od n elemenata (Pietra [1]):

$$\operatorname{tg}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)=\frac{\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}e_n^{[2i-1]}(\operatorname{tg}\boldsymbol{a})}{1+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i}e_n^{[2i]}(\operatorname{tg}\boldsymbol{a})}\qquad (n\geqq 2),$$

gde je $k=m=\frac{n}{2}$ (ako je n parno) i $k=\frac{n+1}{2}$, $m=\frac{n-1}{2}$ (ako je n neparno).

Sledeća jednostavna lema, koja proširuje slične rezultate za aritmetičku i geometrijsku sredinu (teoreme 2.2 (d) i 2.5) pomaže da se potvrdi primedba 1°.

Lema 2. *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka i* r $(1\leqq r\leqq n)$ *prirodan broj, tada je*

$$\min(\boldsymbol{a})\leqq P_n^{[r]}(\boldsymbol{a})\leqq\max(\boldsymbol{a}),$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$.

2. ODNOSI IZMEĐU ELEMENTARNIH SIMETRIČNIH FUNKCIJA I SREDINA

2.1. Sledeći jednostavan rezultat je toliko fundamentalan da ćemo dati više njegovih dokaza.

Teorema 3. *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka i* r $(1\leqq r\leqq n-1)$ *prirodan broj, tada važi*

$$(p_n^{[r]}(\boldsymbol{a}))^2\geqq p_n^{[r-1]}(\boldsymbol{a})\,p_n^{[r+1]}(\boldsymbol{a}), \tag{7}$$

$$(e_n^{[r]}(\boldsymbol{a}))^2> e_n^{[r-1]}(\boldsymbol{a})\,e_n^{[r+1]}(\boldsymbol{a}). \tag{8}$$

Nejednakost (7) *je stroga osim ako je* $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. (a) Dokazi nejednakosti (8).

(i) Nejednakost (8) je posledica nejednakosti (7) koja se može, primenom (3), napisati u obliku

$$(9) \qquad \left(e_n^{[r]}\right)^2 \geqq \frac{(r+1)(n-r+1)}{r(n-r)}\, e_n^{[r-1]}\, e_n^{[r+1]}.$$

Primetimo da je numerički faktor na desnoj strani (9) veći od 1, što daje (8).

(ii) Može se dati i direktan dokaz nejednakosti (8). Opšti član u razvoju $e_n^{[r-1]} e_n^{[r+1]} - \left(e_n^{[r]}\right)^2$ je $\sum\limits_{k=1}^{r-s} a_k{}^2 \sum\limits_{k=r-s+1}^{r+s} a_k$. Koeficijent uz ovaj član je $\binom{2s}{s-1} - \binom{2s}{s}$ i on je negativan.

(b) Dokaz nejednakosti (7).

(i) Daćemo najpre dokaz metodom indukcije. Ako je $n=2$, nejednakost (7) se svodi na *GA* (videti primedbu 3°). Pretpostavimo da je nejednakost (7), zajedno sa slučajem jednakosti, dokazana za $1 \leqq r \leqq m-1$, $2 \leqq m \leqq n-1$; dalje pretpostavimo da svi $a_1, \ldots, a_{n-1}$ nisu jednaki među sobom. Primetimo da važe sledeće jednakosti:

$$(10) \qquad e_n^{[r]} = e_{n-1}^{[r]} + a_n e_{n-1}^{[r-1]}, \qquad p_n^{[r]} = \frac{n-r}{n} p_{n-1}^{[r]} + \frac{r}{n} a_n p_{n-1}^{[r-1]},$$

gde je $1 \leqq r \leqq n-1$. Stoga, za $1 \leqq r \leqq n-1$, imamo

$$(11) \qquad n^2 \left(p_n^{[r-1]} p_n^{[r+1]} - \left(p_n^{[r]}\right)^2\right) = A + B a_n + C a_n{}^2,$$

gde je

$$A = \left((n-r)^2 - 1\right) p_{n-1}^{[r-1]} p_{n-1}^{[r+1]} - (n-r)^2 \left(p_{n-1}^{[r]}\right)^2,$$

$$B = (n-r+1)(r+1)\, p_{n-1}^{[r-1]} p_{n-1}^{[r]} + (n-r-1)(r-1)\, p_{n-1}^{[r-2]} p_{n-1}^{[r+1]}$$
$$- 2r(n-r)\, p_{n-1}^{[r-1]} p_{n-1}^{[r]},$$

$$C = (r^2-1)\, p_{n-1}^{[r-2]} p_{n-1}^{[r]} - r^2 \left(p_{n-1}^{[r-1]}\right)^2.$$

Na osnovu induktivne pretpostavke je

$$(12) \qquad \left(p_{n-1}^{[r]}\right)^2 > p_{n-1}^{[r-1]} p_{n-1}^{[r+1]}, \quad \left(p_{n-1}^{[r-1]}\right)^2 > p_{n-1}^{[r]} p_{n-1}^{[r-2]}, \quad p_{n-1}^{[r-1]} p_{n-1}^{[r]} > p_{n-1}^{[r-2]} p_{n-1}^{[r+1]},$$

odakle sleduje

$$A < -\left(p_{n-1}^{[r]}\right)^2, \quad B \leqq 2 p_{n-1}^{[r-1]} p_{n-1}^{[r]}, \quad C < -\left(p_{n-1}^{[r-1]}\right)^2,$$

te je

$$(13) \qquad n^2 \left(p_n^{[r-1]} p_n^{[r+1]} - \left(p_n^{[r]}\right)^2\right) < -\left(p_{n-1}^{[r]} - a_n p_{n-1}^{[r-1]}\right)^2.$$

Ovim je, u ovom slučaju, dokazana nejednakost (7).

Ako je $a_1 = \cdots = a_{n-1} \neq a_n$, nejednakost (13) postaje jednakost jer je tada isti slučaj sa nejednakostima (12). Međutim, desna strana u (13) može se predstaviti u obliku

$$-\left(p_{n-1}^{[r-1]}\right)^2 \left(\frac{p_{n-1}^{[r]}}{p_{n-1}^{[r-1]}} - a_n\right)^2 = -\left(p_{n-1}^{[r-1]}\right)^2 (a_1 - a_n)^2 < 0,$$

čime je završen dokaz.

(ii) Veoma jednostavan dokaz nejednakosti (7) može se izvesti polazeći od teoreme I.5. Iz (4), ako je $f(x, y)=\prod_{k=1}^{n}(x+a_k y)$, primenom uzastopnog diferenciranja f, dobijamo $g(x, y)=p_n^{[r-1]}x^2+2p_n^{[r]}xy+p_n^{[r+1]}y^2$. Kako su sve nule funkcije f realne, realne su i nule funkcije g, na osnovu teoreme I.5. Stoga imamo

$$p_n^{[r-1]}p_n^{[r+1]} \leqq (p_n^{[r]})^2.$$

Kako nule funkcije g mogu biti jednake samo ako su sve nule funkcije f jednake, neposredno se dobija slučaj jednakosti u (7). O ovome dokazu videti Campbell [1].

PRIMEDBE: 1° Muirhead [1] i Dougall [1] dokazali su identitet

$$(p_n^{[r]})^2-p_n^{[r+1]}p_n^{[r-1]}=\frac{1}{r(r+1)\binom{n}{r}\binom{n}{r+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2k}{k}\frac{(r, k)}{k+1},$$

gde je

$$(r, k)=\sum\left(\prod_{j=1}^{r-k-1}a_j{}^2\right)\left(\prod_{j=r-k}^{r+k-1}a_j\right)(a_{r+k}-a_{r+k+1})^2,$$

pri čemu se sumiranje proteže na sve proizvode koji se mogu dobiti iz $a_1, \ldots, a_n$. Ovaj identitet daje neposredan dokaz nejednakosti (7).

2° Jolliffe [1] je dokazao jedan drugi identitet iz koga takođe sleduje nejednakost (7):

$$\left(\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r-1)!}\right)^2\left((p_n^{[r]})^2-p_n^{[r-1]}p_n^{[r+1]}\right)$$
$$=(n-1)\sum(a_i-a_j)^2(C_{r-1}^{n-2})^2+\frac{2!\,(n-3)}{(r-1)(n-r-1)}\sum(a_i-a_j)^2(a_k-a_l)^2(C_{r-2}^{n-4})^2$$
$$+\frac{3!\,(n-5)}{(r-1)(r-2)(n-r-1)(n-r-2)}\sum(a_i-a_j)^2(a_k-a_l)^2(a_p-a_q)^2(C_{r-3}^{n-6})^2+\cdots,$$

gde C_{r-1}^{n-2} predstavlja zbir proizvoda od $r-1$ faktora uzetih između $n-2$ faktora različitih od a_i i a_j. Sumiranje se vrši po svim mogućnim članovima ovakvog oblika; C_{r-2}^{n-4} definiše se slično.

3° Možemo primetiti da dokaz (ii) nejednakosti (7) pokazuje da (7), pa stoga i (8), važi za svaku realnu n-torku $(a_1, \ldots, a_n)$.

4° Jecklin [4] je izveo sledeću nejednakost koja je slična sa (9):

$$(e_n^{[r]})^2 \geqq \frac{2\binom{n}{r}}{\binom{n}{r}-1}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}e_n^{[r-1]}e_n^{[r+1]}.$$

Ako je $r=1$, ova nejednakost se svodi na (9) (sa $r=1$).

5° Dokaz (ii) nejednakosti (7) pokazuje da je teorema 3 ekvivalentna jednom ranijem rezultatu o polinomima: posledica I.7. U ovom obliku rezultat je prvi put, bez dokaza, bio formulisan od strane Newtona u Arithmetica Universalis [1, p. 347—349]. Prvi dokaz je dao Maclaurin [1]. Ova nejednakost je kasnije više puta ponovo otkrivana. Pomenimo sledeće radove u kojima je ona dokazivana: Sylvester [1], Schlömilch [1], Hamy [1], Durand [1], Darboux [2], Fujisawa [1], Bonnesen [1], Angelescu [1], Jolliffe [1], Newmann (HLP, 53—54). Pereljdik [1], Ness [1]; Dunkel ([1], [2]) je detaljno razmatrao ovu materiju. Takođe treba pomenuti i Keloga [1]. Interesantan dokaz dao je Segre [1].

Posledica 4. (a) *Ako je* $1 \leqq r < s \leqq n$, *tada je* $e_n^{[r-1]} e_n^{[s]} < e_n^{[r]} e_n^{[s-1]}$.

(b) *Ako je* $1 \leqq r \leqq n-1$ *i* $e_n^{[r-1]} > e_n^{[r]}$, *tada je* $e_n^{[r]} > e_n^{[r+1]}$.

Dokaz. Ovi rezultati su neposredne posledice nejednakosti (8).

Posledica 5. (a) *Ako je* $1 \leqq r < s \leqq n$, *tada je* $p_n^{[r-1]} p_n^{[s]} \leqq p_n^{[r]} p_n^{[s-1]}$ *sa jednakošću ako i samo ako je* $a_1 = \cdots = a_n$.

(b) *Ako je* $1 \leqq r \leqq n-1$ *i* $p_n^{[r-1]} > p_n^{[r]}$, *tada je* $p_n^{[r]} > p_n^{[r+1]}$.

(c) *Ako je* $1 \leqq r+s \leqq n$, *tada je* $p_n^{[r+s]} \leqq p_n^{[r]} p_n^{[s]}$ *sa jednakošću ako i samo ako je* $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. (a) i (b) su neposredne posledice (7), dok je (c) implicirano sa (a).

PRIMEDBE: 6° Posledica 5 implicira posledicu 4 u strožoj formi isto tako kao što (4) implicira (9), nejednakost strožu od (8).

7° Iz posledice 5 (a) proizilazi da je $\dfrac{p_n^{[r+n]}}{p_n^{[r]}}$ opadajuća funkcija od r.

2.2. Sada ćemo izložiti osnovni rezultat ovog odeljka.

Teorema 6. *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka i ako su r i s prirodni brojevi, tada je*

$$(14) \qquad P_n^{[s]}(\boldsymbol{a}) \leqq P_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) \quad (1 \leqq r < s \leqq n),$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. (i) Ako je $1 \leqq t \leqq r$, iz nejednakosti (7) izlazi

$$(p_n^{[t-1]} p_n^{[t+1]})^t \leqq (p_n^{[t]})^{2t}.$$

Množeći sve ove nejednakosti međusobno (za $t = 1, \ldots, r$), dobijamo $(p_n^{[r+1]})^r \leqq (p_n^{[r]})^{r+1}$ tj.

$$(15) \qquad P_n^{[r+1]} \leqq P_n^{[r]},$$

odakle sleduje (14). Slučaj jednakosti je očigledan.

(ii) Interesantno je da se (14) može dokazati, polazeći od slabije nejednakosti (8). Metod dokazivanja je sličan šestom dokazu *GA* (Crawfordov dokaz).

Pretpostavimo da je $0 < a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$ i $a_1 \neq a_n$. Zamenimo $\boldsymbol{a}$ sa $\boldsymbol{b}$, gde je $b_1 = P_n^{[r]}(\boldsymbol{a})$, $b_k = a_k$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ i b_n je izabrano tako da je $P_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) = P_n^{[r]}(\boldsymbol{b})$. Ako dokažemo da je, za svako $s > r$, $P_n^{[s]}(\boldsymbol{b}) > P_n^{[s]}(\boldsymbol{a})$, rezultat sleduje iz Crawfordovog dokaza *GA*. Neka je $\boldsymbol{c} = (a_2, \ldots, a_{n-1}) \big(= (b_2, \ldots, b_{n-1})\big)$. Tada je, na osnovu definicije 1,

$$\begin{aligned} e_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) &= a_1 a_n e_{n-2}^{[r-2]}(\boldsymbol{c}) + (a_1 + a_n)\, e_{n-2}^{[r-1]}(\boldsymbol{c}) + e_{n-2}^{[r]}(\boldsymbol{c}) \\ &= b_1 b_n e_{n-2}^{[r-2]}(\boldsymbol{c}) + (b_1 + b_n)\, e_{n-2}^{[r-1]}(\boldsymbol{c}) + e_{n-2}^{[r]}(\boldsymbol{c}). \end{aligned}$$

Prema tome, nalazimo

$$(16) \qquad (b_1 b_n - a_1 a_n)\, e_{n-2}^{[r-2]}(\boldsymbol{c}) = -(b_1 + b_n - a_1 - a_n)\, e_{n-2}^{[r-1]}(\boldsymbol{c}),$$

kao i

$$\left(b_1 e_{n-2}^{[r-2]}(c) + e_{n-2}^{[r-1]}(c)\right) b_n = a_1 a_n e_{n-2}^{[r-2]}(c) + (a_1 + a_n - b_1) e_{n-2}^{[r-1]}(c).$$

Kako je $a_n > b_1$ (lema 2), ovaj poslednji identitet daje $b_n > 0$. Međutim, važi

$$e_n^{[s]}(\boldsymbol{b}) - e_n^{[s]}(\boldsymbol{a}) = (b_1 b_n - a_1 a_n) e_{n-2}^{[s-2]}(c) + (b_1 + b_n - a_1 - a_n) e_{n-2}^{[s-1]}(c),$$

što, na osnovu (16), ima isti znak kao izraz

$$(b_1 + b_n - a_1 - a_n)\left(\frac{e_{n-2}^{[s-1]}(c)}{e_{n-2}^{[s-2]}(c)} - \frac{e_{n-2}^{[r-1]}(c)}{e_{n-2}^{[r-2]}(c)}\right).$$

Drugi faktor je, prema posledici 4 (a), negativan. Isti je slučaj i sa prvim faktorom jer je, prema (16),

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\{b_1 + b_n - a_1 - a_n\} &= \operatorname{sgn}\{b_1 b_n - a_1 a_n\}\\ &= \operatorname{sgn}\{b_1(b_1 + b_n - a_1 - a_n) + a_1 a_n - b_1 b_n\}\\ &= \operatorname{sgn}\{(b_1 - a_1)(b_1 - a_n)\} = -1.\end{aligned}$$

Ovim je dokazano da je $e_n^{[s]}(\boldsymbol{b}) > e_n^{[s]}(\boldsymbol{a})$, što je ekvivalentno sa $P_n^{[s]}(\boldsymbol{b}) > P_n^{[s]}(\boldsymbol{a})$, a to je i trebalo dokazati.

(iii) Direktan dokaz nejednakosti (15) dao je Pereljdik [1]. Jednostavnosti radi, stavimo

$$e_k = e_n^{[k]}(\boldsymbol{a}), \quad (e_k)^i = e_k^i = e_{n-1}^{[k]}(a_i), \quad e_k^{i,j} = \left(e_k^i\right)^j, \text{ itd.}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ i posmatrajmo one $\boldsymbol{a}$ za koje je $e_r = \varepsilon$. Nađimo za koje od njih e_{r+1} ima maksimalnu vrednost. Pokazaćemo da e_{r+1} ima jedinstveni maksimum kada je $a_1 = \cdots = a_n = a$. Neka je tada, recimo, $\varepsilon = \binom{n}{r} a^r$ i

$$e_{r+1} \leqq (e_{r+1})_{\max} = \binom{n+1}{r} a^{r+1} = \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}^{r/(r+1)}} \varepsilon^{(r+1)/r},$$

što je, prema (3), jednako sa (15). Zbog jedinstvenosti ekstremuma odavde sleduje i slučaj jednakosti.

Posmatrajmo sada $u(\boldsymbol{a}) = e_{r+1} + \lambda(e_r - \varepsilon)$. Tada je $\dfrac{\partial u}{\partial a_k} = e_r^k + \lambda e_{r-1}^k \ (1 \leqq k \leqq n)$.

Za maksimum je potrebno da je $\dfrac{\partial u}{\partial a_1} = \cdots = \dfrac{\partial u}{\partial a_n} = 0$, odakle je

$$\lambda = -\frac{e_r^k}{e_{r-1}^k} \quad (1 \leqq k \leqq n). \tag{17}$$

Odavde sleduje

$$\lambda = -\sum_{i=1}^{n} e_r^i \Big/ \sum_{i=1}^{n} e_{r-1}^i .$$

Ovaj identitet pokazuje da je λ simetrična funkcija od $\boldsymbol{a}$, pa je stoga invarijantna u odnosu na permutaciju a_i i a_j $(1 \leqq i, j \leqq n)$. Stavimo $k = 1$ u (17) i primenimo (10). Na taj način dobijamo

$$-\lambda = \frac{e_r^{1,k} + a_k e_{r-1}^{1,k}}{e_{r-1}^{1,k} + a_k e_{r-2}^{1,k}} \quad (2 \leqq k \leqq n).$$

Dakle, $-\lambda = \frac{A+Ba_k}{B+Ca_k}$, gde A, B, C i D ne sadrže a_1 i a_k. Permutujući a_1 i a_k i koristeći simetriju u λ, imamo

$$\frac{A+Ba_1}{B+Ca_1} = \frac{A+Ba_k}{B+Ca_k},$$

tj.

$$(18) \qquad (a_1 - a_k)(AC - B^2) = 0 \qquad (2 \leqq k \leqq n).$$

Stoga, preuređujući a, imamo dve mogućnosti: ili je $a_1 = \cdots = a_n$, ili za neko i imamo $a_1 \neq a_2, \ldots, a_{i+1}$, $a_1 = a_{i+2} = \cdots = a_n$.

Pretpostavimo da su uslovi iz drugog slučaja ispunjeni. Tada iz (18) izlazi

$$\frac{e_r^{1,k}}{e_{r-1}^{1,k}} = \frac{e_{r-1}^{1,k}}{e_{r-2}^{1,k}} \qquad (2 \leqq k \leqq i+1),$$

pa je

$$(19) \qquad -\lambda = \frac{e_r^{1,k}}{e_{r-1}^{1,k}} \qquad (2 \leqq k \leqq i+1).$$

Ponavljajući gornji postupak za $k=2$, iz (19) i (10) izlazi

$$-\lambda = \frac{e_r^{1,2,k} + a_k e_{r-1}^{1,2,k}}{e_{r-1}^{1,2,k} + a_k e_{r-2}^{1,2,k}} \qquad (3 \leqq k \leqq i+1),$$

pa je, stoga, pošto posmatramo drugi slučaj,

$$\frac{e_r^{1,2,k}}{e_{r-1}^{1,2,k}} = \frac{e_{r-1}^{1,2,k}}{e_{r-2}^{1,2,k}} \qquad (3 \leqq k \leqq i+1).$$

Ako je $r \leqq n-i-1$, ovaj postupak na kraju daje

$$-\lambda = \frac{e_r^{1,2,\ldots,i+1}}{e_{r-1}^{1,2,\ldots,i+1}} = \frac{n-i-r}{r} a_1,$$

što je, zbog simetrije u λ, u kontradikciji jer je $a_1 \neq a_2, \ldots, a_{i+1}$.

Za $r = n - \rho > n - k - 1$ ovaj postupak dovodi do

$$-\lambda = \frac{e_r^{1,2,\ldots,\rho}}{e_{r-1}^{1,2,\ldots,\rho}} = \frac{a_{\rho+1}(a_{\rho+2}\cdots a_n)}{e_{r-1}^{1,2,\ldots,\rho+1} + a_{\rho+1} e_{r-2}^{1,2,\ldots,\rho+1}},$$

što je opet u kontradikciji sa $a_1 \neq a_{\rho+1}$.

Prema tome, iz $\frac{\partial a}{\partial a_1} = \cdots = \frac{\partial a}{\partial a_n} = 0$ proističe $a_1 = \cdots = a_n$. Preostaje da se pokaže da je ovaj maksimum e_{r+1} odgovara slučaju $e_r = \varepsilon$. Jednostavna izračunavanja daju

$$\mathrm{d}^2 u = \sum_{i=1}^{n} e_{r-1}^{i}\, \mathrm{d}^2 a_i + \sum_{i=1}^{n} \left((\lambda - a_i) \sum_{j=1}^{n} e_{r-2}^{i,j}\, \mathrm{d}a_j \right) \mathrm{d}a_i$$

$$= -\frac{\binom{n-2}{r-2}}{r(r-1)} a^{r-1} \left((n-r) \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}^2 a_i + n(r-1) \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}a_i \right)^2 \right) < 0,$$

čime je završen dokaz.

PRIMEDBE: 1° Osnovna nejednakost (14), koju ćemo zvati $S(r, s)$ potiče od Maclaurina [1]. Nju su dokazali, verovatno nezavisno, i Schlömilch [1] i Dunkel [2]. Drugi dokaz koji smo naveli je iz HLP, p. 53. Interesantan dokaz nalazi se u Segreovom članku [1].

2° Nejednakost (14) je jedna generalizacija nejednakosti *GA* i, u stvari, njen dokaz daje istovremeno i jedan dokaz za *GA*. Dalje, (14) daje jednu potvrdu primedbe I. 1°.

3° Drugi dokaz teoreme 6 može se bez izmene preneti na slučaj težinskih sredina definisanih pomoću (6) ako se pretpostavi da su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{p}$ slično uređeni (Bullen [1]).

4° Nejednakosti $S(r; s)$ može se dati jednostavna geometrijska interpretacija. Pretpostavimo da je $n=3$ i neka su a_1, a_2, a_3 ivice paralelepipeda. Tada je $P_3^{[1]}(\boldsymbol{a})$ ivica kocke koja ima isti obim, $P_2^{[2]}(\boldsymbol{a})$ ivice kocke iste površine i $P_3^{[3]}(\boldsymbol{a})$ ivica kocke iste zapremine. $S(r; s)$ kazuje da je $P_3^{[1]} > P_3^{[2]} > P_3^{[3]}$ osim ako je $a_1 = a_2 = a_3$. Ovo se može proširiti na n-dimenzionalni slučaj (Jecklin [6]).

2.3. Pošto je izveo posledicu I.7 Mitrinović [6] je dobio interesantne generalizacije nejednakosti (8) i posledice 4 (b) (videti primedbu 2.1.5°), koje će u ovom pododeljku biti izložene.

Oznaka za diferencije koje ćemo koristiti definisane su u I.4.1.

Teorema 7. *Neka je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, r i ν celi brojevi.*

(a) *Ako je* $1 \leqq r \leqq n-1$, $0 \leqq \nu \leqq k-1$, *važi*

$$(\Delta^\nu e^{[r-\nu]})^2 \geqq (\Delta^\nu e^{[r-\nu-1]})(\Delta^\nu e^{[r-\nu+1]}). \tag{20}$$

(b) *Ako je, pored toga,*

$$(-1)^p \Delta^p e^{[r-\nu+1]} > 0 \qquad (1 \leqq p \leqq \nu), \tag{21}$$

tada je

$$(-1)^\nu \Delta^\nu e^{[r-\nu]} > 0. \tag{22}$$

Dokaz. (a) Primeniti posledicu 1.7 na polinom $(x-1)^\nu \prod_{i=1}^{n} (x+a_i)$.

(b) Ovaj rezultat može se dokazati indukcijom po ν. Ako je, $\nu=1$ tvrđenje je u stvari identično sa posledicom 4 (a). Pretpostavimo sada da je tvrđenje dokazano za $1 \leqq \nu \leqq k-1$. Iz (a) dobijamo

$$(\Delta^{k-1} e^{[r-k+1]})^2 \geqq \Delta^{k-1} e^{[r-k]} \Delta^{k-1} e^{[r-k+2]},$$

što je na osnovu induktivne pretpostavke ekvivalentno sa

$$\frac{\Delta^{k-1} e^{[r-k+1]}}{\Delta^{k-1} e^{[r-k]}} \geqq \frac{\Delta^{k-1} e^{[r-k+2]}}{\Delta^{k-1} e^{[r-k+1]}}. \tag{23}$$

Pretpostavka (21) za $p=\nu=k$ je ekvivalentna sa

$$(-1)^{k-1} \Delta^{k-1} e^{[r-k+2]} > (-1)^{k-1} \Delta^{k-1} e^{[r-k+1]}. \tag{24}$$

Kako je na osnovu (24) za $p=k-1$, $\nu=k$ desna strana nejednakosti (24) pozitivna, nejednakost (24) implicira

$$\frac{\Delta^{k-1} e^{[r-k+2]}}{\Delta^{k-1} e^{[r-k+1]}} > 1. \tag{25}$$

Iz (23) i (25) izlazi

$$\frac{\Delta^{k-1} e^{[r-k+1]}}{\Delta^{k-1} e^{[r-k]}} > 1, \tag{26}$$

što, ponavljajući argumentaciju u suprotnom pravcu, implicira (22) za $\nu=k$. Ovim je induktivni dokaz završen.

PRIMEDBE: 1° Ako je $\nu=0$, (20) se svodi na (8) i, kao što smo primetili ranije, ako je $\nu=0$ iz teoreme 7 (b) dobija se posledica 4 (b).

2° Prirodno, slični rezultati važe za simetrične sredine i oni se dobijaju generalizacijama nejednakosti (7) i posledice 5 (b).

3° Posmatrajući polinome oblika $\prod_{j=1}^{\nu}(x-\alpha_j)\times\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)$ i primenjujući posledicu 1.7 mogu se dobiti opštiji rezultati (videti Mitrinović [6]). Tako, na primer, primenjujući posledicu 1.7 na $(x-\alpha)\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)$, imamo

$$\left(e_n^{[k-1]}-\alpha\, e_n^{[k-2]}\right)\left(e_n^{[k+1]}-\alpha\, e_n^{[k]}\right)\leqq\left(e_n^{[k]}-\alpha\, e_n^{[k-1]}\right)^2,$$

tj. za svako realno α važi

$$\alpha^2\left(e_n^{[k-2]}\,e_n^{[k]}-\left(e_n^{[k-1]}\right)^2\right)+\alpha\left(e_n^{[k-1]}\,e_n^{[k]}-e_n^{[k-2]}\,e_n^{[k+1]}\right)$$
$$+\left(e_n^{[k-1]}\,e_n^{[k+1]}-\left(e_n^{[k]}\right)^2\right)\leqq 0.$$

Prema (8) koeficijent uz α^2 je nepozitivan, pa je

$$\left(e^{[k-1]}\,e^{[k]}-e^{[k-2]}\,e^{[k+1]}\right)^2\leqq 4\left(e^{[k-1]}\,e^{[k+1]}-(e^{[k]})^2\right)\left(e^{[k-2]}\,e^{[k]}-(e^{[k+1]})^2\right).$$

Posledica 8. *Neka je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, $'\boldsymbol{a}=(a_2,\ldots,a_n)$, i pretpostavimo da je*

$$(-1)^\nu\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-2]}>0,\quad(-1)^\nu\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-1]}>0\quad i\quad(-1)^\nu\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu]}>0.$$

Tada je

$$\Delta^\nu e^{[r-\nu-1]}\,\Delta^\nu e^{[r-\nu+1]}-(\Delta^\nu e^{[r-\nu]})^2\leqq\Delta^{\nu\prime} e^{[r-\nu-1]}\,\Delta^{\nu\prime} e^{[r-\nu+1]}-(\Delta^{\nu\prime} e^{[r-\nu]})^2,\tag{27}$$

gde je $'e^{[r-\nu]}=e_{n-1}^{[r-\nu]}('\boldsymbol{a})$, itd.

Dokaz. Stavimo $x=a_1$ i označimo levu stranu nejednakosti (27) sa $f(x)$. Tada je desna strana jednaka $f(0)$. Jednostavna izračunavanja daju

$$f''(x)=2\left(\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-2]}\,\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu]}-(\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-1]})^2\right),$$

pa je, prema (20), $f''(x)\leqq 0$. Dakle, $f'(x)\leqq f'(0)$, pa je dovoljno dokazati da je $f'(0)\leqq 0$. Dalja jednostavna izračunavanja daju

$$f'(0)=\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-2]}\,\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu+1]}-\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-1]}\,\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu]}.$$

Na osnovu pretpostavki i primenjujući (20), nalazimo

$$\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-1]}\,\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu+1]}(-1)^\nu\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-2]}\leqq(\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu]})^2(-1)^\nu\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-2]}$$
$$\leqq(-1)^\nu\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu]}\,(\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-1]})^2,$$

pa je

$$\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-2]}\,\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu+1]}\leqq\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu]}\,\Delta^\nu\,'e^{[r-\nu-1]},$$

tj. $f'(0)\leqq 0$.

PRIMEDBA: 4° Nejednakost (27) može se poboljšati koristeći najpre a_i' umesto $'\boldsymbol{a}$ i zamenjujući zatim desnu stranu minimumom uzetim po i $(1\leqq i\leqq n)$.

Posledica 9. (a) *Ako je $\Delta^p e^{[r-p]}>0$ $(0\leqq p\leqq 2s)$, tada je $\Delta^{2s}e^{[r-2s+1]}>0$.*

(b) *Ako je $\Delta^p e^{[r-p]}>0$ $(0\leqq p\leqq 2s+1)$, tada je $\Delta^{2s+1}e^{[r-2s]}>0$.*

Dokaz. Slučaj $s=0$ svodi (b) na posledicu 4 (b).

Pretpostavimo sada da važi $\Delta^p e^{[r-p]}>0$ $(0 \leqq p \leqq 2s-1)$. Tada imamo $\Delta^{2s-1} e^{[r-2s+1]}>0$, pa važi $\Delta^{2s} e^{[r-2s+1]}>0$ ako je $\Delta^{2s} e^{[r-2s]}>0$. Prema (19) važi

$$(\Delta^{2s-1} e^{[r-2s+1]})^2 \geqq \Delta^{2s-1} e^{[r-2s]} \Delta^{2s-1} e^{[r-2s+2]},$$

što je, na osnovu induktivnih pretpostavki, ekvivalentno sa

$$\frac{\Delta^{2s-1} e^{[r-2s+1]}}{\Delta^{2s-1} e^{[r-2s+2]}} \geqq \frac{\Delta^{2s-1} e^{[r-2s]}}{\Delta^{2s-1} e^{[r-2s+1]}}. \tag{28}$$

Kako je $\Delta^{2s} e^{[r-2s]}>0$ ekvivalentno sa $\Delta^{2s-1} e^{[r-2s]}>\Delta^{2s-1} e^{[r-2s+1]}$ ili, prema induktivnim hipotezama, sa

$$1<\frac{\Delta^{2s-1} e^{[r-2s]}}{\Delta^{2s-1} e^{[r-2s+1]}}, \tag{29}$$

iz (28) i (29) sleduje $\Delta^{2s-1} e^{[r-2s+2]}<\Delta^{2s-1} e^{[r-2s+1]}$, odakle je $\Delta^{2s-1} e^{[r-2s+1]}>0$.

Ako sada, umesto prethodnog, pretpostavimo da $\Delta^p e^{[r-p]}>0$ $(0 \leqq p \leqq 2s)$ implicira $\Delta^{2s} e^{[r-2s+1]}>0$, tada sličnom argumentacijom možemo dokazati da imamo $\Delta^{2s+1} e^{[r-2s]}>0$ ako je $\Delta^{2s+1} e^{[r-2s-1]}>0$.

Ove dve indukcije daju dokaz gornje posledice.

3. NEJEDNAKOSTI TIPA RADO-POPOVICIU

Pošto je osnovna nejednakost $S(r; s)$ (nejednakost (14)) generalizacija nejednakosti *GA*, prirodno je postaviti pitanje kada su mogućne generalizacije tipa Rado-Popoviciu. Potpuni analogon nejednakosti Popoviciu dobio je Bullen [1] i on je izložen u teoremi 12. Rezultati tipa Rado su mnogo nekompletniji. Nasuprot sličnom proširenju nejednakosti $(r; s)$, naši rezultati ne sleduju iz opšteg rezultata već svaki mora pojedinačno da bude dokazan. Međutim, tehnike koje su korišćene su iste one dve osnovne koje su primenjene i za dokazivanje teoreme II.18, tj. primena elementarnog diferencijalnog računa i primena $S(r; s)$ na pogodno izabrane nizove.

3.1. Kao u II.3.4, ako je $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_{n+m})$, stavimo $\overline{\boldsymbol{a}}=(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m})$, $\overline{e}_m^{[r]}=e_m^{[r]}(\overline{\boldsymbol{a}})$, itd.

Sledeća lema proširuju identitete (10).

Lema 10. *Sa gornjim oznakama imamo*

(a)
$$\begin{aligned} e_{n+m}^{[s]} &= \sum_{t=0}^{s} e_n^{[s-t]} \overline{e}_m^{[t]} \quad (s \leqq \min(n, m)) \\ &= \sum_{t=0}^{n+m-s} e_n^{[n-t]} \overline{e}_m^{[s-n+t]} \quad (s>\max(n, m)) \\ &= \sum_{t=0}^{m} e_n^{[s-t]} \overline{e}_m^{[t]} \quad (m<s \leqq n); \end{aligned}$$

(b) *ako je* $1<s<n+m$, $u=\max(s-n, 0)$, $r=\min(s, m)$ *i*

$$\lambda(s, t)=\binom{n}{s-n}\binom{m}{t+n}\Big/\binom{n+m}{s} \quad (0 \leqq t \leqq s),$$

važi

$$p_{n+m}^{[s]}=\sum_{t=u}^{r} \lambda(s, t)\, p_n^{[s-t]} \overline{p}_m^{[t]}. \tag{30}$$

Dokaz. (a) sleduje neposredno iz (1). Primenom (3) lako se vidi da (1) implicira (6).

PRIMEDBE: 1° Ako je $a_{n+1}=\cdots=a_{n+m}=\beta$, (30) se svodi na

$$p_{n+m}^{[s]}=\sum_{t=u}^{r}\lambda(s,\,t)\,p_n^{[s-t]}\,\beta^t, \tag{31}$$

i, ako je, pored toga, $a_1=\cdots=a_n=\alpha$, imamo

$$p_{n+m}^{[s]}=\sum_{t=u}^{r}\lambda(s,\,t)\,\alpha^{s-t}\,\beta^t. \tag{32}$$

2° Identiteti (10) sleduju iz ove leme kao partikularni slučajevi (staviti $m=1$ i zameniti n sa $n-1$).

Posledica 11. *Ako je niz* $\boldsymbol{a}$ *rastući, tada je isti slučaj i sa nizom* $\left(p_1^{[r]}(\boldsymbol{a}),\ p_2^{[r]}(\boldsymbol{a}),\ldots\right)$.

Dokaz. Ako je $m=1$, tada je $u=0$, $r=1$ i (30) postaje (videti (10)):

$$p_{n+1}^{[s]}=\frac{n+1-s}{n+1}\,p_n^{[s]}+\frac{s}{n+1}\,a_{n+1}\,p_n^{[s-1]},$$

što je ekvivalentno sa

$$p_{n+1}^{[s]}-p_n^{[s]}=\frac{s}{n+1}\,p_n^{[s-1]}\left(a_{n+1}-\frac{p_n^{[s]}}{p_n^{[s-1]}}\right).$$

Međutim, iz $S(s;\,r)$ izlazi $\dfrac{p_n^{[s]}}{p_n^{[s-1]}}<A_n$. Stoga je

$$p_{n+1}^{[s]}-p_n^{[s]}\geqq\frac{s}{n+1}\,p_n^{[s-1]}\,(a_{n+1}-A_n).$$

Kako je ova nejednakost stroga osim za $a_1=\cdots=a_n$, ovo implicira posledicu 11.

Teorema 12. *Neka je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna* n*-torka, neka su* $r,\ k$ $(1\leqq r<k\leqq n+m)$ *celi brojevi,* $u=\max(r-n,\,0)$, $v=\min(r,\,m)$, $w=\max(k-n,\,0)$, $x=\min(k,\,m)$. *Tada*: (a) *ako je* $v\geqq w$ *i* $r-u<k-x$, *važi*

$$\left(\frac{P_{n+m}^{[r]}(\boldsymbol{a})}{P_{n+m}^{[k]}(\boldsymbol{a})}\right)^{k}\geqq\left(\frac{P_n^{[r-u]}(\boldsymbol{a})}{P_n^{[k-x]}(\boldsymbol{a})}\right)^{k-x}\left(\frac{\overline{P}_m^{[v]}(\boldsymbol{a})}{\overline{P}_m^{[w]}(\boldsymbol{a})}\right)^{w}. \tag{33}$$

(b) *ako je* $v\leqq w$, *važi*

$$\left(\frac{P_{n+m}^{[r]}(\boldsymbol{a})}{P_{n+m}^{[k]}(\boldsymbol{a})}\right)^{k}\leqq\left(\frac{\overline{P}_m^{[v]}(\boldsymbol{a})}{\overline{P}_m^{[w]}(\boldsymbol{a})}\right)^{w}. \tag{34}$$

Dokaz. Prikažimo (33) u obliku

$$L=\left(\frac{p_{n+m}^{[k]}}{p_n^{[k-x]}\,\overline{p}_m^{[w]}}\right)^{r}\leqq\frac{\left(p_{n+m}^{[r]}\right)^k}{\left(p_n^{[r-u]}\right)^{r(k-x)/(r-u)}\left(\overline{p}_m^{[v]}\right)^{wr/v}}=R.$$

Primenjujući (30) i $S(r;\,s)$, dolazimo do

$$\left(p_{n+m}^{[r]}\right)^k=\left(\sum_{t=u}^{v}\lambda(r,\,t)\,p_n^{[r-t]}\,\overline{p}_m^{[t]}\right)^k\geqq\left(\sum_{t=u}^{v}\lambda(r,\,t)\left(p_n^{[r-u]}\right)^{(r-t)/(r-u)}\left(\overline{p}_m^{[v]}\right)^{t/v}\right)^k. \tag{35}$$

Ova nejednakost je stroga osim ako je $a_1 = \cdots = a_{n+m}$. Međutim, u izvesnim slučajevima ovaj korak je nepotreban; na primer, ako je $r=1$ i $k=n+m$, sve sredine koje se pojavljuju u (33) su ili aritmetička ili geometrijska.

Iz (32) sleduje da je ovaj poslednji izraz (kr)-ti stepen r-te simetrične sredine od $\boldsymbol{b}$, gde je

$$b_i = \left(p_n^{[r-u]}\right)^{1/(r-u)} \quad (1 \leqq i \leqq n), \quad b_i = \left(\overline{p}_m^{[v]}\right)^{1/v} \quad (n+1 \leqq i \leqq n+m).$$

Prema tome, $S(r;s)$ i (32) daju

$$\left(p_{n+m}^{[r]}\right)^k \geqq \left(\sum_{t=w}^{x} \lambda(k,t) \left(p_n^{[r-u]}\right)^{(k-t)/(r-u)} \left(\overline{p}_m^{[v]}\right)^{t/v}\right)^r$$

$$= \left(p_n^{[r-u]}\right)^{r(k-x)/(r-u)} \left(p_m^{[v]}\right)^{wr/v} \left(\sum_{t=w}^{x} \lambda(k,t) \left(p_n^{[r-u]}\right)^{(x-t)/(r-u)} \left(\overline{p}_m^{[v]}\right)^{(t-w)/v}\right)^r.$$

Ova nejednakost je striktna osim u slučaju $p_n^{[r-u]} = \overline{p}_m^{[v]}$, kako u prethodnoj primeni nejednakost $S(r;s)$ nije dovodila do striktne nejednakosti, to ne može biti ni ovde slučaj. Međutim ako, kao što je napred navedeno, prethodna primena $S(r;s)$ nije potrebna, tada može ovde postojati striktna nejednakost.

Iz ovog poslednjeg izraza imamo

$$R \geqq \left(\sum_{t=w}^{x} \lambda(k,t) \left(p_n^{[r-u]}\right)^{(x-t)/(r-u)} \left(p_m^{[v]}\right)^{(t-w)/v}\right)^r = S.$$

Na sličan način, polazeći od (30), dolazimo do

$$\text{(36)} \qquad \left(p_{n+m}^{[k]}\right)^r = \left(\sum_{t=w}^{x} \lambda(k,t)\, p_n^{[k-t]}\, \overline{p}_m^{[t]}\right)^r \leqq \left(\sum_{t=w}^{x} \lambda(k,t) \left(p_n^{[k-x]}\right)^{(k-t)/(k-x)} \left(\overline{p}_m^{[w]}\right)^{t/w}\right)^r,$$

gde smo koristili $S(r;s)$. Ova nejednakost je stroga osim ako je $a_1 = \cdots = a_{n+m}$. Dalje imamo

$$\left(p_{n+m}^{[k]}\right)^r \leqq \left(p_n^{[k-x]}\right)^r \left(\overline{p}_m^{[w]}\right)^r \left(\sum_{t=w}^{x} \lambda(k,t) \left(p_n^{[k-x]}\right)^{(x-t)/(r-x)} \left(\overline{p}_m^{[w]}\right)^{(t-w)/w}\right)^r,$$

što neposredno daje

$$L \leqq \left(\sum_{t=w}^{x} \lambda(k,t) \left(p_n^{[k-x]}\right)^{(x-t)/(k-x)} \left(\overline{p}_m^{[w]}\right)^{(t-w)/w}\right)^r = T.$$

Međutim, na osnovu $S(r;s)$ i hipoteza u (a), važi $T \leqq S$. Ova nejednakost je stroga osim ako je $v=w$ i $r-u=k-x$, ili $a_1 = \cdots = a_{n+m}$. Ovim je završen dokaz (a).

Dokaz tvrđenja pod (b) je sličan.

Primedbe: 3° Mada slučaj kada važi jednakost u (33) i (34) nije posebno istaknut, iz dokaza se može videti kada jednakost važi.

4° Ako je $r=1$ i $k=n+m$, nejednakost 33 postaje

$$\left(\frac{A_{n+m}}{G_{n+m}}\right)^{n+m} \geqq \left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \left(\frac{\overline{A}_m}{\overline{G}_m}\right)^m,$$

što je, u stvari, partikularan slučaj teoreme II. 25 (b) za jednake težine.

5° Ako je $k=s+1$, $n=1$, $m=q$, $r\leqq s$, tada (34) postaje

$$(37)\qquad \left(\frac{P_{q+1}^{[r]}}{P_{q+1}^{[s+1]}}\right)^{s+1} \geqq \left(\frac{P_{q}^{[r]}}{P_{q}^{[s]}}\right)^{s},$$

što je direktna generalizacija nejednakosti Popoviciua (II.44) u slučaju jednakih težina.

Rezultat koji je sličan sa (37) može se dobiti za elementarne funkcije (videti Mitrinović i Vasić [9]).

Teorema 13. *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna* n*-torka,* r *i* s $(1\leqq r<s\leqq n)$ *prirodni brojevi i* $0\leqq p\leqq q$, *tada je*

$$(38)\qquad \left(\frac{e_n^{[r]}(\boldsymbol{a})}{e_{n+1}^{[r]}(\boldsymbol{a})}\right)^{p} \geqq \left(\frac{e_n^{[s]}(\boldsymbol{a})}{e_{n+1}^{[r]}(\boldsymbol{a})}\right)^{q}.$$

Dokaz. (i) Pretpostavimo najpre da je $p<q$. Stavimo $a_{n+1}=x$ i posmatrajmo funkciju

$$x\mapsto f(x)=\frac{\left(e_{n+1}^{[r]}\right)^p}{\left(e_{n+1}^{[s]}\right)^q}=\frac{\left(e_n^{[r]}+x\,e_n^{[r-1]}\right)^p}{\left(e_n^{[s]}+x\,e_n^{[s-1]}\right)^q}.$$

Tada je

$$f'(x)=\frac{\left(e_{n+1}^{[r]}\right)^{p-1}}{\left(e_{n+1}^{[s]}\right)^{q+1}}\left((p-q)\,e_n^{[s-1]}\,e_{n-1}^{[r-1]}\,x+p\,e_{n-1}^{[s]}\,e_{n-1}^{[r-1]}-q\,e_{n-1}^{[r]}\,e_{n-1}^{[s-1]}\right).$$

Ako bi izraz u zagradi bio negativan, imali bismo $f'\geqq 0$. Ovo će biti ako je

$$x\leqq \frac{p\,e_{n-1}^{[s]}\,e_{n-1}^{[r-1]}-q\,e_{n-1}^{[r]}\,e_{n-1}^{[s-1]}}{(q-p)\,e_{n-1}^{[s-1]}\,e_{n-1}^{[r-1]}}<\frac{q}{q-p}\;\frac{e_{n-1}^{[s]}\,e_{n-1}^{[r]}}{e_{n-1}^{[s-1]}\,e_{n-1}^{[r-1]}}\left(\frac{e_n^{[r-1]}}{e_{n-1}^{[r]}}-\frac{e_{n-1}^{[s-1]}}{e_{n-1}^{[s]}}\right)$$

$$<0 \ \text{(prema posledici 4(a))}.$$

Dakle, kako je $x=a_{n+1}>0$, imamo $f'(a_n)<0$, pa je stoga

$$f(a_{n+1})<\lim_{a_{n+1}\to 0+} f(a_{n+1}),$$

što je u stvari (38).

(ii) Ako je $p=q$, dokaz je sličan i još jednostavniji.

Teorema 14. (a) *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna* n*-torka,* s *prirodan broj i* $1\leqq s\leqq n$, *tada je*

$$(39)\qquad \left(\frac{e_{n+1}^{[n+1]}(\boldsymbol{a})}{e_n^{[n]}(\boldsymbol{a})}\right)^{p}\leqq\frac{p^p}{q^q}(q-p)^{q-p}\left(e_n^{[s]}(\boldsymbol{a})\right)^{p-q}\left(\frac{e_{n+1}^{[s]}(\boldsymbol{a})}{e_n^{[s-1]}(\boldsymbol{a})}\right)^{p}.$$

(b) *Ako su:* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna* n*-torka,* s, k, l *prirodni brojevi,* $n\geqq s>k\geqq 1$, $n\geqq s>l\geqq 1$, $\lambda>0$ *ili* $1\leqq k<s<l\leqq n$ *i* $\lambda<0$, *tada je*

$$\frac{e_{n+1}^{[k]}(\boldsymbol{a})-\lambda e_{n+1}^{[l]}(\boldsymbol{a})}{e_{n+1}^{[s]}(\boldsymbol{a})}<\frac{e_n^{[k]}(\boldsymbol{a})-\lambda e_n^{[l]}(\boldsymbol{a})}{e_n^{[s]}(\boldsymbol{a})}.$$

Ako je $1\leqq l<s<k\leqq n$, $\lambda<0$ *ili* $1\leqq s<k\leqq n$, $1\leqq s<l\leqq n$, $\lambda>0$, *važe suprotne nejednakosti.*

(c) *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka, s prirodan broj,* $1 \leqq s \leqq n+1$, $\mu > 0$, *onda važi*

$$(40)\qquad \frac{\left(e_{n+1}^{[1]}(\boldsymbol{a})+\mu\right)^{s}}{s^{s}\, e_{n+1}^{[s]}(\boldsymbol{a})} \geqq \frac{\left(e_{n}^{[1]}(\boldsymbol{a})+\mu-\dfrac{e_{n}^{[s]}(\boldsymbol{a})}{e_{n}^{[s-1]}(\boldsymbol{a})}\right)^{s-1}}{(s-1)^{s-1}\, e_{n}^{[s-1]}(\boldsymbol{a})},$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_{n+1} = \dfrac{1}{s-1}\left(\mu + e_n^{[1]}(\boldsymbol{a}) - s\dfrac{e_n^{[s]}(\boldsymbol{a})}{e_n^{[s-1]}(\boldsymbol{a})}\right)$.

PRIMEDBE: 6° Ako je $p=s=1$ i $q=n$, nejednakost (39) svodi se na (II.34) za slučaj jednakih težina.

7° Za $s=n+1$ nejednakost (40) postaje

$$\left(\frac{A_{n+1}+\mu}{G_{n+1}}\right)^{n+1} \geqq \left(\frac{A_n + \dfrac{n+1}{n}\mu}{G_n}\right)^{n},$$

a to je (II.47) za slučaj jednakih težina.

3.2. Teorema 12 može se posmatrati kao rešenje problema proširenja Popoviciuove nejednakosti na simetrične sredine. Ovakvo potpuno proširenje Radoove nejednakosti nije poznato. Sledeće parcijalno proširenje dali su Mitrinović i Vasić [7].

Teorema 15. *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka,* r $(1 \leqq r \leqq n+1)$ *prirodan broj i* $\lambda > 0$, *tada važi*

$$(41)\qquad (n+1)\left(P_{n+1}^{[1]}(\boldsymbol{a}) - \lambda P_{n+1}^{[r]}(\boldsymbol{a})\right)$$

$$\geqq n\left(P_n^{[1]}(\boldsymbol{a}) - \frac{(n+1)(r-1)}{rn}\lambda^{r/(r-1)} P_n^{[r-1]}(\boldsymbol{a}) - \frac{n+1-r}{rn}\frac{\left(P_n^{[r]}(\boldsymbol{a})\right)^r}{\left(P_n^{[r-1]}(\boldsymbol{a})\right)^{r-1}}\right),$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{r}\lambda^{r/(r-1)} P_n^{[r-1]} - \dfrac{n+1-r}{r}\dfrac{\left(P_n^{[r]}\right)^r}{\left(P_n^{[r-1]}\right)^{r-1}}$.

Dokaz. Stavimo $x = a_{n+1}$ i posmatrajmo funkciju f, definisanu sa

$$f(x) = (n+1)\left(P_{n+1}^{[1]} - \lambda P_{n+1}^{[r]}\right)$$

$$= n p_n^{[1]} + x - (n+1)\lambda\left(\frac{n+1-r}{n+1}p_n^{[r]} + \frac{r}{n+1}p_n^{[r-1]}x\right)^{1/r}.$$

Tada je funkcija definisana ako je $x \geqq -\dfrac{n+1-r}{r}\dfrac{p_n^{[r]}}{p_n^{[r-1]}}$. Bez teškoća zaključujemo da ova funkcija ima jedinstveni minimum za

$$x = \frac{n+1}{r}\lambda^{r/(r-1)} P_n^{[r-1]} - \frac{n+1-r}{r}\frac{\left(P_n^{[r]}\right)^r}{\left(P_n^{[r-1]}\right)^{r-1}}.$$

PRIMEDBE: 1° Za $r=n+1$ nejednakost (41) postaje

$$(n+1)(A_{n+1} - \lambda G_{n+1}) \geqq n\left(A_n - \lambda^{(n+1)/n} G_n\right),$$

što je, u stvari, (II. 46) u slučaju jednakih težina i za $\mu = 1$.

2° Od interesa je na sličan način generalisati (41) zamenjujući $P_{n+1}^{[1]}$ sa $P_{n+1}^{[s]}$.

4. MARCUS-LOPESOVE NEJEDNAKOSTI

U slučaju potencijalnih i nekih opštijih kvaziaritmetičkih sredina postoje osnovne nejednakosti koje se odnose na vrednosti ovih sredina za n-torke $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ (videti teoremu III.22 i odeljak IV.5). Sada ćemo ispitati kada jedna takva nejednakost postoji za simetrične sredine. Osnovni rezultat, nejednakost (44), potiče od Marcusa i Lopesa [1]. Ona je posledica opštije nejednakosti (42) koju je zveo McLeod [1] i, nezavisno od njega, Bullen i Marcus [1].

Teorema 16. *Ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ pozitivne n-torke, r i s $(1 \leqq r \leqq s \leqq n)$ prirodni brojevi, tada je*

$$\left(\frac{e_n^{[s]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{e_n^{[s-r]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}\right)^{1/r} \geqq \left(\frac{e_n^{[s]}(\boldsymbol{a})}{e_n^{[s-r]}(\boldsymbol{a})}\right)^{1/r} + \left(\frac{e_n^{[s]}(\boldsymbol{b})}{e_n^{[s-r]}(\boldsymbol{b})}\right)^{1/r}, \tag{42}$$

sa jednakošću ako i samo ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ proporcionalni ili ako je $r=s=1$.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $r=1$. Tada možemo pretpostaviti da je $2 \leqq s \leqq n$ i da $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nisu proporcionalni. Stavimo:

$$g_s(\boldsymbol{a}) = \frac{e_n^{[s]}(\boldsymbol{a})}{e_n^{[s-1]}(\boldsymbol{a})}, \quad \Phi_s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = g_s(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - g_s(\boldsymbol{a}) - g_s(\boldsymbol{b}),$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i;$$

tada je

$$\Phi_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i B_n - b_i A_n)^2}{2 A_n B_n (A_n + B_n)},$$

čime je završen dokaz za $s=2$. Neka je sada $s>2$. Sledeći identiteti se proveravaju bez teškoće:

$$(\alpha) \quad s e_n^{[s]}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_{n-1}^{[s-1]}(\boldsymbol{a}_i'), \qquad (\beta) \quad e_n^{[s]}(\boldsymbol{a}) = a_i e_{n-1}^{[s-1]}(\boldsymbol{a}_i') + e_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a}_i'),$$

$$(\gamma) \quad (n-s) e_n^{[s]}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} e_{n-1}^{[s]}(\boldsymbol{a}_i'), \qquad (\delta) \quad s e_n^{[s]}(\boldsymbol{a}) = A_n e_n^{[s]}(\boldsymbol{a}) - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 e_{n-1}^{[s-2]}(\boldsymbol{a}_i').$$

Odavde se lako izvodi

$$s g_s(\boldsymbol{a}) = A_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + g_{s-1}(\boldsymbol{a}_i')},$$

$$\Phi_s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^2}{a_i + g_{s-1}(\boldsymbol{a}_i')} + \frac{b_i^2}{b_i + g_{s-1}(\boldsymbol{b}_i')} - \frac{(a_i+b_i)^2}{a_i + b_i + g_{s-1}(\boldsymbol{a}_i' + \boldsymbol{b}_i')} \right),$$

pa smo sada u situaciji da damo dokaz u ovom slučaju primenom matematičke indukcije po s. Na osnovu induktivne pretpostavke važi nejednakost

$$g_{s-1}(\boldsymbol{a}_i' + \boldsymbol{b}_i') \geqq g_{s-1}(\boldsymbol{a}_i') + g_{s-1}(\boldsymbol{b}_i')$$

sa jednakošću ako i samo ako je a_i' proporcionalno sa b_i'. Stoga je

$$\Phi_s(a, b) \geqq \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{a_i+g_{s-1}(a_i')}+\frac{b_i^2}{b_i+g_{s-1}(b_i')}-\frac{(a_i+b_i)^2}{a_i+b_i+g_{s-1}(a_i'+b_i')}\right) \tag{43}$$

$$=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(a_i g_{s-1}(b_i')-b_i g_{s-1}(a_i')\right)^2}{\left(a_i+g_{s-1}(a_i')\right)\left(b_i+g_{s-1}(b_i')\right)\left(a_i+b_i+g_{s-1}(a_i')+g_{s-1}(b_i')\right)}\geqq 0.$$

Ako a_i' nije proporcionalno sa b_i', za najmanje jedno i prva nejednakost u (43) je stroga, pa je $\Phi_s(a, b)>0$.

Ako je, pak, za svako i, a_i' proporcionalno sa b_i', tj, ako je $a_i'=\lambda_i b_i'$ za neko $\lambda_i>0$, tada je

$$\left(a_i g_{s-1}(b_i')-b_i g_{s-1}(a_i')\right)^2=(a_i-\lambda_i b_i)^2 g_{s-1}(b_i')^2,$$

što je pozitivno jer a nije proporcionalno sa b. Stoga je i u ovom slučaju $\Phi_s(a, b)>0$.

Ovim je završen dokaz za $r=1$ $(1\leqq s\leqq n)$.

Ako sada posmatramo slučaj $r>1$, na osnovu (42) za $r=1$, imamo

$$\left(\frac{e_n^{[s]}(a+b)}{e_n^{[s-r]}(a+b)}\right)^{1/r}=\left(\prod_{j=1}^{r}\frac{e_n^{[s-j+1]}(a+b)}{e_n^{[s-j]}(a+b)}\right)^{1/r}\geqq\left(\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{e_n^{[s-j+1]}(a)}{e_n^{[s-j]}(a)}+\frac{e_n^{[s-j+1]}(b)}{e_n^{[s-j]}(b)}\right)\right)^{1/r}.$$

Odavde, prema H (u obliku (3.8)), dobijamo

$$\left(\frac{e_n^{[s]}(a+b)}{e_n^{[s-r]}(a+b)}\right)^{1/r}\geqq\left(\prod_{j=1}^{r}\frac{e_n^{[s-j+1]}(a)}{e_n^{[s-j]}(a)}\right)^{1/r}+\left(\prod_{j=1}^{r}\frac{e_n^{[s-j+1]}(b)}{e_n^{[s-j]}(b)}\right)^{1/r}$$

$$=\left(\frac{e_n^{[s]}(a)}{e_n^{[s-r]}(a)}\right)^{1/r}+\left(\frac{e_n^{[s]}(b)}{e_n^{[s-r]}(b)}\right)^{1/r}.$$

Slučaj jednakosti neposredno sleduje iz prethodnog slučaja za $r=1$ i iz H.

PRIMEDBE: 1° Nejednakost (42) kazuje da je funkcija $a\mapsto\left(\dfrac{e_n^{[s]}(a)}{e_n^{[s-r]}(a)}\right)^{1/r}$ konkavna.

2° Nejednakost (42) takođe kazuje da je $a_i\mapsto\dfrac{e_n^{[s]}(a)}{e_n^{[s-r]}(a)}$ $(1\leqq i\leqq n)$ rastuća funkcija. Međutim, ovo se može direktno dokazati na sledeći način. Neka je $f(a_1,\ldots,a_n)=e_n^{[s]}(a)/e_n^{[s-r]}(a)$. Tada na osnovu (β) iz prethodnog imamo

$$f_i'(a_1,\ldots,a_n)=\frac{e_n^{[s-r]}(a)\,e_{n-1}^{[s-1]}(a_i')-e_{n-1}^{[s-r-1]}(a_i')}{\left(e_n^{[s-r]}(a)\right)^2}$$

$$=\frac{e_n^{[s-r]}(a_i')\,e_{n-1}^{[s-1]}(a_i')-e_{n-1}^{[s]}(a_i')\,e_{n-1}^{[s-r-1]}(a_i')}{\left(e_n^{[s-r]}(a)\right)^2}\geqq 0,$$

gde smo iskoristili posledicu 4 (a).

Posledica 17. *Ako su a i b pozitivne n-torke i r $(1\leqq r\leqq n)$ prirodan broj, tada je*

$$p_n^{[r]}(a+b)\geqq p_n^{[r]}(a)+p_n^{[r]}(a), \tag{44}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $r=1$ ili ako su a i b proporcionalni.

Dokaz. Dobija se iz teoreme 16 za $s=r$.

PRIMEDBE: 3° Gornji dokaz dali su Marcus i Lopes [1] i Bullen i Marcus [1]. Metod McLeoda [1] je potpuno različit.

4° Nejednakost (44) je generalizacija slične nejednakosti za geometrijske sredine (III.31), koja se iz (44) dobija za $r=n$.

5. GENERALIZACIJE SIMETRIČNIH SREDINA

5.1. Simetrične sredine su partikularni slučajevi mešovitih sredina uvedenih u III.4.5. U stvari, $P_n^{[k]}(\boldsymbol{a})=M(k,\,0;\,k)$. Sada ćemo koristeći primedbu III.4.4°, izvršiti sledeća upoređenja:

$$
(45)\quad \begin{array}{ccccccccc}
G_n(\boldsymbol{a})=M(0,1;\,1) & \leqq & M(0,1;\,2) & \leqq\cdots\leqq & M(0,1;\,n-1) & \leqq & M(0,1;\,n)=A_n(\boldsymbol{a}), \\
\| & & \text{\rotatebox{90}{$\leqq$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\leqq$}} & & \| \\
G_n(\boldsymbol{a})=M(1,0;\,n) & \leqq & M(1,0;\,n-1) & \leqq\cdots\leqq & M(1,0;\,2) & \leqq & M(1,0;\,1)=A_n(\boldsymbol{a}), \\
\| & & \text{\rotatebox{90}{$\geqq$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\geqq$}} & & \| \\
G_n(\boldsymbol{a})=M(n,0;\,n) & \leqq & M(n-1,0;\,n-1) & \leqq\cdots\leqq & M(2,0;\,2) & \leqq & M(1,0;\,1)=A_n(\boldsymbol{a}).
\end{array}
$$

Sledeći problem se postavlja sam po sebi: da li postoje neke druge relacije između simetričnih sredina u poslednjem redu i mešovitih aritmetičkih i geometrijskih sredina iz prvog reda.

Carlson, Meany i Nelson su postavili u [2] hipotezu: Ako je $k+l>n$, tada je

$$
(46)\quad M(k,\,0;\,k)\leqq M(0,\,1;\,l).
$$

Ako bi ovo bilo tačno, šema (45) bi mogla da se napiše u sledećem obliku:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
G_n(\boldsymbol{a})=M(1,\,0;\,n) & \leqq & M(1,\,0;\,n-1) & \leqq\cdots\leqq & M(1,\,0;\,2) & \leqq & M(1,0;\,1)=A_n(\boldsymbol{a}) \\
\| & & \text{\rotatebox{90}{$\geqq$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\geqq$}} & & \| \\
G_n(\boldsymbol{a})=M(n,0;n) & \leqq & M(n-1,0;n-1) & \leqq\cdots\leqq & M(2,0;2) & \leqq & M(1,0;\,1)=A_n(\boldsymbol{a}) \\
\| & & \text{\rotatebox{90}{$\geqq$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\geqq$}} & & \| \\
G_n(\boldsymbol{a})=M(0,\,1;\,1) & \leqq & M(0,\,1;\,2) & \leqq\cdots\leqq & M(0,1;n-1) & \leqq & M(0,1;n)=A_n(\boldsymbol{a}).
\end{array}
$$

Za $n=3$, (46) se svodi na $M(2,\,0;\,2)\leqq M(0,\,1;\,2)$, ili (upoređujući sa (III.64)):

$$
(47)\quad \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^{1/2}\leqq\left(\frac{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}{8}\right)^{1/3}.
$$

Dokaz nejednakosti (47) (Carlson [5]) glasi:

$$
\begin{aligned}
(a+b)\,(b+c)\,(c+a)&=(a+b+c)\,(ab+bc+ca)-abc\\
&=(a+b+c)\,(ab+bc+ca)-(abc)^{1/3}\,(abc)^{2/3}\\
&\geqq\frac{8}{9}\,(a+b+c)\,(ab+bc+ca)\\
&\geqq 8\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^{3/2},
\end{aligned}
$$

gde smo primenili GA i $S(r;\,s)$. Dobijeni rezultat je ekvivalentan sa (47).

5.2. Sledeće, neznatno različite sredine, proučavali su razni autori: Smith [1, p. 440, ex. 38], Hamy [1] i Ness [1].

Neka je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka i stavimo

$$S_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_r ! \left(\sum_{j=1}^{r} a_{i_j}\right)^{1/r} \qquad (1 \leqq r \leqq n).$$

Na osnovu (r, s) imamo $S_n^{[r]}(\boldsymbol{a}) \leqq P_n^{[r]}(\boldsymbol{a})$ sa jednakošću ako i samo ako je $r=1$, n ili $a_1 = \cdots = a_n$. Kako je, očigledno, $S_n^{[n]}(\boldsymbol{a}) = P_n^{[n]}(\boldsymbol{a}) = G_n(\boldsymbol{a})$, $S_n^{[1]}(\boldsymbol{a}) = P_n^{[1]}(\boldsymbol{a}) = A_n(\boldsymbol{a})$, sledeća analogija sa $S(r; s)$ pokazuje da ovaj oblik dovodi do druge skale uporedljivih sredina između aritmetičke i geometrijske sredine.

Teorema 18. *Ako je $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, r i s $(1 \leqq r < s \leqq n)$ prirodni brojevi, tada je*

$$S_n^{[s]}(\boldsymbol{a}) \leqq S_n^{[r]}(\boldsymbol{a})$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. (i) Prvi, jednostavan i direktan dokaz potiče od Hamya [1]. Ako pretpostavimo da $\boldsymbol{a}$ nije konstantno, dovoljno je dokazati da je

$$(48) \qquad \sum_{q+1} ! \left(\prod_{j=1}^{q+1} a_{i_j}\right)^{1/(q+1)} < \frac{n-q}{q+1} \sum_q ! \left(\prod_{j=1}^{q} a_{i_j}\right)^{1/q}.$$

Posmatrajmo tipični član zbira na levoj strani nejednakosti (48). Za njega na osnovu $\boldsymbol{GA}$ imamo

$$(a_1 \cdots a_{q+1})^{1/(q+1)} = \left((a_2 \cdots a_{q+1})^{1/q} (a_1 a_3 \cdots a_{q+1})^{1/q} \cdots (a_1 \cdots a_q)^{1/q}\right)^{1/(q+1)}$$
$$< \frac{(a_2 \cdots a_{q+1})^{1/q} + \cdots + (a_1 \cdots a_q)^{1/q}}{q+1}.$$

Primenjujući isti postupak na svaki član zbira na levoj strani nejednakosti (48), zaključujemo da je taj zbir manji od $(q+1)\binom{n}{q+1}$ članova oblika $\frac{1}{q+1}\left(\prod_{j=1}^{q} a_{i_j}\right)^{1/q}$. Međutim, postoji samo $\binom{n}{q}$ različitih članova ovog oblika, pa se, zbog simetrije, svaki pojavljuje jednak broj puta, tj. $(n-q)$ puta. Ovim je završen dokaz nejednakosti (48).

(ii) Drugačiji dokaz dao je Dunkel [2]. Primenjujući $(r; s)$, ako $\boldsymbol{a}$ nije konstantno, imamo

$$(S_n^{[q]}(\boldsymbol{a}))^q = \left(\frac{1}{\binom{n}{q}} \sum_q ! \left(\prod_{j=1}^{q} a_{i_j}\right)^{1/q}\right)^q > \left(\frac{1}{\binom{n}{q}} \sum_q ! \left(\prod_{j=1}^{q} a_{i_j}\right)^{1/(q+1)}\right)^{q+1}.$$

Ako na $\boldsymbol{a}^{1/(q+1)}$ primenimo $S(r; s)$, dobijamo

$$\left(\frac{1}{\binom{n}{q}} \sum_q ! \left(\prod_{j=1}^{q} a_{i_j}\right)^{1/(q+1)}\right)^{1/q} > \left(\frac{1}{\binom{n}{q+1}} \sum_{q+1} ! \left(\prod_{j=1}^{q+1} a_{i_j}\right)^{1/(q+1)}\right)^{1/(q+1)}.$$

Kombinujući ove dve nejednakosti, nalazimo traženi rezultat.

5.3. Potpune simetrične sredine. Izraz $e_n^{[r]}(\boldsymbol{a})$, koji je definisan pomoću (1), može se prikazati i u obliku

(49) $$e_n^{[r]}(\boldsymbol{a})=\sum\prod_{i=1}^{n} a_i^{i_j},$$

gde se sumiranje vrši po svim $\binom{n}{r}$ n-torkama $(i_1,\ldots,i_n)$ sa $i_j=0$ ili 1 $(1\leqq j\leqq n)$ i $\sum_{j=1}^{n} i_j=r$. Prirodna generalizacija je r-ta potpuna simetrična funkcija od $\boldsymbol{a}$:

$$c_n^{[r]}(\boldsymbol{a})=\sum\prod_{i=1}^{n} a_i^{i_j},$$

gde se sumiranje vrši po svim $\binom{n+r-1}{r}$ n-torkama nenegativnih celih brojeva takvih da je $\sum_{j=1}^{n} i_j=r$.

Potpuna simetrična funkcija može se takođe definisati na način analogan sa (5), naime

(50) $$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i x)^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty} c_n^{[k]}x^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{k} q_n^{[k]}x^k.$$

r-toj potpunoj simetričnoj funkciji pridružuje se r-ta potpuna simetrična sredina definisana sa

$$Q_n^{[r]}(\boldsymbol{a})=\left(q_n^{[r]}(\boldsymbol{a})\right)^{1/r}=\left(\frac{c_n^{[r]}(\boldsymbol{a})}{\binom{n+r-1}{r}}\right)^{1/r}.$$

Lema 19. *Ako su $a_1,\ldots,a_n$ različiti realni brojevi, tada je*

(51) $$c_n^{[k]}(\boldsymbol{a})=[\boldsymbol{a};\ x^{n+k-1}].$$

Dokaz. Razvijajući racionalnu funkciju, koja se pojavljuje na levoj strani jednakosti u (50), u parcijalne sabirke, dobijamo

(52) $$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i x)^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{1-a_i x},$$

gde je

$$A_i=(-1)^{n-i+1}\frac{V(a_i')}{V(a)}a_i^{n-1}\qquad(1\leqq i\leqq n).$$

Jednakost (52) neposredno dovodi do (51).

Posledica 20. *Ako je k paran broj,* $\sum_{i=0}^{2m}\binom{k+n+i-1}{n-1}b_i z^i\geqq 0$, $b_{2m}\geqq 0$, *i ako* $\boldsymbol{a}$ *nije konstantno, važi*

$$\sum_{i=0}^{2m} b_i c_i^{[k+1]} z_i>0.$$

Ako je k neparan broj i ako $\boldsymbol{a}\geqq 0$ nije konstantano, važi isti rezultat.

Dokaz. Iz leme 19, ako je

$$F(y)=\sum_{i=0}^{2m} b_i c_n^{[k+i]} y_i, \qquad f(x)=x^{n+k-1}\sum_{i=0}^{2m} b_i (xy)^i,$$

izlazi $F(y)=[\boldsymbol{a}; f(x)]$. Prema tome, tvrđenje da je F pozitivno ekvivalentno je sa tvrđenjem da je f strogo $(n-1)$-konveksna funkcija. Kako je f polinom stepena ne manjeg od n, prema teoremi I. 39 f će biti konveksna funkcija reda $n-1$ ako i samo ako je $f^{(n-1)}\geqq 0$, kada je $[\boldsymbol{a}; f(x)]>0$ za svako nekonstantno $\boldsymbol{a}$. Međutim, u važnosti je

$$f^{(n-1)}(x)=(n-1)!\, x^k \sum_{i=0}^{n} \binom{k+n+i-1}{n-1} b_i (xy)^i,$$

odakle rezultat neposredno sleduje.

PRIMEDBA: 1° Ovaj Popoviciuov rezultat [1] je osnova prvog dokaza sledeće teoreme.

Teorema 21. *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna* n*-torka,* r *i* $s\,(1\leqq r\leqq s)$ *prirodni brojevi, imamo* $Q_n^{[r]}(\boldsymbol{a})\leqq Q_n^{[s]}(\boldsymbol{a})$ *sa jednakošću ako i samo ako je* $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. Koristeći metod dokaza (i) teoreme 6, dovoljno je dokazati da je

$$(53) \qquad (q_n^{[r]})^2\leqq q_n^{[r-1]} q_n^{[r+1]}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$. Ovo je analogon nejednakosti (7). Prvi dokaz nejednakosti (53) (Popoviciu [1]): Ako u posledici 20 stavimo $m=1$ i

$$b_i=\frac{\binom{2}{i}}{\binom{k+n+i-1}{n-1}}, \text{ imamo } \sum_{i=0}^{2}\binom{k+n+i-1}{n-1} b_i z^i=1+2z+z^2=(1+z)^2\geqq 0.$$

Na osnovu posledice 20, ako je $a\geqq 0$, nalazimo

$$\sum_{i=0}^{2m} b_i c_n^{[k+i]} z^i = q_n^{[k]}+2q_n^{[k+1]}z+q_n^{[k+2]}z^2\geqq 0$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1=\cdots=a_n$. Stavljajući $k=r-1$, ovo implicira (53).

Drugi dokaz nejednakosti (53) (Schur: HLP, p. 164): Ako je

$$A=\{(x_1,\ldots,x_{n-1})\,|\,x_i>0\ (1\leqq i\leqq n-1),\ x_1+\cdots+x_{n-1}<1\},$$

tada za $x_n=1-x_1-\cdots-x_{n-1}$ dobijamo

$$q_n^{[r]}(\boldsymbol{a})=(n-1)!\int_A (a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^r\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

Nejednakost (53) je neposredna posledica integralnog oblika nejednakosti *C*.

PRIMEDBA: 2° Formula gore navedena dovodi do opštijeg rezultata od teoreme 21: Ako je $\boldsymbol{a}$ nekonstantna realna n-torka, tada je kvadratna forma $\sum_{r,s=1}^{n} q_n^{[r+s]}(\boldsymbol{a})\, x_r x_s$ strogo pozitivna; ako je $\boldsymbol{a}$ nekostantna pozitivna n-torka, tada je forma $\sum_{r,s=1}^{n} q_n^{[r+s+1]}(\boldsymbol{a})\, x_r x_s$ strogo pozitivna.

5.4. Koristeći ideju iz III. 4.3 i slično kao što su uradili Gini i Zappa [1], možemo definisati biplanarnu kombinatornu (p, q) potencijalnu sredinu reda (c, d), gde su c i d $(1 \leqq c \leqq n$ i $1 \leqq d \leqq n)$ prirodni brojevi, naime

$$q_n^{p,\, c;\, q,\, d}(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\binom{n}{d} \sum\limits_{c} ! \prod\limits_{j=1}^{c} a_{i_j}{}^{p}}{\binom{n}{c} \sum\limits_{d} ! \prod\limits_{j=1}^{d} a_{i_j}{}^{p}} \right)^{\frac{1}{pc-qd}} = \left(\frac{p_n^{[c]}(\boldsymbol{a}^p)}{p_n^{[d]}(\boldsymbol{a}^q)} \right)^{\frac{1}{pc-qd}}.$$

Primedbe: 1° Očigledno, $B_n^{1,\, c;\, 0,\, d} = p_n^{[c]}$ i $B_n^{p,\, 1;\, q,\, 1} = B_n^{[p,\, q]}$.

Sledeću teoremu dokazali su Gini i Zappa [1].

Teorema 22. *Neka je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna* n*-torka,* c *i* d *prirodni brojevi.*

(a) *ako je* $1 \leqq d \leqq d + m \leqq n$, *tada je* $\beta(d) = B_n^{1,\, d+m;\, 1,\, d}(\boldsymbol{a})$ *opadajuća funkcija;*

(b) *ako je* $1 \leqq d < c \leqq n$, *tada je* $\gamma(c) = B_n^{1,\, c;\, 1,\, d}(\boldsymbol{a})$ *opadajuća funkcija.*

Dokaz. (a) Ovo je neposredna posledica primedbe 2.1.7°.

(b) Iz definicije se lako dobija

$$B_n^{1,\, c;\, 1,\, d} = \left(\prod_{u=d+1}^{c} B^{1,\, u;\, 1,\, u-1} \right)^{\frac{1}{c-d}}$$

i stoga, prema (a), ovo predstavlja geometrijsku sredinu rastućih nizova, te je $B_n^{1,\, c;\, 1,\, d} \geq B_n^{1,\, c;\, 1,\, c-1}$.

Dalje je

$$B_n^{1,\, c;\, 1,\, d} = \left(B_n^{1,\, c;\, 1,\, c-1}\right)^{\frac{1}{c-d}} \left(B_n^{1,\, c-1;\, 1,\, d}\right)^{\frac{c-d-1}{c-d}},$$

što pokazuje da je $B_n^{1,\, c;\, 1,\, d}$ težinska geometrijska sredina brojeva $B_n^{1,\, c;\, 1,\, c-1}$ i $B_n^{1,\, c-1;\, 1,\, d}$. Kao što smo videli, $B_n^{1,\, c;\, 1,\, d}$ nije manje od prvog od ovih brojeva koji, na osnovu teoreme 2.5, premašuje drugi, čime je dokaz završen.

Primedba: 2° U dokazu (b) zaključili smo da je

$$B_n^{1,\, c;\, 1,\, c-1} \leqq B_n^{1,\, c;\, 1,\, d} \leqq B_n^{1,\, c-1;\, 1,\, d},$$

i odatle se, za $k > 0$ i $c < d$, dobija

$$B_n^{1,\, c+k;\, 1,\, d+k} \leqq B_n^{1,\, c+k;\, 1,\, d} \leqq B_n^{1,\, c;\, 1,\, d}.$$

5.5. Whiteleyeva teorema. Identiteti (5) i (50) sugeriraju sledeću generalizaciju simetričnih i potpunih simetričnih funkcija i sredina:

Neka je $\boldsymbol{a}$ realna n-torka, $s\,(\neq 0)$ realan, k prirodan broj. s-ta funkcija reda k, $t_n^{[k,\, s]}(\boldsymbol{a})$, definisana je sa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t_n^{[k,\, s]}(\boldsymbol{a})\, x^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i x)^s \quad (s > 0),$$

(54)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t_n^{[k,\, s]}(\boldsymbol{a})\, x^k = \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i x)^s \quad (s < 0),$$

dok je s-ta sredina reda k koja je pridružena ovoj funkciji definisana sa

$$(55)\qquad W_n^{[k,s]}(a)=\left(\frac{t_n^{[k,s]}(a)}{\binom{ns}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}\ (s>0),\qquad W_n^{[k,s]}(a)=\left(\frac{t_n^{[k,s]}(a)}{(-1)^k\binom{ns}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}\ (s<0).$$

Alternativna definicija za $t_n^{[k,s]}(a)$ je $t_n^{[k,s]}(a)=\sum\prod_{i=1}^{n}\lambda_{i_j}a_j^{i_j}$, gde je

$$(56)\qquad \lambda_i=\binom{s}{i}\ (s>0),\qquad \lambda_i=(-1)^i\binom{s}{i}\ (s<0),$$

i gde se sumiranje vrši po svim nenegativnim n-torkama $(i_1,\ldots,i_n)$ takvim da je $\sum_{j=1}^{n}i_j=k$.

PRIMEDBE: 1° Po analogiji sa $p_n^{[r]}$ i $q_n^{[r]}$ pisaćemo $w_n^{[k,s]}$ umesto $\left(W_n^{[k,s]}\right)^k$.

2° Ako je $s=1$, tada je: $\lambda=1$ ako je $i=0$ i $\lambda=0$ u drugim slučajevima je, stoga, prema (56), $t_n^{[k,1]}=e_n^{[k]}$; ovo takođe neposredno sleduje iz (54).

3° Ako je $s=-1$, tada je $\lambda_i=1$ za svako i i stoga je $t_n^{[k,-1]}=c_n^{[k]}(a)$. Ovo, takođe, neposredno sleduje iz (54). Primetimo da je $(-1)^k\binom{ns}{k}=\binom{-ns+k-1}{k}$ za $s<0$,

4° Ako je $s<0$, svi koeficijenti u $t_n^{[k,s]}$ su pozitivni. Ako je $s>0$ i s nije ceo broj, tada pod uslovom $0\leqq k<s+1$ situacija ostaje ista; međutim, ako je s ceo broj, tada je jedino potrebno da bude $0\leqq k\leqq ns$. Time se objašnjavaju izvesna ograničenja u teoremama koje će kasnije biti formulisane.

5° Na kraju, primetimo da se $t_n^{[k,s]}$ može izraziti u obliku integrala (BB 1.35). Tako, ako je $s<0$ i ako je $|t|$ dovoljno malo, imamo

$$(1-a_it)^s=\frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^{+\infty}e^{-x(1-a_it)}x^{-s-1}\,dx,$$

pa je

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_it)^s=\frac{1}{(\Gamma(-s))^n}\int_{\mathbf{R}_+^n}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}a_i(1-a_it)\right)\prod_{i=1}^{n}x_i^{-s-1}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

Odatle,

$$(57)\qquad t_n^{[k,s]}(a)=\frac{1}{k!\,(\Gamma(-s))^n}\int_{\mathbf{R}_+^n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\right)^k\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\prod_{i=1}^{n}x_i^{-s-1}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

U ovom odeljku proširićemo razne osobine simetričnih i potpunih simetričnih sredina na ove opštije sredine. U sledećim odeljcima, posmatrajući još opštije sredine, ove osobine biće uopštene.

Poći ćemo od sledećeg jednostavnog rezultata koji uopštava lemu 2 i opravdava ime sredina.

Lema 23. *Ako je a nenegativna n-torka, k* $(1\leqq k\leqq n)$ *prirodan broj,* $s\neq 0$, *tada ie* $\min(a)\leqq w_n^{[k,s]}(a)\leqq\max(a)$ *sa jednakošću ako i samo ako je* $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. Ovo se neposredno dobija iz (54) i (55).

Pre nego što pređemo na generalizacije drugih osobina simetričnih sredina, navešćemo nekoliko lema (Whiteley [2]).

Lema 24. *Ako je* $s>0$, *važi*

$$\frac{\partial}{\partial a_i} t_n^{[k,s]} + a_i \frac{\partial}{\partial a_i} t_n^{[k-1,s]} = s\, t_n^{[k-1,s]}$$

i, za $s<0$,

$$\frac{\partial}{\partial a_i} t_n^{[k,s]} - a_i \frac{\partial}{\partial a_i} t_n^{[k-1,s]} = (-s)\, t_n^{[k-1,s]}.$$

Dokaz. Ako je $s<0$, iz (54) sleduje

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial a_i} t_n^{[k,s]}\right) x^k = \frac{-sx}{1-a_i x} \prod_{k=1}^{n} (1-a_k x)^s,$$

tj.

$$(1-a_i x) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial a_i} t_n^{[k,s]}\right) x^k = -sx \prod_{k=1}^{n} (1-a_k x)^s = -sx \sum_{k=0}^{+\infty} t_n^{[k,s]}(\boldsymbol{a})\, x^k.$$

Ako je $s>0$, dokaz je sličan.

Lema 25. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a_i} w_n^{[k,s]} = k\, w_n^{[k-1,s]}$.

Dokaz. Sumirajući rezultate iz leme 24 po i, i primenjujući Eulerovu teoremu o homogenim funkcijama, dobijamo traženi rezultat.

Lema 26. *Ako je* $s<0$, *važi* $w_n^{[1,s]} \leqq w_n^{[2,s]}$. *Ako je* $s>0$, *važi obrnuta nejednakost. U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako je* $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Kako je

$$\left(W_n^{[1,s]}(\boldsymbol{a})\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j\right),$$

$$\left(W_n^{[2,s]}(\boldsymbol{a})\right)^2 = \frac{s-1}{n(ns-1)} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{2s}{n(ns-1)} \sum_{i<j} a_i a_j,$$

dobijamo sledeći rezultat, iz koga neposredno sleduje lema 26:

$$n^2\left(\left(W_n^{[1,s]}(\boldsymbol{a})\right)^2 - \left(W_n^{[2,s]}(\boldsymbol{a})\right)^2\right) = \frac{1}{ns-1}\left((n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{i<j} a_i a_j\right)$$

$$= \frac{1}{(ns-1)} \sum_{i<j} (a_i - a_j)^2.$$

Glavni rezultat je generalizacija teorema 6 i 21:

Teorema 27. *Ako je* $s>0$, k *i* l *celi brojevi takvi da je* $1 \leqq k < l < s+1$, *gde* s *nije ceo broj, ili* $1 \leqq k < l \leqq ns$ *ako je* s *ceo broj, tada za* $\boldsymbol{a} \geqq 0$, *važi*

(58) $$W_n^{[l,s]}(\boldsymbol{a}) \leqq W_n^{[k,s]}(\boldsymbol{a});$$

ako je $s<0$, *važi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako je* $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Iz dokaza teoreme 21 i dokaza (i) teoreme 6 sleduje da je dovoljno dokazati sledeći Whiteleyev rezultat [2] koji generališe (7) i (52):

Teorema 28. *Ako je* $s>0$, k $(1\leqq k<s)$ *ceo broj, pri čemu* s *nije ceo broj, ili* $1\leqq k<ns$ *ako je* s *ceo broj, tada za* $\boldsymbol{a}\geqq 0$ *važi*

$$(59)\qquad \left(w_n^{[k,s]}(\boldsymbol{a})\right)^2\geqq w_n^{[k-1,s]}(\boldsymbol{a})\,w_n^{[k+1,s]}(\boldsymbol{a}).$$

Ako je $s<0$, *važi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost nastupa ako i samo ako je* $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. Ako je $n=1$, rezultat neposredno nalazimo za svako k. Posebno, ako je $k=1$, rezultat se svodi na lemu 26. Dokaz se završava dvostrukom indukcijom po k i n. Pretpostavimo da je poznato da rezultat važi za svako k i n' $(n'<n)$ i sve cele brojeve k' i n $(k'<k)$ i stavimo

$$A=\left\{\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{a}>0 \text{ i } w_n^{[k-1,s]}\,w_n^{[k+1,s]}=1\right\}.$$

Tada, pri datim uslovima, A je kompaktan podskup od $\mathbf{R}^m$ i stoga $\left(w_n^{[k,s]}(\boldsymbol{a})\right)^2$ na A mora da dostigne svoj maksimum ili minimum prema tome da li je $s<0$ ili $s>0$. Prema Eulerovoj teoremi o homogenim funkcijama je

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial}{\partial a_i}\left(w_n^{[k-1,s]}\,w_n^{[k+1,s]}\right)=2\,k\,w_n^{[k-1,s]}\,w_n^{[k+1,s]}=2\,k,$$

tako da se u A svi parcijalni izvodi od $w_n^{[k-1,s]}\,w_n^{[k+1,s]}$ ne anuliraju simultano. Pretpostavimo najpre da je M dostignuto u $(a_1,\ldots,a_n)$, gde je $a_i>0$, $1\leqq i\leqq n$. Primenimo Lagrangeove uslove u toj tački:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\left(w_n^{[k,s]}\right)^2-\lambda\frac{\partial}{\partial a_i}\left(w_n^{[k-1,s]}\,w_n^{[k+1,s]}\right)=0\qquad(1\leqq i\leqq n),$$

$$(60)\qquad 2w_n^{[k,s]}\frac{\partial}{\partial a_i}w_n^{[k,s]}=\lambda\left(w_n^{[k+1,s]}\frac{\partial}{\partial a_i}w_n^{[k-1,s]}+w_n^{[k-1,s]}\frac{\partial}{\partial a_i}w_n^{[k+1,s]}\right)\quad(1\leqq i\leqq n).$$

Pomnožimo svaki od identiteta (60) sa a_i, saberimo ih i primenimo Eulerovu teoremu o homogenim funkcijama. Na taj način dobijamo $\lambda=M$. Iskoristimo (60) da bismo dobili jednu gornju granicu za λ. Saberimo identitete (60) i primenimo lemu 25. Tako dobijamo

$$2\,k\,w_n^{[k,s]}\,w_n^{[k-1,s]}=\lambda\left((k-1)\,w_n^{[k+1,s]}\,w_n^{[k-2,s]}+(k+1)\,w_n^{[k-1,s]}\,w_n^{[k,s]}\right).$$

Odavde, posle uprošćavanja, nalazimo

$$(61)\qquad 2\,k-\lambda\,(k+1)=\lambda\,(k-1)\,\frac{w_n^{[k+1,s]}\,w_n^{[k-2,s]}}{w_n^{[k-1,s]}\,w_n^{[k,s]}}.$$

Kako je $\lambda=M=\left(w_n^{[k,s]}\right)^2/\left(w_n^{[k-1,s]}\,w_n^{[k+1,s]}\right)$, stavljajući $\mu=\dfrac{\left(w_n^{[k-1,s]}\right)^2}{w_n^{[k-2,s]}\,w_n^{[k,s]}}$, jednakost (61) postaje

$$(62)\qquad 2\,k-\lambda\,(k+1)=\frac{k-1}{\mu}.$$

Ako u (62) zamenimo induktivne pretpostavke: $\mu\leqq 1$ ako je $s>0$, odnosno $\mu\geqq 1$ ako je $s<0$, dobijamo $\lambda\leqq 1$ ako je $s>0$, odnosno $\lambda\geqq 1$ ako je $s<0$, čime je dokaz završen.

Ako je, međutim, $\lambda=1$, tada je $\mu=1$, tako da se indukcija takođe može primeniti na slučaj jednakosti.

Posmatrajmo sada slučaj kada je maksimum M dostignut u jednoj tački koja ima samo $p\,(p<n)$ koordinata različitih od nule. U tom slučaju je $M=\big(w_p^{[k,s]}(a')\big)^2/\big(w_p^{[k-1,s]}(a')\,w_p^{[k+1,s]}(a')\big)$, gde je a' p-torka sastavljena od onih koordinata koje su različite od nule. Prema induktivnoj pretpostavci je $M\leqq 1$, čime je dokaz završen.

PRIMEDBE: 6° Iz primedbi 2° i 3° sleduje da je (59) generalizacija (7) i (53). Međutim, za razliku od (7) (videti primedbu 2.1.3°), uslov $a>0$ je esencijalan. Ovo se vidi posmatranjem slučaja $s=-1$, $n=2$, $k=2$, i $a_1=-a_2$.

Posledica 29. *Ako je $s>0$, k ceo broj i $1\leqq k<s$, gde s nije ceo broj ili $1\leqq k<ns$ ako je s ceo broj, tada za $a\geqq 0$ važi*

$$\big(t_n^{[k,s]}\big)^2>t_n^{[k-1,s]}\,t_n^{[k+1,s]}.$$

Ako je $s<0$, važi suprotna nejednakost.

Dokaz. Ovo je neposredna posledica (59) i činjenice da je pod navedenim uslovima $\binom{ns}{k}^2\Big/\binom{ns}{k-1}\binom{ns}{k+1}$ veće od 1 ako je $s>0$, tj. manje od 1 ako je $s<0$.

Posledica 30. *Ako je $s>0$, k i l celi brojevi i $1\leqq k<l<s$ ako s nije ceo broj ili $1\leqq k<l<ns$ ako je s ceo broj, tada za $a\geqq 0$ važi*

$$\big(t_n^{[k,s]}\big)^{1/k}>\big(t_n^{[l,s]}\big)^{1/l}.$$

Za $s<0$ važi obrnuta nejednakost.

Dokaz. Ovo sleduje iz (59) na isti način kao što (8) sleduje iz (7).

Whiteley je generalisao posledicu 17 na sledeći način:

Teorema 31. *Ako je $s>0$, k ceo broj, $k<s+1$ ako s nije ceo broj, tada za $a\geqq 0$, $b\geqq 0$ važi*

$$w_n^{[k,s]}(a+b)\geqq w_n^{[k,s]}(a)+w_n^{[k,s]}(b). \tag{63}$$

Ako je $s<0$, važi suprotna nejednakost. Nejednakost je stroga osim ako je $k=1$ ili ako su a i b proporcionalni.

Dokaz. (i) Nejednakost (60) je ekvivalentna sa jednom analognom nejednakosti kada se w zameni sa t i iskoristi oblik (57). To je neposredna posledica integralnog oblika M (videti M, p. 57).

(ii) Direktan dokaz, primenom metoda sličnom onom koji je korišćen u dokazu teoreme 28, dao je Whiteley [2]. Međutim kako se moraju razlikovati slučajevi $s<0$, $s>0$ kada s nije ceo broj i slučaj kada je s ceo broj, dokaz je znatno duži. Kraći dokaz opštijeg rezultata biće dat u sledećem odeljku.

PRIMEDBE: 7° Ako je $s=1$, nejednakost (63) se svodi na (44). Ako je $s=-1$, nalazimo analogan rezultat za potpune simetrične sredine, koji je dobio McLeod [1]:

$$Q_n^{[k]}(a+b)\leqq Q_n^{[k]}(a)+Q_n^{[k]}(b).$$

8° Ako je $s=-\delta$, gde je δ dovoljno mali pozitivan broj, tada je

$$t_n^{[k,\,-\delta]}=\sum_{i=1}^{n} a_i{}^k+O(\delta^2),$$

pa primenjujući (63) i puštajući da $\delta\to 0$, zaključujemo da (63) implicira M.

9° Nejednakost (63) je ekvivalentna iskazu da je površina $w_n^{[k,\,s]}(a)=1$ u „pozitivnom" „kvadrantu" $\mathbf{R}^n$ konveksna za $s>0$ i konkavna za $s<0$.

5.6. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{a}$ nenegativna n-torka, $\theta>0$, $\alpha_{i,j}\,(1\leq i\leq n;\ j=1,2,\ldots)$ niz pozitivnih brojeva i definišimo $\beta_{i,j}\,(1\leq i\leq n,\ j=1,2,\ldots)$ sa

$$\alpha_{i,r}=\frac{1}{r!}\prod_{j=1}^{r}\beta_{i,j}.$$

Definišimo, kao što su to uradili Whiteley [3] i Bullen [9], funkciju $\boldsymbol{a}\mapsto g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})$ reda k pomoću

$$(64)\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})\,x^k=\theta\prod_{i=1}^{n}\Big(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\alpha_{i,r}(a_i x)^r\Big)=\theta\prod_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\prod_{j=1}^{r}\beta_{i,j}}{r!}(a_i x)^r\right).$$

PRIMEDBE: 1° Funkcija $t_n^{[k,\,s]}$ iz prethodnog odeljka je partikularan slučaj od $g_n^{[k]}$. Dovoljno je uzeti $\beta_{i,j}=s-j+1$ $(s>0)$, $\beta_{i,j}=-s+j-1$ $(s<0)$.

2° Opštije, ako je $\vec{\sigma}$ pozitivna ili negativna n-torka, redom stavimo $\beta_{i,j}=\sigma_i-j+1$ $(\vec{\sigma}>0)$, $\beta_{i,j}=-\sigma_i+j-1$ $(\vec{\sigma}<0)$. Ovaj slučaj $g_n^{[k]}$ obeležavaćemo sa $t_n^{[k;\,\sigma]}$. Ako je $\vec{\sigma}$ konstantno i jednako s, tada je $t_n^{[k;\,\sigma]}=t_n^{[k,\,s]}$. Ove funkcije mogu se definisati direktno pomoću jednakosti:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t_n^{[k;\,\sigma]}x^k=\prod_{i=1}^{n}(1+a_i x)^{\sigma_i}\ (\vec{\sigma}>0),\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} t_n^{[k;\,\sigma]}x^k=\prod_{i=1}^{n}(1-a_i x)^{\sigma_i}\ (\vec{\sigma}<0).$$

Ove funkcije i njima pridružene sredine uveo je Gini [5]. Njihovu primenu u statistici ispitivalo je više autora: Gini i Zappa [1], Zappa ([1], [2]), Pizzetti [1], Pietra [1]. Oni su primenili ove sredine da bi definisali razne biplanarne sredine (videti: 5.4). Međutim, kako je značaj ovih sredina bio u tome da se nađu pogodne statističke sredine, ovi autori su izgleda definisali više novih sredina, ali nisu dovoljno ispitivali njihove osobine. Kasnije je Menon ([3]) i ([5]) proučavao ove funkcije i našao veliki broj njihovih osobina. Posebno, Menon je uopštio teoreme 27 i 28 na ove opštije sredine.

Što se tiče $t_n^{[k,\,s]}$ (videti primedbu 5.5.4°), izvesna ograničenja moraju da se stave za k da bi se obezbedilo da koeficijenti $t_n^{[k,\,\sigma]}$ budu pozitivni. Ako je $\vec{\sigma}<0$, tada k može biti proizvoljno; kada je $\vec{\sigma}>0$, tada je $1\leq k\leq 1+\min\vec{\sigma}$, kada $\min\vec{\sigma}$ nije ceo broj. Ako je $\min\sigma$ ceo broj, komplikovanije je postaviti ograničenja i za tog razloga se ovaj slučaj obično izostavlja iz razmatranja (Menon [3], [5]). Međutim, za dokazivanje je potrebno samo da su koeficijenti pozitivni, te se svode na ovaj slučaj kada se zna da koeficijenti nikad nisu negativni, tj. ako je $\sigma_1=\cdots=\sigma_n=s$, dovoljno da bude $1\leq k\leq ns$, kao što smo videli.

3° Menon [6] je dao dalje proširenje prethodnih primera. Neka je $0\leq q<1$. Tada je q-binomni koeficijent definisan na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} s\\ k\end{bmatrix}=\prod_{i=1}^{k}\frac{1-q^{s-i+1}}{1-q^i}\ (k>0),\qquad \begin{bmatrix} s\\ k\end{bmatrix}=1\ (k=0),\qquad \begin{bmatrix} s\\ k\end{bmatrix}=0\ (k<0).$$

Ako $q\to 1$, taoa $\begin{bmatrix} s\\ k\end{bmatrix}\to\binom{s}{k}$. Ako je $\vec{\sigma}$ pozitivna n-torka, definišimo $e_n^{[k;\,\sigma]}(q;\boldsymbol{a})$ i $c_n^{[k;\,\sigma]}(q;\boldsymbol{a})$ pomoću $g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})$ pri čemu je $\alpha_{i,r}$ jednako $\begin{bmatrix}\sigma_i\\ r\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}\sigma_i+r-1\\ r\end{bmatrix}$ respektivno. Menon [6] je proširio teoremu 28 na sredine pridružene ovim funkcijama.

4° Menon [7] je koristio q-binomni koeficijent da bi generalisao $P_n^{[r]}$ na sledeći način:

$$P_{n,q}^{[r]}(a)=\frac{e_n^{[r]}(a)}{\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}}.$$

Odavde je $P_{n,1}^{[r]}(a)=P_n^{[r]}(a)$ i $P_{n,0}^{[r]}(a)=e_n^{[r]}(a)$. Na osnovu toga što je $\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}$ logaritamski konkavno (videti posledicu 30), Menon je dokazao nejednakost $\left(P_{n,q}^{[r]}\right)^2 \geqq P_{n,q}^{[r-1]} P_{n,q}^{[r+1]}$. Ova nejednakost sadrži obe nejednakosti (7) i (8) kao specijalne slučajeve.

Originalan dokaz teoreme 31, koji je dao Whiteley [1], koristi teoremu 29 (ili 27). U razmatranom generalnijem slučaju, takvi rezultati ne postoje, ali kao što je Whiteley [3] pokazao, nešto slabiji rezultati su dovoljni.

U slučaju $s>0$ nejednakosti (59) i (58) impliciraju sledeće slabije, ali jednostavne nejednakosti (sa ograničenjima za k i l koja su data u teoremama 27 i 28):

$$\left(t_n^{[k,s]}\right)^2 \geqq \frac{k+1}{k}\, t_n^{[k-1,s]}\, t_n^{[k+1,s]}, \tag{65}$$

$$\left(k!\, t_n^{[k,s]}\right)^{1/k} > \left(l!\, t_n^{[l,s]}\right)^{1/l}. \tag{66}$$

Ako je $s<0$, važe suprotne nejednakosti. Upravo ovi rezultati biće generalisani niže i tada će biti upotrebljeni da bi se dobila teorema čiji je specijalan slučaj teorema 31.

Za $s>0$ nejednakosti (65) i (66) impliciraju još slabije ali jednostavne nejednakosti:

$$\left(t_n^{[k,s]}\right)^2 \geqq t_n^{[k-1,s]}\, t_n^{[k+1,s]}, \tag{67}$$

$$\left(t_n^{[k,s]}\right)^{1/k} \geqq \left(t_n^{[l,s]}\right)^{1/l}. \tag{68}$$

Ako je $s<0$, mogu se analogno izvesti nejednakosti suprotne nejednakostima (67) i (68). Međutim, kao što ćemo kasnije videti, nejednakosti (67) i (68) važe i za $s \leqq -1$.

Teorema 32. (a) *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *nenegativna* n-*torka i ako je u* (64) $\alpha_{i,r}$ $(r=1, 2, \ldots)$ *logaritamski konkavno za svako* i $(1 \leqq i \leqq n)$, *ili ekvivalentno*

$$\beta_{i,j-1} \geqq \frac{j-1}{j}\, \beta_{i,j} \qquad (1 \leqq i \leqq n,\ j=1, 2, \ldots), \tag{69}$$

tada je

$$g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})^2 \geqq g_n^{[k-1]}(\boldsymbol{a})\, g_n^{[k+1]}(\boldsymbol{a}) \qquad (k \geqq 1), \tag{70}$$

$$g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})^{1/k} \geqq g_n^{[l]}(\boldsymbol{a})^{1/l} \qquad (1 \leqq k \leqq l). \tag{71}$$

Ako je umesto toga $\alpha_{i,r}$ $(r=1, 2, \ldots)$ *striktno logaritamski konkavni niz za svako* i $(1 \leqq i \leqq n)$, *ili ekvivalentno*

$$\beta_{i,j-1} \geqq \beta_{i,j} \qquad (1 \leqq i \leqq n,\ j=1, 2, \ldots), \tag{72}$$

tada je

$$g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})^2 \geqq \frac{k+1}{k}\, g_n^{[k-1]}(\boldsymbol{a})\, g_n^{[k+1]}(\boldsymbol{a}), \tag{73}$$

$$\left(r!\, g_n^{[r]}(\boldsymbol{a})\right)^{1/r} \geqq \left(k!\, g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})\right)^{1/k} \qquad (1 \leqq r \leqq k). \tag{74}$$

Ako se uzme u obzir pretpostavka o logaritamskoj konveksnosti, nejednakosti (72), (73) i (74) *su suprotne.*

Dokaz. (a) U slučaju pozitivnih nizova nejednakost (70) se dokazuje jednostavnom indukcijom po n polazeći od teoreme I. 8 (a). Posmatranjem jednakosti (64) zaključujemo: Ako je neko od $a_i = 0$, rezultat sleduje iz nejednakosti za manje vrednosti n.

Nejednakost (71) može se izvesti iz (70) na osnovu iste argumentacije kao u teoremi 1.

(b) Dokaz je isti kao pod (a) samo umesto teoreme 1.8 (a) treba primeniti teoremu I.5.

Slučaj jednakosti. Na osnovu primedbi koje sleduju iza teorema I 5 i I 8 možemo da učinimo sledeće primedbe:

(i) Nejednakost (70): jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ ili ako je $a_i = 0$ $(i \neq j)$ i $\alpha_{j,k}^2 = \alpha_{j,k-1}\alpha_{j,k+1}$. U ostalim slučajevima nejednakost je stroga.

(ii) Nejednakost (71): jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ ili ako je $a_i = 0$ i $\alpha_{j,s}^2 = \alpha_{j,s-1}\alpha_{j,s+1}$ $(1 \leqq s \leqq k)$.

(iii) Nejednakost (73): jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n = 0$ ili ako je $\alpha_{i,j}^2 = \alpha_{i,j-1}\alpha_{i,j+1}$ $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq k+1)$.

(iv) Nejednakost (74): uslovi su isti kao kod (70).

Posledica 33. *Neka je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka i* $\vec{\sigma}$ *realna n-torka. Tada, ako je k prirodan broj, važi*

$$(75)\qquad t_n^{[k;\,\sigma]}(\boldsymbol{a})^2 > \frac{k+1}{k}\, t_n^{[k-1;\,\sigma]}(\boldsymbol{a})\, t_n^{[k+1;\,\sigma]}(\boldsymbol{a}) \quad (\vec{\sigma} > 0);$$

ako je $\vec{\sigma} < 0$, *važi suprotna nejednakost*;

$$(76)\qquad t_n^{[k,\,\sigma]}(\boldsymbol{a})^2 > t_n^{[k-1;\,\sigma]}(\boldsymbol{a})\, t_n^{[k+1;\,\sigma]}(\boldsymbol{a}) \quad (\sigma_i \leqq -1,\ 1 \leqq i \leqq n);$$

$$(77)\qquad e_n^{[k;\,\sigma]}(\boldsymbol{q};\,\boldsymbol{a})^2 > e_n^{[k-1;\,\sigma]}(\boldsymbol{q};\,\boldsymbol{a})\; e_n^{[k+1;\,\sigma]}(\boldsymbol{q};\,\boldsymbol{a}) \quad (\sigma > 0)$$

i ako je $\sigma_i \geqq 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$,

$$(78)\qquad \left(c_n^{[k;\,\sigma]}(\boldsymbol{q};\,\boldsymbol{a})\right)^2 > c_n^{[k-1;\,\sigma]}(\boldsymbol{q};\,\boldsymbol{a})\; c_n^{[k+1;\,\sigma]}(\boldsymbol{q};\,\boldsymbol{a}).$$

Dokaz. Iz primedbe 2° izvodi se zaključak da $\beta_{i,j}$ zadovoljava (72) ako je $\vec{\sigma} > 0$ i suprotnu nejednakost ako je $\vec{\sigma} < 0$; ako je $\sigma_i < -1$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $\beta_{i,j}$ zadovoljava (69). Ovo po teoremi 32 implicira nejednakosti (75) i (76); da su ove nejednakosti striktne, proizilazi iz diskusije koju smo napred izveli u vezi sa slučajevima jednakosti.

Na osnovu primedbe 3° nejednakosti (77) i (78) sleduju iz teoreme 32 (a), ako dokažemo da su nizovi $\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} s+r-1 \\ r \end{bmatrix}$ logaritamski konkavni za $s > 0$. Posmatraćemo prvi slučaj; drugi se razmatra na sličan način. Kako je

$$\frac{\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}^2}{\begin{bmatrix} s \\ r-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ r+1 \end{bmatrix}} = \left(\frac{1-q^{s-r+1}}{1-q^r}\right)\left(\frac{1-q^{s-r}}{1-q^{r+1}}\right)^{-1},$$

dovoljno je dokazati da je $x \mapsto f(x) = \frac{1-q^{s-x+1}}{1-q^x}$ opadajuća funkcija. Zaista je

$$f'(x) = \frac{1}{(1-q^x)^2}\left(q^{s-x+1}(1-q^x) + (1-q^{s-x+1})\right)\log q < 0 \qquad (0 < q < 1).$$

PRIMEDBA: 5° Nejednakost (76) opravdava primedbe učinjene u vezi sa (67). Naravno, nejednakosti strože od (25) su poznate ako je $\vec{\sigma}$ konstantno. Do svih rezultata iz posledice 33 došao je Menon ([5] i [6]). On je takođe dobio slične rezultate za jedan tip funkcija koji ovde neće biti posmatran, a koji takođe generališe $t_n^{[k, \sigma]}(\boldsymbol{a})$ (Menon [2]).

Sada smo u mogućnosti da damo generalizaciju teoreme 28, naime:

Teorema 34. *Ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *nenegativne n-torke i ako je u* (64) $\alpha_{i,r}$ $(r=1, 2, \ldots)$ *strogo logaritamski konkavno za svako* i $(1 \leqq i \leqq n)$, *tj.* $\beta_{i,j-1} > \beta_{i,j}$ $(1 \leqq i \leqq n,\ j = 1, 2, \ldots)$, *tada je*

$$g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\frac{1}{k}} \geqq g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})^{\frac{1}{k}} + g_n^{[k]}(\boldsymbol{b})^{\frac{1}{k}} \qquad (k \geqq 1). \tag{79}$$

Ako se pretpostavke promene tako da se uzme slaba logaritamska konveksnost, nejednakost u (79) *se menja u suprotnu. U oba slučaja jednakost nastupa ako i samo ako je* $k=1$ *ili ako su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *proporcionalni.*

PRIMEDBE: 6° Kako gornje diskusije pokazuju, teorema 31 je partikularan slučaj ovog rezultata i stoga sledeći dokaz upotpunjuje našu diskusiju ove teoreme. Metod je sličan onome koji je korišćen u teoremi 28, kao što je bilo istaknuto u diskusiji teoreme 28. Međutim, teorema 32 omogućuje da učinimo suptilniju upotrebu Lagrangeovih uslova.

7° Primena opštijih funkcija omogućava diferenciranje pri čemu ostajemo u klasi funkcija za koje se rezultat dokazuje. Jer, kao što se vidi, ako je $g_n^{[k]}$ funkcija stepena k, tada je $\frac{\partial g_n^{[k]}}{\partial a_m}$ funkcija stepena $k-1$; a sem toga, ako koeficijenti $g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})$ zadovoljavaju (72) (u obrnutom smislu), to isto važi i za koeficijente $\frac{\partial g_n^{[k]}}{\partial a_m}$ $(1 \leqq m \leqq n)$.

8° Takođe nije teško dokazati da, ako je $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'')$, $\boldsymbol{a}' = (a_1, \ldots, a_m)$, $\boldsymbol{a}'' = (a_{m+1}, \ldots, a_n)$, tada je

$$g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}) = \sum_{r=0}^{k} g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}')\, g_{n-m}^{[k-r]}(\boldsymbol{a}''). \tag{80}$$

***Dokaz teoreme* 34.** Dokaz se izvodi indukcijom po k. Ako je $k=1$, nema šta da se dokazuje. Međutim, da bismo posmatrali slučaj jednakosti sa indukcijom, moramo poći od $k=2$. Posle dva kvadriranja nejednakosti (79), za $k=2$ dobijamo ekvivalentnu nejednakost

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n} \beta_{i,1}\beta_{j,1}(\beta_{i,2}\beta_{j,2} - \beta_{i,1}\beta_{j,1})(a_i b_j - a_j b_i)^2 \leqq 0,$$

koja neposredno sleduje iz (72). Stavimo sada

$$A = \left\{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{a} > 0,\ \boldsymbol{b} > 0 \ \text{i} \ g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 1\right\}.$$

Pri datim uslovima A je kompaktan podskup od $\mathbf{R}^{2n}$. Stoga $g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})^{1/k} + g_n^{[k]}(\boldsymbol{b})^{1/k}$ mora u A da dostigne svoj maksimum ili minimum M, prema tome da li važi (72) ili suprotna nejednakost. Dovoljno je, zbog homogenosti, dokazati da je $M \leqq 1$ u prvom i $M \geqq 1$ u drugom slučaju. Budući da se oba slučaja slično razmatraju, zadržaćemo se samo na prvom slučaju. Pretpostavimo da je M dostignuto u tački $(a, b) \in A$, gde je

$$a_i > 0 \quad (i = i_1, \ldots, i_{n_1}), \quad a_i = 0 \text{ (u ostalim slučajevima)},$$

$$b_j > 0 \quad (j = j_1, \ldots, j_{n_2}), \quad b_j = 0 \text{ (u ostalim slučajevima)},$$

uz uslov $1 \leqq n_1 \leqq n$, $1 \leqq n_2 \leqq n$. (Slučajevi kada je $n_1 = 0$ i, ili, $n_2 = 0$ su trivijalni). Razlikovaćemo nekoliko slučajeva.

Slučaj 1: za neko q je $a_q b_q > 0$. Tada, primenjujući Lagrangeove uslove na elemente a_i, b_j koji su različiti od nule i postupajući kao u teoremi 23, dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial a} g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})^{1/k} - \lambda \frac{\partial}{\partial a_i} g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{1/k} = 0 \quad (i = i_1, \ldots, i_{n_1});$$

$$\frac{\partial}{\partial b_j} g_n^{[k]}(\boldsymbol{b})^{1/k} - \lambda \frac{\partial}{\partial b_j} g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{1/k} = 0 \quad (j = j_1, \ldots, j_{n_2}),$$

tj.

$$(81) \qquad g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})^{(1-k)/k} \frac{\partial}{\partial a_i} g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}) = \lambda g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{(1-k)/k} \frac{\partial}{\partial a_i} g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$(82) \qquad g_n^{[k]}(\boldsymbol{b})^{(1-k)/k} \frac{\partial}{\partial b_j} g_n^{[k]}(\boldsymbol{b}) = \lambda g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{(1-k)/k} \frac{\partial}{\partial a_i} g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Množeći (81) sa a_i i (82) sa b_j, sabirajući po $i = i_1, \ldots, i_{n_1}$ i $j = j_1, \ldots, j_{n_2}$ i primenjujući Eulerovu teoremu o homogenim funkcijama, dobijamo

$$(83) \qquad g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})^{1/k} + g_n^{[k]}(\boldsymbol{b})^{1/k} = \lambda g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{1/k}.$$

Stavimo sada $i = j = q$ u (81) i (82), dignimo obe dobijene jednakosti na stepen $1/(k-1)$, saberimo ih i primenimo (83). Tako dobijamo

$$(84) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial a_q} g_n^{[k]}(\boldsymbol{a})\right)^{1/(k-1)} + \left(\frac{\partial}{\partial b_q} g_n^{[k]}(\boldsymbol{b})\right)^{1/(k-1)} = \lambda^{k/(k-1)} \left(\frac{\partial}{\partial a_q} g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right)^{1/(k-1)}.$$

Prema primedbi 7° $\dfrac{\partial g_n^{[k]}}{\partial a_q}$ je funkcija reda $k-1$, zadovoljava (72) i induktivna pretpostavka (84) kazuje da je $\lambda \leqq 1$. Međutim, iz (83) je $M = \lambda$, pa je $M \leqq 1$, što je i trebalo dokazati.

Slučaj 2: za svako i je $a_i b_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, što će reći da su $(i_1, \ldots, i_{n_1})$ i $(j_1, \ldots, j_{n_2})$ različiti podskupovi od $(1, \ldots, n)$. Tada se (79) svodi na

$$g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}' \; \boldsymbol{b}')^{1/k} \geqq g_n^{[k]}(\boldsymbol{a}')^{1/k} + g_n^{[k]}(\boldsymbol{b}')^{1/k},$$

gde je $\boldsymbol{a}' = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n_1}})$, $\boldsymbol{b}' = (b_{j_1}, \ldots, b_{j_{n_2}})$, ili, na osnovu primedbe 8°,

$$\left(\sum_{r=0}^{k} g_{n_1}^{[r]}(\boldsymbol{a}') g_{n_2}^{[k-r]}(\boldsymbol{b}')\right)^{1/k} \geqq g_{n_1}^{[k]}(\boldsymbol{a}')^{1/k} + g_{n_2}^{[k]}(\boldsymbol{b}')^{1/k}.$$

Dizanjem na k-ti stepen dobijamo

$$(85) \qquad \sum_{r=0}^{k} g_{n_1}^{[r]}(\boldsymbol{a}') g_{n_2}^{[k-r]}(\boldsymbol{b}') \geqq \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} g_{n_1}^{[k]}(\boldsymbol{a}')^{r/k} g_{n_2}^{[k]}(\boldsymbol{b}')^{(k-r)/k}.$$

Ako je $1 \leqq r \leqq k-1$, na osnovu (74) imamo

$$g_{n_1}^{[r]}(a') > \frac{\left(k!g_{n_1}^{[k]}(a')\right)^{r/k}}{r!}, \qquad g_{n_2}^{[k-r]}(b') > \frac{\left(k!g_{n_2}^{[k]}(b')\right)^{(k-r)/k}}{(k-r)!},$$

odakle (85) neposredno sleduje.

Primedbe: 9° Nije poznato da li nejednakost (42) važi za sve ove opštije forme. Tako, na primer, nije poznato da li važi nejednakost

$$\left(\frac{c_n^{[s]}(a+b)}{c_n^{[s-r]}(a+b)}\right)^{1/r} \leqq \left(\frac{c_n^{[s]}(a)}{c_n^{[s-r]}(a)}\right)^{1/r} + \left(\frac{c_n^{[s]}(b)}{c_n^{[s-r]}(b)}\right)^{1/r}.$$

10° Primenjujući teoremu 34 na funkcije $t_n^{[k;\,\sigma]}$, mogućno je proširiti teoremu 36 na ove funkcije, kao što je sugerirao Whiteley [1, p. 50].

5.7. Muirheadove nejednakosti. Navešćemo sada jednu generalizaciju elementarnih simetričnih funkcija koja se bitno razlikuje od generalizacije ovih funkcija koje smo do sada posmatrali.

Neka je $\vec{\alpha}$ nenegativna n-torka, $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, tada je Muirheadova simetrična α-sredina definisana sa

$$A_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha}) = M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha})^{\frac{1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}, \tag{86}$$

gde je

$$M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha}) = \frac{1}{n!} \sum ! \prod_{j=1}^{n} a_{i_j}^{\alpha_j}. \tag{87}$$

Primedbe: 1° Ako je $\vec{\alpha} = (1, 0, \ldots, 0)$, tada je $A_n(\boldsymbol{a}, \vec{\alpha}) = A_n(\boldsymbol{a})$, dok u slučaju $\vec{\alpha} = (1, \ldots, 1)$ imamo $A_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha}) = G_n(\boldsymbol{a})$.

2° Opštije, ako je $\alpha_i = 1$ $(1 \leqq i \leqq r)$, $\alpha_i = 0$ $(r+1 \leqq i \leqq n)$, tada je $A_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha}) = P_n^{[r]}(\boldsymbol{a})$.

3° Očevidno, poredak elemenata u $\vec{\alpha}$ nije bitan tako da možemo pretpostaviti da je $\vec{\alpha}$ opadajuće

Glavni cilj pododeljka je nalaženje uslova pod kojima su dve različite Muirheadove sredine uporedljive u smislu definicije 45. Odgovor je dat pomoću pojmova uvedenih u I.4.3.

Teorema 35. *Neka su $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ neidentične n-torke, $\boldsymbol{a}$ pozitivna n-torka, tada su $M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha})$ i $M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\beta})$ uporedljivi ako i samo ako je jedna od n-toraka $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$ preuređenje druge. Preciznije,*

$$M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\beta}) \leqq M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha}), \tag{88}$$

ako i samo je $\vec{\beta} \prec \vec{\alpha}$ ili ako i samo ako je $\vec{\beta}$ jedno preuređenje n-torke $\vec{\alpha}$; pod tim uslovima jednakost u (88) *važi ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.*

Dokaz. (i) Pretpostavimo da (88) važi za svako pozitivno $\boldsymbol{a}$ i, što možemo, da su $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$ opadajući. Ako stavimo $a_1 = \cdots = a_n = a$, iz (88) izlazi $a^{\sum_{i=1}^{n} \beta_i} \leqq a^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$. Uzimajući velike vrednosti a i male vrednosti a, ova nejednakost implicira (I.32). Ako sada uzmemo $a_1 = \cdots = a_k = a$, $a_{k+1} = \cdots = a_n = 1$ $(1 \leqq k \leqq n)$, tada najveći stepen od a u $M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\beta})$ je $\sum_{i=1}^{k} \beta_i$, dok je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ u $M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha})$. Ako sada pretpostavimo da je a veliko, (88) implicira (I.33). Stoga je $\vec{\beta} \prec \vec{\alpha}$.

(ii) Pretpostavimo sada da je $\vec{\beta} \prec \vec{\alpha}$, ili prema teoremi I.12 da je $\vec{\beta}$ jedno preuređenje od $\vec{\alpha}$. Tada, prema I.4.3, dovoljno je dokazati da je $\vec{\beta} = \boldsymbol{S}\vec{\alpha}$, gde je $\boldsymbol{S}$ oblika (I.20), pa da (86) važi.

Neka je $\boldsymbol{S}$ oblika i pretpostavimo, što je dopušteno, preuređivanjem $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$ da je $p=1$, $q=2$. Tada je

$$\beta_1 = \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \quad \beta_2 = (1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2, \quad \beta_k = \alpha_k \qquad (3 \leqq k \leqq n);$$

$$\begin{aligned}
& n!\,2\left(M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha}) - M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\beta})\right) \\
&= \sum! \prod_{j=3}^{n} a_{i_j}^{\alpha_j} \left(a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} + a_{i_1}^{\alpha_2} a_{i_2}^{\alpha_1} - a_{i_1}^{\beta_1} a_{i_2}^{\beta_2} - a_{i_1}^{\beta_2} a_{i_2}^{\beta_1}\right) \\
&= \sum! \prod_{j=3}^{n} a_{i_j}^{\alpha_j} (a_{i_1} a_{i_2})^{\alpha_2} \left(a_{i_1}^{\alpha_1-\alpha_2} + a_{i_2}^{\alpha_1-\alpha_2} - a_{i_1}^{\lambda(\alpha_1-\alpha_2)} a_{i_2}^{(1-\lambda)(\alpha_1-\alpha_2)}\right. \\
&\quad \left. - a_{i_1}^{(1-\lambda)(\alpha_1-\alpha_2)} a_{i_2}^{\lambda(\alpha_1-\alpha_2)}\right) \\
&= \sum! \prod_{j=3}^{n} a_{i_j}^{\alpha_j} (a_{i_1} a_{i_2})^{\alpha_2} \left(a_{i_1}^{\lambda(\alpha_1-\alpha_2)} - a_{i_2}^{\lambda(\alpha_1-\alpha_2)}\right)\left(a_{i_1}^{(1-\lambda)(\alpha_1-\alpha_2)} - a_{i_2}^{(1-\lambda)(\alpha_1-\alpha_2)}\right) \\
&\leqq 0.
\end{aligned}$$

Kako je slučaj jednakosti jednostavan, ovim je dokaz završen.

PRIMEDBE: 4° Dokaz dela (ii) teoreme 35 daje jedan alternativan dokaz nejednakosti GA i od interesa je da se metod izloži sa svim detaljima. U ovom slučaju, koristeći oznake kao u posledici 36, imamo $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{J}\right)$ i $\frac{1}{n}\boldsymbol{J} = \prod_{k=1}^{n-1} \boldsymbol{S}_k$, gde je $\boldsymbol{S}_k = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{Vmatrix}$ i $\boldsymbol{K}$ je matrica tipa $(k+1)\times(k+1)$ definisana pomoću

$$\boldsymbol{K} = \begin{Vmatrix} \dfrac{n-k}{n-k+1} & \boldsymbol{0} & \dfrac{1}{n-k+1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \dfrac{1}{n-k+1} & & \dfrac{n-k}{n-k+1} \end{Vmatrix}.$$

Očigledno, svako $\boldsymbol{S}_k$ je jednostavno u smislu primedbe I.4.3.7°. Konkretnije neka je $\vec{\alpha}^k = (n-k, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k+1})$ (k i $k+1$ jednakih 1 i 0 respektivno) ($0 \leqq k < n$), tada je

$$\begin{aligned}
A_n(\boldsymbol{a}_n) - G_n(\boldsymbol{a}_n) &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(M_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha}^{(k)}) - M_n(\boldsymbol{a}; \alpha^{(k+1)})\right) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\sum \left(a_{i_1}^{n-k+1} - a_{i_2}^{n-k-1}\right)(a_{i_1} - a_{i_2})\, a_{i_3} \cdots a_{i_{k+2}}\right) \geqq 0
\end{aligned}$$

(ako je $k=0$, izvan zagrade u $\Sigma!$ nema članova).

Posledica 36. (a) *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka,* $\vec{\alpha}$ *i* $\vec{\beta}$ *različite negativne n-torke,* $\vec{\alpha} \prec \vec{\beta}$, *tada je*

$$(89) \qquad A_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha}) \leqq A_n(\boldsymbol{b}; \vec{\beta}),$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

(b) *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka,* $\vec{\alpha}$ *nenegativna n-torka sa najmanje dva elementa različita od nule, tada je*

$$(90) \qquad G_n(\boldsymbol{a}) \leqq A_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha}) \leqq A_n(\boldsymbol{a})$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. (a) Ovo je neposredna posledica teoreme 35 i (86).

(b) ***Prvi dokaz*** (Schur, HLP, p. 50). Neka je $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, $\vec{\gamma} = (1, 0, \ldots, 0)$.

Tada je $\vec{\beta} = \boldsymbol{S}_1 \vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} = \boldsymbol{S}_2 \vec{\gamma}$, gde je

$$\boldsymbol{S}_1 = \frac{1}{n} \boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{S}_2 = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ \vdots & & \\ \alpha_n & \alpha_1 & \alpha_{n-1} \end{matrix} \right\|$$

($\boldsymbol{J}$ je matrica čiji su svi elementi 1) i rezultat je neposredna posledica teoreme 32.

Drugi dokaz. Direktan dokaz nejednakosti (90) dali su Bartoš i Znam [1]. Na osnovu $\boldsymbol{GA}$, za svaku permutaciju $(i_1, \ldots, i_n)$ imamo

$$(91) \qquad \prod_{j=1}^{n} a_{i_j}{}^{\alpha_j} \leqq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{i_j}.$$

Sabirajući (91) po svim permutacijama, dobijamo desnu nejednakcst u (90). Zatim, primenom nejednakosti $\boldsymbol{GA}$ iz (86) i (87) izlazi

$$A_n(\boldsymbol{a}; \vec{\alpha}) \geqq \left(\prod_n ! \prod_{j=1}^{n} a_{i_j}{}^{\alpha_j} \right)^{1/n!} = G_n(\boldsymbol{a}),$$

i to je leva nejednakost u (90). Slučajevi jednakosti se dobijaju iz $\boldsymbol{GA}$.

PRIMEDBE: 5° Prirodno, isključeni slučajevi iz posledice su baš oni za koje je $A_{n,\alpha} = G_n$ ili $A_{n,\alpha} = A_n$.

6° Jedno interesantno proširenje Schurovog rezultata (90) dao je Gel'man [1]. Neka je F_m simetričan polinom od n promenljivih, homogen stepena m i koji ima nenegativne koeficijente. Tada: (α) $f(\boldsymbol{a}) = F_m(\boldsymbol{a}^{1/m})$ je konkavna funkcija; to je upravo nejednakost (III.8). Pored toga f je simetrična i homogena funkcija stepena 1. (β) $g(\boldsymbol{a}) = \log(F(e^{\boldsymbol{a}/m}))$ je konveksna. Ovo je tačka jer je, na osnovu $\boldsymbol{C}$, $f(\sqrt{\boldsymbol{ab}}) \leqq \sqrt{f(\boldsymbol{a})}\sqrt{f(\boldsymbol{b})}$. Tada, zamenjujući $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ sa $e^{\boldsymbol{a}}$ i $e^{\boldsymbol{b}}$ respektivno i uzimajući logaritam leve i desne strane, dobijamo tvrđenje.

Koristeći ove primedbe, Gel'man je dokazao nejednakosti

$$(92) \qquad G_n(\boldsymbol{a}) \leqq \left(\frac{F_m(\boldsymbol{a})}{F_m(\boldsymbol{1})} \right)^{\frac{1}{m}} \leqq M_n^{[m]}(\boldsymbol{a}).$$

Dokaz. Posmatrajmo najpre desnu nejednakost u (92). Neka je $a = b^{1/m}$; tada je

$$F_m(a) = f(b) = f(b_1, \ldots, b_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(b_i, \ldots, b_n, b_1, \ldots, b_{i-1}) \quad \text{(zbog simetrije)}$$

$$\leqq f(A_n(b), \ldots, A_n(b)) \quad \text{(zbog konveksnosti funkcije } f)$$

$$= A_n(b) f(1) \quad \text{(zbog homogenosti funkcije } f),$$

$$= \left(M_n^{[m]}(a)\right)^m F_m(1).$$

Posmatrajmo levu nejednakost u (92). Neka je $a^{b/m}$; tada, kao gore, samo primenjujući (β), imamo

$$F_m(a) = g(b) = g(b_1, \ldots, b_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(b_i, \ldots, b_n, b_1, \ldots, b_{i-1})$$

$$\geqq g(A_n(b), \ldots, G_n(b))$$

$$= \log F_m\left(e^{A_n(b)/m}, \ldots, e^{A_n(b)/m}\right)$$

$$= F_m(1)\, e^{A_n(b)} = F_m(1)\, G_m(a)^m.$$

7° Po analogiji sa (90), Bartoš i Znam [1] su definisali

$$G_n(a; \vec{\alpha}) = \left(\prod_{n} ! \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{i_j}\right)^{\frac{1}{n!}}$$

i dokazali nejednakosti

(93) $$G_n(a) \leqq G_n(a; \vec{\alpha}) \leqq A_n(a).$$

Ova nejednakost je analogna sa (88). Njena leva strana strana sleduje iz (91), ako se pomnože sve ove nejednakosti uzete po svim mogućnim permutacijama. S druge strane je, na osnovu *GA*, $G_n(a; \vec{\alpha}) \leqq \frac{1}{n!} \sum_{n} ! \sum_{j=1}^{n} \alpha_i - a_{i_j} = A_n(a)$, čime je završen dokaz nejednakosti (93). Iz slučaja jednakosti u *GA* neposredno sleduje da su nejednakosti (93) stroge osim ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

8° Isti autori su takođe dali sledeće definicije:

$$G_n^{\alpha}(a) = \left(\prod_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i a_{j+1}\right)^{1/n}, \qquad A_n^{\alpha}(a) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=0}^{n-1} a_{j+1}{}^{\alpha_i},$$

gde je $a_k = a_{k-n}$ za $k > n$. Sličnim postupkom kao u prethodnoj primedbi oni su dokazali da je

(94) $$G_n(a) \leqq A_n^{\alpha}(a), \quad G_n^{\alpha}(a) \leqq A_n(a).$$

Međutim, u ovom slučaju jednakost može da nastupi čak i ako a nije konstantno. Tako, na primer, ako je $a_i = i$ $(1 \leqq i \leqq 4)$, $2\alpha_1 = 2\alpha_2 = 2\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{3}$, tada je $G_4^{\alpha}(a) = A_4^{\alpha}(a) = 2$.

Stavljajući $a_i = i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_i = 0$ $(3 \leqq i \leqq n)$, iz (94) dobijamo

$$\frac{2^{2n}}{n+1} \leqq \binom{2n}{n} \leqq \frac{(2n+2)^n}{(n+1)}.$$

9° Druge izraze, slične onima iz primedbe 7°, ispitivali su Đoković i Mitrović [1]; takođe videti M, p. 284, 3.6.46 i Mijajlović [1], Mitrinović i Đoković [1].

Posledica 37. *Za* $0<p\leqq 1$ *važi*

(95) $\quad M_n(\boldsymbol{a};\ \vec{\beta})\leqq M_n(\boldsymbol{a};\ \vec{\alpha})^p$

ako i samo je $\vec{\beta}\prec p\,\vec{\alpha}$.

Dokaz. Da je uslov potreban, dokazuje se kao u teoremi 35 (i). S druge strane, kako je $\vec{\beta}\prec p\,\vec{\alpha}$, primenjujući teoremu 35 i lemu III.6, imamo

$$M_n(\boldsymbol{a};\ \vec{\beta})\leqq M_n(\boldsymbol{a};\ p\,\vec{\alpha})\leqq M_n(\boldsymbol{a};\ \vec{\alpha})^p.$$

PRIMEDBE: 10° Za $\vec{\beta}=(r,\ 0,\dots,\ 0)$, $\vec{\alpha}=(s,\ 0,\dots,\ 0)$, $p=r/s$ nejednakost (95) se svodi na $(r;\ s)$.
11° Primer u primedbi 10° pokazuje da $\vec{\beta}\prec p\,\vec{\alpha}$ u slučaju $p>1$ je potreban ali nije dovoljan uslov.

Posledica 38. *Neka su* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{p}$ *pozitivne n-torke. Tada*

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^{\beta_i}\right)\leqq\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^{\alpha_i}\right)$$

važi ako i samo ako je $\vec{\beta}\prec\vec{\alpha}$.

Dokaz. Da je uslov potreban, dokazuje se kao u teoremi 35 (i). Ako je, pak, $\vec{\beta}\prec\vec{\alpha}$, na osnovu teoreme I.22 imamo $\vec{\beta}=S\,\vec{\alpha}$ za neku dvostruko stohastičku matricu $\boldsymbol{S}=\|s_{ij}\|$, pa je

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^{\beta_{ji}}=\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^{s_{i_1}\alpha_1+\cdots+s_{i_n}\alpha_n}\leqq\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^{\alpha_j}\right)^{s_{ij}}$$

i rezultat sleduje posle množenja.

Posledica 39. *Ako je* $\boldsymbol{a}$ *pozitivna n-torka,* r $(1\leqq r\leqq n)$ *prirodan broj, tada je*

(96) $\quad P_n^{[r]}(\boldsymbol{a})\leqq Q_n^{[r]}(\boldsymbol{a}),$

sa jednakošću ako i samo ako je $r=1$ *ili* $a_1=\cdots=a_n$.

Dokaz. Neka se A sastoji od nenegativnih n-torki $\vec{\alpha}$ definisanih pomoću $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$, $\alpha_1\geqq\cdots\geqq\alpha_n$, $\alpha_i=0$ $(r+1\leqq i\leqq n)$, α_i ceo množitelj od $\frac{1}{r}$ $(1\leqq i\leqq r)$. Nije teško videti da je tada $Q_n^{[r]}$ r-ta stepena sredina od $A_n(\boldsymbol{a},\vec{\alpha})$ kada $\vec{\alpha}$ prolazi kroz A. Dalje $\vec{\alpha}_0=\left(\frac{1}{r},\dots,\frac{1}{r},\ 0,\dots,\ 0\right)\prec\vec{\alpha}\ (\vec{\alpha}\in A)$, pa koristeći posledicu 36 (a) imamo $A_n(\boldsymbol{a};\ \vec{\alpha}_0)\leqq A_n(\boldsymbol{a};\ \vec{\alpha})$ $(\vec{\alpha}\in A)$. Kako je, prema primedbi 2, $A_n(\boldsymbol{a},\ \vec{\alpha}_0)=P_n^{[r]}(\boldsymbol{a})$, rezultat neposredno sleduje iz teoreme 3.2 (a).

PRIMEDBE: 12° Ovaj rezultat bez dokaza dao je Zappa [1]. Napisan pomoću oznaka iz 5.5 to je, u stvari, $W_n^{[k,\ 1]}(\boldsymbol{a})\leqq W_n^{[k,\ -1]}(\boldsymbol{a})$. Zappa je dao i opštiju nejednakost koristeći sredine izvedene iz $t_n^{[k,\ \sigma]}$, videti primedbu 5.6.2, koja se, ako je σ konstantno i jednako s, svodi na $W_n^{[k,\ s]}(\boldsymbol{a})\leqq W_n^{[k,\ -s]}(\boldsymbol{a})$ $(s>0)$. Međutim i ovi rezultati su navedeni bez dokaza. U slučaju konstantnog σ može se primeniti metod dokaza kao u posledici 39.
13° Generalizacije rezultata o Muirheadovim sredinama dao je Bekišev [1].

BIBLIOGRAFIJA*

ABLJALIMOV, S. B. (АБЛЯЛИМОВ, С. Б.)

1. *Обобщения средних на основе среднего гармонического и среднего геометрического.* Математика и механика **2**, № **2** (1967), 53—63.

ACZÉL, J.

1. *The notion of mean values.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **19**, № **23** (1947), 83—86.
2. *A generalisation of the notion of convex functions.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **19**, № **24** (1947), 87—90.
3. *On mean values and operations defined for two variables.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **20**, № **10** (1948), 37—40.
4. *On mean values.* Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 392—400.
5. *Sur une équation fonctionnelle.* Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. Math. **2** (1948), 257—262.
6. *Un problème de M. L. Fejér sur la construction de Leibniz.* Bull. Sci. Math. **(2) 72** (1948), 35—45.
7. *Über eine Klasse von Funktionalgleichungen.* Comment. Math. Helv. **21** (1948), 247—252.
8. *Sur les opérations définies pour nombres réels.* Bull. Soc. Math. France **76** (1949), 59—64.
9. *Inégalités.* Gaz. Mat. (Lisboa) № **39** (1948), 5—7, № **40** (1949), 5—9, № **41—42** (1949), 4—11, № **43** (1950), 10.
10. *On some sequences defined by recurrence.* Acta Sci. Math. (Szeged) **13** (1949), 136—139.
11. *Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen.* Acta Sci. Math. (Szeged) **13** (1949), 179—189.
12. *New proof and extension of St. Fenyö's theorem on mean values of functions.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **22**, № **1** (1949), 1—4.
13. *Über einparametrige Transformationen.* Publ. Math. Debrecen **1** (1949), 243—247.
14. *On quasi-linear functional operation.* Publ. Math. Debrecen **1** (1949), 248—250.
15. *Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen.* Acta Sci. Math. (Szeged) **12** (A) (1950), 73—80.
16. *Some remarks on reccurent sequences.* Nieuw Arch. Wisk. **(2) 23** (1950), 144—149.
17. *A középértékek elméletéhez.* Acta Univ. Debrecen **1** (1954), 117—135.
18. *О теории средних.* Colloq. Math. **4** (1956), 33—55.
19. *Verallgemeinerte Addition von Dichten.* Publ. Math. Debrecen **7** (1960), 10—15.
20. *Miszellen über Funktionalgleichungen* II. Math. Nachr. **23** (1961), 39—50.
21. *Lectures on functional equations and their applications.* New York-London 1966.

ACZÉL, J. and Á. CSÁSZÁR

1. 79. *problem.* Mat. Lapok **8** (1957), 141—142.

* Skraćenice časopisa date su latinicom prema referativnom časopisu Mathematical Reviews koji izlazi od 1940. Za neke od časopisa čiji je naslov na ruskom jeziku skraćenica je na istom jeziku.

Naslovi članaka su, po pravilu, na jeziku kojim je članak napisan.

Za članke objavljene pre 1940 godine skraćenice su prema referativnim časopisima Zentralblat für Mathematik ili Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

ACZÉL, J. and Z. DARÓCZY

1. *Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind.* Publ. Math. Debrecen **10** (1963), 171—190.

ACZÉL, J. and S. FENYÖ

1. *Über die Theorie der Mittelwerte.* Acta Sci. Math. (Szeged) **11** (1946), 239—245.
2. *On fields of forces in which centres of gravity can be defined.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **1** (1948), 53—60.

ACZÉL, J., S. FENYÖ and J. HORVÁTH

1. *Sur certaines classes de fonctionnelles.* Portugal. Math. **8** (1949), 1—11.

ADAM, A.

1. *Semiotische und verbandstheoretische Grundzüge einer elementaren Statistik.* Metrika **8** (1964), 87—128.

AIYAR, V. R.

1. *On the arithmetic and geometric means inequality.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **25** (1906/7), 46—47.

AKHIEZER, N. I. and I. M. GLAZMAN

1. *Theory of linear operators in Hilbert space,* vol. 1. New York 1961.

ALLASIA, G.

1. *Su una classe di algoritmi iterativi bidimensionali.* Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat. **29** (1969/70), 269—295.
2. *Relazioni tra una classe di algoritmi iterativi bidimensionali ed una di equazioni differenziali.* Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat. **30** (1970/71), 187—207.
3. *Su alcuni algoritmi iterativi bidimensionali.* Ist. Calc. Torino **1** (1972), 1—18.
4. *Alcune generalizzazioni dell'algoritmo della media aritmetico-armonica.* Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Math. **31** (1971/72—1972/73) 197—221.

ALLASIA, G. and O. SAPELLI:

1. *Medie espresse mediante rapporti di momenti.* Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Mat. **32** (1973/74), 287—302 (1975).

AMIR-MOÉZ, A. R.

1. *Problem* 2. Delta **3, № 4** (1973), 39—40.

ANDREOLI, G.

1. *Aspetto gruppale e funzionale delle medie.* Giorn. Mat. Battaglini **5 (85)** (1957), 12—30.
2. *Medie e loro processi iterativi.* Giorn. Mat. Battaglini **5 (85)** (1957), 52—79.

ANGELESCU, A.

1. *Asupra unor medii.* Gaz. Mat. Ser. A, **37** (1932), 244—247.

ANGHELUTA, TH.

1. *O clasa de neegalitati.* Stiinţa şi Progres **10** (1942), 76—77.

ASIMOV, D.

1. *Geometric means in the complex plane.* Tech. Eng. News **1966,** 34—35.

AUMANN, G.

1. *Konvexe Funktionen und die Induktion bei Ungleichungen.* Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. **1933**, 403—415.
2. *Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente.* I. Math. Ann. **109** (1933), 235—253.
3. *Grundlegung der Theorie der analytischen Mittelwerte.* Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. **1934,** 45—81.
4. *Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente.* II (*Analytische Mittelwerte*). Math. Ann. **111** (1935), 713—730.
5. *Über die Struktur der analytischen Konvexitäten.* Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. **1935**, 71—80.

6. *Ein geometrische Bemerkung zum arithmetischen und harmonischen Mittel.* Unterrichtsbl. **41** (1935), 88.
7. *Über die stetigen konvexen und die bikonvexen Funktionen.* Math. Ann. **111** (1935), 197—208.
8. *Über den Mischalgorithmus bei analytischen Mittelwerten.* Math. Z. **39** (1935), 625—629.
9. *Über einen elementaren Zusammenhang zwischen Mittelwerten, Streckenrechnung und Kegelschnitten.* Tôhoku Math. J. **42** (1936), 32—37.
10. *Vollkommene Funktionalmittel und gewisse Kegelschnitteigenschaften.* J. Reine Angew. Math. **176** (1937), 49—55.

DAS BAGCHI, HARI KANTISH and CHANDRA MAITY

1. *Statical note on certain algebraic inequalities.* Math. Student **18** (1950), 143—145.

BAIDAFF, B. I.

1. *Una demonstración de la desigualdad generalizada de Cauchy-Schwarz y algunas otras desigualdades.* Bol. Mat. (Buenos Aires) **11** (1938), 88—91.
2. *Una demonstración de la desigualdad de Cauchy.* Bol. Mat. (Buenos Aires) **11** (1938), 91—93.

BAIDAFF, B. I. and J. BARRAL SOUTO

1. *Cinco valores interesantes de una media general.* Bol. Mat. (Buenos Aires) **7** (1934), 102—104.
2. *Estudio de la derivada de una media general.* Bol. Mat. (Buenos Aires) **8** (1935), 81—83.

BAJRAKTAREVIĆ, M.

1. *Sur le théorème de la moyenne généralisée.* Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **3** (1951), 15—23.
2. *Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes.* Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske, Ser. II, **13** (1958), 243—248.
3. *Über die Vergleichbarkeit der mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte.* Stud. Sci. Math. Hungar. **4** (1969), 3—8.

BALLATINE, J. P.

1. *On a certain functional condition.* Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1926), 153—155.

BARBENSI, G.

1. *Cenno di una trattazione monografica delle medie statistiche.* Atti della XXVII Riunione della Societa Italiana per il progresso delle Scienze. Bologna **1938**.

BARNA, B.

1. *Ein Limessatz aus der Theorie des arithmetisch-geometrisch Mittels.* J. Reine Angew. Math. **172** (1934), 86—88.
2. *Zur elementaren Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels.* J. Reine Angew. Math. **178** (1938), 129—134.

BARNES, D. C.

1. *Some complements of Hölder's inequality.* J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 82—87.

BARTON, A.

1. *An inequality.* Math. Gaz. **52** (1968), 383—385.

BARTOŠ, P. and Š. ZNAM

1. *O symmetrických a cyklických priemeroch kladných čysel.* Mat. Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied. **16** (1966), 291—298.

BECK, E.

1. *Komplementäre Ungleichungen bei vergleichbaren Mittelwerten.* Monatsh. Math. **73** (1969), 289—308.
2. *Über die Differenz zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von n Zahlen.* Math.-Phys. Semesterber. **16** (1969), 117—123.
3. *Über Ungleichungen von der Form* $f(M_\Phi(x, \alpha), M_\Psi(y, \alpha)) \geqq M_\chi(f(x, y), \alpha)$. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **320** — № **328** (1970), 1—14.
4. *Über komplementäre Ungleichungen mit drei Mittelwerten. I.* Monatsh. Math. **80** (1975), 13—29.
5. *Über komplementäre Ungleichungen mit drei Mittelwerten. II.* Monatsh. Math. **80** (1975), 161—170.

BECKENBACH, E. F.

1. *Convexity properties of generalized mean value functions.* Ann. Math. Statist. **13** (1942), 88—90.
2. *An inequality of Jensen.* Amer. Math. Monthly **53** (1946), 501—505.
3. *A class of mean value functions.* Amer. Math. Monthly **57** (1950), 1—6.
4. *On the inequality of Kantorovich.* Amer. Math. Monthly **71** (1964), 606—619.
5. *On Hölder's inequality.* J. Math. Anal. Appl. **15** (1966), 21—29.

BECKENBACH, E. F. and R. BELLMAN

1. *Inequalities.* Berlin-Heidelberg-New York 1961, 1965 and 1971.

BEESACK, P. R.

1. *On weighted means of order r.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **381**—№ **409** (1972), 21—24.
2. *On Bessel's inequality and Ostrowski's.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **498**—№ **541** (1975), 69—71.

BEETLE, R. D.

1. *On the complete indepedence of Schimmack's postulates for the arithmetic mean.* Math. Ann. **76** (1915), 444—446.

BEKE, E.

1. *Eine Mittelwert.* Z. Math. Unterricht. **58** (1927), 325—326.

BEKIŠEV, G. A. (БЕКИШЕВ, Г. А.)

1. *Неравенства для симметрических средних.* Mat. Zametki **3** (1968), 133—144.

BELLMAN, R.

1. *The symmetric mean.* Math. Mirror Brooklyn College **9** (1941), 5—6.
2. *Inequalities.* Math. Mag. **28** (1954), 21—26.
3. *On the arithmetic-geometric mean inequality.* Math. Student **24** (1956/57), 233—234.
4. *Some elementary inequalities.* U.S.A.F. Project, Rand, D-484, The Rand Corporation. Santa Monica, California.
5. *Dynamic Programming.* Princeton 1957.
6. *On a general method in the theory of inequalities.* Rev. Ci. (Lima) **59** (1958), 21—33.

BEMPORAD, G.

1. *Sul principio della media aritmetica.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. **(6) 3** (1926), 87—91.
2. *Il significato del principio della media aritmetica.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. **(6) 11** (1930), 789—794.

BENEDETTI, C.

1. *Di un confrontofra poteri di acquisto di salari e considerazioni metodologiche relative agli indici circolari e non circolari.* Metron **17**, № **1—2** (1953), 151—195.
2. *Del massimo valore dell'indice di oscillazione in una successione di termini al variare in tutti i modi possibili l'ordine di questi.* Metron **17**, № **3—4** (1955), 53—60.
3. *Istituzioni di statistica.* Roma 1976, 552 pp.

BERKOLAIKO, S. (БЕРКОЛАЙКО, С.)

1. *Задача 66.* Mat. v škole **1963**, № **4**, 86 i **1964**, № **4**, 77—78.

BERTILLON

1. *La théorie des moyennes.* J. Soc. Paris 1876, № **10—11.**

BERWALD, L.

1. *Verallgemeinerung eines Mittelwertssatzes von J. Favard für positive konkave Funktionen.* Acta Math. **79** (1947), 17—37.

BESSO, D.

1. *Teoremi elementari sui massimi e minimi.* Annuari Ist. Technico Roma **1879**, 7—24.

BIENAYMÉ, F.

1. Société philomatque de Paris, Extraits des Procès-Verbaux des séances pendant l'année 1840, Séance du 13 juin **1840**, 68—69.

BIGNARDI, F.

1. *Medie condizionate e funzioni di appagamento.* Statistica (Bologna) (1950).

BIOCHE, CH.

1. *Sur les minima de sommes de termes positifs dont le produit est constant.* Nouv. Ann. Math. (3) **7** (1887), 287—288.

BISCONSINI, G.

1. *Una osservazione sul principio di Gauss.* Period. Mat. (3) **6** (1909), 219—222.

BLACKWELL, D. and M. A. GIRSCHIK

1. *Theory of games and statistical decisions.* New York 1954.

BLANUŠA, D.

1. *Quelques identités algébriques concernant les moyennes arithmétiques et géométriques.* Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske Ser. II, **11** (1956), 17—22.

BOHR, H.

1. *The arithmetic and geometric means.* J. London Math. Soc. **10** (1935), 114.

BOIARSKII, A. A. (БОЯРСКИЙ, Я. А.)

1. *Средняя*, Вестник Статистики **2** (1929), 32—66.

BONFERRONI, C. E.

1. *La media esponenziale in matematica finanziaria.* Annuario R. Ist. Sup. Sc. Econ. Comm. Bari **1923—1924**, 1—14.
2. *Della vita matematica come media esponenziale.* Annuario R. Ist. Sup. Sc. Econ. Comm. Bari **1924—1925**, 3—16.
3. *Sulle medie di potenze.* Giorn. Economisti Rivista Statistica **66** (1926), 292—296.
4. *Sulle medie dedotte da funzioni concave.* Giorn. Mat. Finanz. **1** (1927), 13—24.
5. *Sulle medie multiple di potenze.* Boll. Un. Mat. Ital. (3) **5** (1950), 267—270.

BONNESEN, T.

1. *Inégalités entre des moyennes arithmétiques.* C. R. Acad. Sci. Paris **190** (1930), 714—716 and 1266.
2. *En bemaerkning on konvekse funktioner.* Math. Tidskrift (B) **1928**, 18—20.

BORCHARDT, C. W.

1. *Über das arithmetisch-geometrische Mittel.* J. Reine Angew. Math. **58** (1861), 127—134.
2. *Uber das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen.* Monathsber. Königl. Akad. Wiss. **1876**, 611—621.
3. *Sur la moyenne aritmético-géométrique entre quatre éléments.* C. R. Acad. Sci. Paris **84** (1877), 180.
4. *Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen.* Abh. Königl. Akad. Wiss. Berlin **1878**, 375—431.

BOSS, W.

1. *Axiomatische Charakterisierung des arithmetischen Mittels.* Math.-Phys Semesterber. **18** (1971), 45—52.
2. *Zur Axiomatik des arithmetischen Mittels.* Konstanz 1972.

3. *Mittelwertstrukturen.* Math. Ann. **198** (1972), 317—333.
4. *Die Einbettung von Mittelwertstrukturen in Q-Vektorräume.* Math Z. **128** (1972), 207—216.
5. *Die Charakterisirung einer Mittelwertstruktur durch deren zweistellige Mittelwertfunktion.* Arch. Math. **24** (1973), 397—401.

BOUNIAKOWSKY, V. (БУЯНКОВСКИЙ, В. Я.)

1. *Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies.* Mem. Acad. Imp. Sci. St. Pétersbourg (7) **1**, № **9** (1859), 1—18.

BOUTROUX, M.

1. *Démonstration d'un théorème de M. Cauchy.* Nouv. Ann. Math. **1** (1842), 368—370.

BOURBAKI, N.

1. *Fonctions d'une variable réelle.* Paris 1958.

BRIGGS, W. and G. H. BRYAN

1. *The tutorial algebra*, 4th edition. London 1928.

BROGGI, U.

1. *Sur le principe de la moyenne arithmétique.* Enseignement Math. **11** (1909), 14—17.

BROMWICH, T. J. I'a.

1. *Introduction to the theory of infinite series.* London 1965.

BRONOWSKI, F.

1. *An inequality relating means.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **40** (1944), 253—255.

BUCH, K. RANDER

1. *Saeting om det geometriske og det aritmetiske middeltal.* Mat. Tidsskrift A **1940,** 47—48.

BULLEN, P. S.

1. *Some inequalities for symmetric means.* Pacific J. Math **15** (1965), 47—54.
2. *Some more inequalities involving the arithmetic and geometric means.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **181**—№ **196** (1967), 61—66.
3. *On some inequalities of Mitrinović and Vasić.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **210**—№ **228** (1968), 49—54.
4. *On an inequality of Tchakaloff.* Publ. Inst. Math. (Belgrade) **9 (23)** (1969), 69—74.
5. *An inequality due to Henrici.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **247**—№ **273** (1969), 21—26.
6. *An inequality of Redheffer.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **274**—№ **301** (1969), 25—26.
7. *On some theorems of Popoviciu.* Bull. Inst. Pol. Iaşi Sect. I **15 (19)** (1969), 45—58.
8. *The Steffensen inequality.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser, Mat. Fiz. № **320**—№ **328** (1970), 59—63.
9. *The inequality of Rado and Popoviciu.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **330**—№ **337** (1970), 23—33.
10. *Rado's inequality.* Aequationes Math. **6** (1971), 149—156.
11. *A criterion for n-convexity.* Pacific J. Math. **36** (1971), 81—98.
12. *A note on a recent paper of P.M. Vasić and J.D. Kečkić.* Math. Balkanica **2** (1972), 1—2.
13. *On a theorem of L. Losonczi.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **412**—№ **460** (1973), 105—108.
14. *An inequality of N. Levinson.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **412**—№ **460** (1973), 109—112.
15. *An application of Rado's inequality.* Bull. Inst. Pol. Iaşi, Sect. I, **20** (24) (1974).
16. *On some forms of Whiteley.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **498**—№ **541** (1975), 59—64.

BULLEN, P. S. and M. MARCUS

1. *Symmetric means and matrix inequalities.* Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 286—289.

BULLEN, P. S., P. M. VASIĆ and LJ. STANKOVIĆ

1. *A problem of A. Oppenheim.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **412**— № **460** (1973), 21—30.

BÜLTZINGSLÖVEN, W. v.

1. *Iterative algebraische Algorithmen.* Mitt. Math. Sem. Giessen **23** (1933), 72 pp.

CALLEBAUT, D. G.

1. *Generalisations of the Cauchy-Schwartz inequality.* J. Math. Anal. Appl. **12** (1965), 491—494.

CAMPBELL, G.

1. *A method for determining the number of impossible roots in adfected aequationes.* Philos. Trans. R. Soc. London **35** (1728), 515—531.

CARGO, G. T.

1. *Comparable means and generalized convexity.* J. Math. Anal. Appl. **12** (1965), 387—392.
2. *An elementary unified treatment of complementary inequalities.* S **1**, 39—63.

CARGO, G. T. and O. SHISHA

1. *Bounds on the ratio of means.* J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, **66B** (1962), 169—170.
2. *A metric space connected with generalized means.* J. Approx. Theory **2** (1969), 207—222 and S **2**, 163—178.

CARLSON, B. C.

1. *A hypergeometric mean value.* Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 759—766.
2. *Some inequalities for hypergeometric functions.* Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 32—39.
3. *Inequalities for a symmetric elliptic integral.* Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 698—703.
4. *An inequality for mixed arithmetic and geometric means.* Problem 70—10. SIAM Rev. **12** (1970), 287—288.
5. *Algorithms involving arithmetic and geometric means.* Amer. Math. Monthly **78** (1971), 496—505.
6. *An algorithm for computing logarithmus and arctangents.* Math. Comp. **26** (1972), 543—549.
7. *The logaritmic mean.* Amer. Math. Monthly **79** (1972), 615—618.

CARLSON, B. C., R. K. MEANY and S. A. NELSON

1. *An inequality of mixed arithmetic and geometric means.* SIAM Rev. **13** (1971), 253—255.
2. *Mixed arithmetic and geometric means.* Pacific J. Math. **38** (1971), 343—349.

CARLSON, B. C. and M. D. TOBEY

1. *A property of the hypergeometric mean value.* Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 255—262.

CARR, A. J.

1. *Proof of the theorem that the AM of n quantities exceeds their GM.* Math. Gaz. **13** (1926/27), 244—245.

CASHVEL, E. D. and C. J. EVERETT

1. *The means of order t, and the laws of thermodynamics.* Amer. Math. Monthly **74** (1967), 271—274.
2. *A general mean value theorem.* Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 1135—1138.
3. *The mean of a function $\chi(v)$ relative to a function $w(\xi, v)$.* Amer. Math. Monthly **76** (1969), 252—260.

CASTELLANO, V.

1. *Osservazioni su alcune medie continue.* Statistica (Bologna) **8** (1948), № 1, 3—6.
2. *Studio delle medie ferme basali espresse dalla formula compreasiva del Gini.* Atti della X Riunione della Soc. Ital. di Statistica. Roma 1950.

CAUCHY, A. L.

1. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, Ire partie: Analyse algébrique*, Paris 1821; ili : Oeuvres complètes (**2**) **3**, Paris 1897, pp. 368—369.
2. *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* t. **4** (1847). Paris: *Mémoire Sur quelques théorémes concernant les moyennes arithmétiques et géométriques, les progresions, etc.* pp. 201—212; ili Oeuvres complètes (**2**) **14** (1938), 227—240.

CHAJOTH, Z.

1. *Heronische Näherungsbrüche.* Jber. Deutsch. Math.-Verein. **42** (1932), 130—135.

CHAN, F., D. GOLDBERG and S. GONEK

1. *On extensions of an inequality of Fan.* Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974), 202—207.

CHIMENTI, A.

1. *Disuguaglianze tra medie associative.* Publ. Fac. Sci. Ing. Univ. Trieste, Ser. B, **7**, № **19** (1947), 39—47.

CHISINI, O.

1. *Sul concetto di media.* Period. Mat. **(4) 9** (1929), 106—116.
2. *Numeros indice et medias.* Schola et Vita **5** (1930), 181—190.
3. *Alcuni teoremi sulle medie.* Scriti matematici in onore di Filippo Sibiriani, Bologna 1957, pp. 81—86.

CHONG, KONG-MING

1. *A generalisation of the arithmetic and geometric mean inequality.* Amer. Math. Monthly **83** (1976), 369.
2. *The arithmetic mean-geometric mean inequality: a new proof.* Math. Mag. **49** (1976), 87—88.

CHRYSTAL, G.

1. *Algebra* II. 2nd ed. London 1900.

CIORĂNESCU, N.

1. *Asupra mediei aritmetico-geometrice.* Bul. Şed. Soc. Rom. Şt. Bucureşti I (1936), 1, p. 17.
2. *L'itération des fonctions de moyenne.* Bull. Math. Soc. Roumaine Sci. **38**, № **2** (1937), 71—74.

CISBANI, R.

1. *Contributi alla teoria delle medie* I. Metron **13**, № **2** (1938), 23—59.
2. *Contributi alla teoria delle medie* II. Metron **13**, № **3** (1938), 3—20.

CLIMESCU, A.

1. *O clasa de inegalităti.* Bul. Inst. Politehn. Iaşi. **4 (8)**, № **3—4** (1958), 1—4.

COOPER, R.

1. *Notes on certain inequalities* I; *generalisation of an inequality of W. H. Young.* J. London Math. Soc. **2** (1927), 17—21.
2. *Notes on certain inequalities* II. J. London Math. Soc. **2** (1927), 159—163.
3. *The converse of Cauchy-Hölder inequality and the solution of the inequality* $g(x+y) \leqq g(x)g(y)$. Proc. London Math. Soc. **2 (26)** (1927), 415—432.
4. *Note on the Cauchy-Hölder inequality.* J. London Math. Soc. **3** (1928), 8—9.

CRAIU, V.

1. *Valori medii.* Gaz. Mat. Ser. A, **73** (1968), 258—267.

CRAWFORD, G. E.

1. *Elementary proof that the arithmetic mean of any number of positive quantities is greater than the geometric mean.* Proc. Edinbourgh Math. Soc. **18** (1899/1900), 2—4.

CSÁSZÁR, K.

1. *A közgazdasági számvetés tudománya.* Budapest 1892.

CZUBER, E.

1. *Theorie der Beobachtungsfehler.* Leipzig 1891.

ČAKALOV, L.

1. *Sur quelques inégalités entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique.* God. Sofia Univ. Fac. Phys.-Mat. **42** (1946), 39—42; takođe videti: Publ. Inst. Math. (Belgrade) **3** (**17**) (1963), 43—46.

ČEBYŠEV, P. L. (ЧЕБЫШЕВ, П. Л.)

1. *Об одном ряде, доставляющем предельные величины интегралов при разложении подинтегральной функции на множители.* Приложении к 57 тому Записок Имп. Акад. Наук, № **4** (1883); Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. Москва -Ленинград 1948, стр. 157—169.

DANSKIN, J. M.

1. *Dresher's inequality.* Amer. Math. Monthly **59** (1952), 687—688.

DARBOUX, G.

1. *Sur le maximum du produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante.* Bull. Sci. Math. (**2**) **11** (1887), 149—151.
2. *Note relative à l'article précédent.* Bull. Sci. Math. (**2**) **26** (1902), 183—184.

DARÓCZY, Z.

1. *Einige Ungleichungen über die mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte.* Monatsh. Math. **68** (1964), 102—112.
2. *Über Mittelwerte und Entropien vollständiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. **15** (1964), 203—210.
3. *Über eine Verallgemeinerung des Entropiebegriffs der masstreunen Abbildungen.* Publ. Math. Debrecen **12** (1965), 117—125.
4. *A general inequality for means.* Aequationes Math. **7** (1971), 16—21.

DARÓCZY, Z. and L. LOSONCZI

1. *Über den Vergleich von Mittelwerten.* Publ. Math. Debrecen **17** (1970), 289—297.

DAVENPORT, H. and G. PÓLYA

1. *On the product of two power series.* Canadian J. Math. **1** (1949), 1—5.

DÁVID, L.

1. *Theorie der Gauss'schen verallgemeinerten und speziellen arithmetisch-geometrischen Mittels.* Math.-Naturw. Berichte aus Ungarn **25** (1907), 153—177.
2. *Sur une application des fonctions modulaires à la théorie de la moyenne arithmético-géométrique.* Math.-Naturw. Berichte aus Ungarn **27** (1909), 164—171.
3. *Zur Gauss'schen Theorie der Modulfunktion.* Rend. Circ. Math. Palermo **35** (1913), 82—89.
4. *Arithmetisch-geometrischen Mittel und Modulfunktionen.* J. Reine Angew. Math. **152** (1928), 154—170.

DAWSON, D. F.

1. *Variation properties of sequences.* Mat. Vesnik **21** (1969), 437—441.

DAYKIN, D. E. and C. J. ELIEZER

1. *Generalizations of the AM and GM inequality.* Math. Mag. **40** (1967), 247—250.

2. *Generalisations and applications of Cauchy-Schwarz inequalities.* Quart. J. Math. Oxford **18** (1967), 357—360.
3. *Generalisations of Hölder's and Minkowski's inequalities.* Proc. Cambridge Phil. Soc. **64** (1968), 1023—1027.

DEHN, M.

1. *Bögen und Sehnen in Kreis, Paare von Grössensystemen.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **13** (1940), 103—106.

DEVIDÉ, V.

1. *Ein Vergleich des arithmetischen und geometrischen Mittels.* Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske Ser. II, **11** (1956), 23—24.

DIANANDA, P. H.

1. *A simple proof of the arithmetic mean, geometric mean inequality.* Amer. Math. Monthly **67** (1960), 1007.
2. *On some inequalities of H. Kober.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **59** (1963), 341—346.
3. Math. Rev. **36** (1969), 538.
4. *On limit problems associated with some inequalities.* Glasgow Math. J. **14** (1973), 123—127.

DIAZ, J. B., A. J. GOLDMAN and F. T. METCALF

1. *Equivalence of certain inequalities complementary to those of Cauchy-Schwarz and Hölder.* J. Res. Nat. Bureau Standards, Sect. B, **68B** (1964), 147—149.

DIAZ, J. B. and F. T. METCALF

1. *Stronger forms of a class of inequalities of G. Pólya-G. Szegö and L. V. Kantorovich.* Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 415—418.
2. *Inequalities complementary to Cauchy's inequality for sum of real numbers.* S **1**, pp. 73—77.

DIEULEFAIT, C. E.

1. *Sobre los valores medios.* An. Soc. Cient. Argentina **110** (1929), 387—392.

DINGHAS, A.

1. *Über eine algebraische Identität zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven Zahlen.* Math. Z. **49** (1943/44), 563—564.
2. *Some identities between arithmetic means and the other elementary symmetric functions of n numbers.* Math. Ann. **120** (1948), 154—157.
3. *Zur Abschätzung arithmetischer Mittel reeller Zahlen durch Differenzenprodukte derselben.* Rend. Circ. Mat. Palermo **(2) 2** (1953), 177—202.
4. *Zum Beweis der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n Zahlen i* Math. Phys. Semester **9** (1962/3), 157—163.
5. *Zur Abschätzung der Differenz zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von n positiven Zahlen.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **37** (1964), 22—27.
6. *Über eine Integralidentität und ihre Anwendung auf Fragen der Analysis.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **39** (1966), 46—52.
7. *Superadditive Funktionale, Identitäten und Ungleichungen der elementaren Analysis.* Math. Annalen **178** (1968), 315—334.

DOČEV, K.

1. *Problem* 95. Fiz. Mat. Spisanie (Sofija) **9 (42)**, № **1** (1966), 54—55.

DODD, E. L.

1. *Some elementary means and their properties.* Colorado College Publ. **21** (1936), 85—89.
2. *The chief characteristic of statistical means.* Colorado College Publ. **21** (1936), 89—92.
3. *Internal and external means arising from the scaling of frequency functions.* Ann. Math. Stat. **8** (1937), 12—20.

4. *The substitutive mean and certain subclasses of this general mean.* Ann. Math. Stat. **11** (1940), 163—176.
5. *Some generalisation of the logarithmic mean and of similar means of two variates which became indeterminate when the two variates are equal.* Ann. Math. Stat. **12** (1941), 422—428.

DÖRRIE, H.

1. *Über einige Anwendungen des Satzes vom arithmetischen und geometrischen Mittel.* Z. Math. Naturw. Unterr. **52** (1921), 103—108.
2. *Triumph der Mathematik.* Breslau 1933.

DOSTOR, G.

1. *Limite de l'erreur que l'on commet, en substituant, dans un calcul, la moyenne arithmétique de deux nombres à leur moyenne géométrique.* Archiv Math. Phys. **63** (1879), 220.

DOUGALL, J.

1. *Quantitative proof of certain algebraic inequalities.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **24** (1905/6), 61—77.

DRESHER, M.

1. *Moment spaces and inequalities.* Duke Math. J. **20** (1953), 261—271.

DUNKEL, O.

1. *Sufficient conditions for imaginary roots of algebraic equations.* Ann. Math. **(2) 10** (1908/9), 46—54.
2. *Generalized geometric means and algebraic equations.* Ann. Math. **(2) 11** (1909/10), 21—32.

DURAND, A.

1. *Sur un théorème relatif à des moyennes.* Bull. Sci. Math. **(2) 26** (1902), 181—183.

DZYADUK, V. K. (Дзядык, В. К)

1. *Два доказательства неравенства Коши между арифметическим и геометрическим средними системы неотрицательных чисел.* Ukrain. Mat. Ž. **18** (1966), 115—116.

EAMES, W.

1. *An inductive proof of Cauchy's inequality.* Math. Gaz. **48** (1964), 83—84.

EBEN, C. D. and J. R. FERRON

1. *A conjugate inequality for general means with applications to extremum problems.* AIChE J. **1968,** 32—37.

ECKMANN, B.

1. *Räume mit Mittelbildungen.* Comment. Math. Helv. **28** (1954), 329—340.

ECKMANN, B., T. GANEA and P. J. HILTON

1. *Generalized means.* Studii in Math. Anal. and Rel. Top. 1962, 82—92.

EHLERS, G.

1. *Colloquium on linear equations* (Editor: W. Hayes). O. N. R. Techn. Rep. ONRL 1954, 35—54.

ENCKE, J. F.

1. *Über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate.* Abh. Berlin Akad. Wiss. **1831,** 6—13.

ERCOLANO, J. L.

1. *Geometric interpretations on some classical inequalities.* Math. Mag. **45** (1972), 226.

EVERETT, C. J. and N. METROPOLIS

1. *A generalization of the Gauss limit for iterated means.* Advances in Math. **7** (1971), 297—300.

EVERITT, W. N.

1. *On the Hölder inequality.* J. London. Math. Soc. **36** (1961), 145—158.
2. *On an inequality for the generalized arithmetic and geometric means.* Amer. Math. Monthly **70** (1963), 251—255.
3. *On a limit problem associated with the arithmetic—geometric mean inequality.* J. London Math. Soc. **42** (1967), 712—718.
4. *Corrigendum: On a limit problem associated with the arithmetic-geometric mean inequality.* J. London Math. Soc. **(2) 1** (1969), 428—430.

FAN, K. and J. TODD

1. *A determinantal inequality.* J. London. Math. Soc. **30** (1955), 58—64.

FARAGÓ, T.

1. *Über das arithmetisch-geometrische Mittel.* Publ. Math. Debrecen **2** (1951), 150—156.

FAVARD, J.

1. *Sur les valeurs moyennes.* Bull. Sci. Math. **(2) 57** (1933), 54—64.

FEJÉR, L.

1. *Sur les fonctions bornées et intégrables.* C. R. Acad. Sci. Paris **131** (1900), 984—987.

FENYÖ, S.

1. *A középértkek elméletéröl* (Diss.). Budapest 1945.
2. *The inversion of an algorithm.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **19** (1947), 91—94.
3. *Über die Theorie der Mittelwerte.* Acta Univ. Szeged. Acta Sci. Math. **11** (1948), 239—245.
4. *The notion of mean-values of functions.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **21, № 38** (1949), 168—171.
5. *Über den Mischalgorithmus der Mittelwerte.* Acta Sci. Math. (Szeged) **13** (1949), 36—42.

DE FINETTI, B.

1. *Sul concetto di media.* Giorn. Ist. Ital. Attuari **2** (1931), 369—396.

FINK, A. M. and M. JODEIT

1. *A generalization of the arithmetic—geometric means inequality.* Proc. Amer. Math. Soc. **61** (1976), 255—261.

FLETCHER, T. J.

1. *Doing without calculus.* Math. Gaz. **55** (1971), 4—17.

FLOR, P.

1. *Über eine Ungleichung von S. S. Wagner.* Elem. Math. **20** (1965), 136.

FORDER, H. G.

1. *Two inequalities.* Math. Gaz. **16** (1932), 267—268.

FRAME, J. S.

1. *Finding extremes by algebraic means.* Pentagon **1948,** 5 pp.

FRICKE, R.

1. *Gauss' Entwicklungen über das arithmetisch-geometrische Mittel.* Encyklop. d. math. Wissensch. **II 2.** Leipzig 1901—1921, pp. 222—225.

FRISBY, E.

1. *On the arithmetico-geometrical mean.* The Analyst (J. Pure Appl. Math.) De Moines. Iowa **6** (1879), 10—14.

FROBENIUS, G.

1. *Über die Leibnitzsche Reihe.* J. Reine Angew. Math. **89** (1880), 262—264.

FUCHS, L.

1. *On mean systems.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **1** (1950), 303—320.

FUJISAWA, R.

1. *Algebraic means.* Imp. Acad. Proc. Tôkyo **1** (1918), 159—170.

FURLAN, V.

1. *Sur une formule générale de la moyenne.* Metron **7,** № **2** (1933), 29—51.

GAGAN, J.

1. *Geometric proof of an inequality.* Math. Gaz. **38** (1954), 280—281.

GAINES, F.

1. *On the arithmetic mean-geometric mean inequality.* Amer. Math. Monthly **74** (1967), 305—306.

GALVANI, L.

1. *Dei limiti a cui tendono alcune medie.* Boll. Un. Mat. Ital. **6** (1927), 173—179.

GATTESCHI, L.

1. *Su una generalizzazione dell'algoritmo iterative del Borchardt.* Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **4***a* **(4)** (1966), 1—18.
2. *Procedimenti iterativi per il calcolo numerico di due prodotti infiniti.* Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **29** (1969—70), 187—201.

GATTI, S.

1. *Sul massimo di un indice di anormalita.* Metron **18,** № **1—2** (1956/7), 181—187.
2. *Su un limite a cui tendono alcune medie.* Metron **18,** №. **1—2** (1956), 107—112.
3. *Sui limiti di alcune medie nel caso di successioni a più limiti.* Metron 18, №. **3—4** (1957). 136—145.

GAUSS, K.

1. *Werke*, t. **3** (1876), 357—480; t. **10** (1917), 219. Göttingen.

GEPPERT, H.

1. *Über iterative Algorithmen* I. Math. Ann. **107** (1932), 387—399.
2. *Über iterative Algorithmen* II. Math. Ann. **108** (1933), 197—207.

GIACCARDI, F.

1. *Su alcune disuguaglianze.* Giorn. Mat. Finanz. **1 (4)** (1955), 139—153.
2. *Considerazioni su alcune disuguaglianze e applicazioni.* Scritti Matematici in onore di Filippo Sibiriani, Bologna 1956, 1—19.

GINI, C.

1. *The contributions of Italy to modern statistical methods.* J. Royal Stat. Soc. London **89** (1926), part 4, 703—724.
2. *Di una formula comprensiva delle medie.* Metron **13,** № **2** (1938), 3—22.
3. *Le medie dei campioni.* Metron **15,** № **1—4** (1949), 13—28.
4. *Sulle condizioni necessarie e sufficienti affinché un centro ponderato sia un valore medio'* Supl. Statistico ai Nuovi Problemi **6,** № **1** (1940).

5. *L' evoluzione del concetto di media.* Metron **6**, № **3—4** (1952), 3—26.
6. (u saradnji sa G. Barbensi, L. Galvani, S. Gatti, E. Pizzetti) *Le medie.* Milano 1958. *Средние величины.* Москва 1970.

Gini, C., M. Boldrini, L. Galvani and A. Venere

1. *Sui centri della popolazione e sulle loro applicazioni.* Metron **11**, № **2** (1933), 3—102.

Gini, C. and L. Galvani

1. *Di talune estensioni dei concetti di media ai caratteri qualitativi.* Metron **8**, № **1—2** (1929), 3—209.

Gini, C. and G. Zappa

1. *Sulle proprietà delle medie potenziate e combinatorie.* Metron **13**, № **3** (1938), 21—31.

Gleser, L. J.

1. *On monotonicities of the generalised mean ratio and related results.* J. Math. Anal. Appl. **21** (1968), 530—536.

Godunova, E. K. (Годунова, Е. К.)

1. *Неравенства с выпуклыми функциями.* Изв. Высш. Учебн. Заведений. Математика **1965**, № 4, 45—53.

Godunova, E. K., V. I. Levin (Годунова, Е. К., В. И. Левин)

1. *Об одном неравенстве Оппенгейма.* Sib. Mat. Žurn. **11** (1970), 1174—1177.

Goldman, A. J.

1. *A generalisation of Rennie's inequality.* J. Res. Nat. Bureau Standards, Sect B, **68 B** (1964), 59—63.

Gosiewski, W.

1. *O sredniej arytmetycznej i o prawie Gauss'a prawdopodobieństwa błędu.* Sprawozdanie Towarzystwa Nauk Warszawskiego **2** (1909), 11—17.
2. *Jescze o prawie Gauss'a.* Sprawozdanie Towarzystwa Nauk. Warszawskiego **2** (1909), 249—255.

Goursat, É.

1. *Sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante.* Nouv. Ann. Math. **(3) 6** (1887), 437—439.

Grebe, E. W.

1. *Über die Vergleichung zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel.* Z. Math. Phys. **3** (1858), 297—298.

Green, S. L.

1. *The relation of the AM to the GM.* Math. Gaz. **13** (1926/27), 334.

Greub, W. and W. Rheinboldt

1. *On a generalisation of an inequality of L. V. Kantorovich.* Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 407—415.

Grunert, J. A.

1. *Über die Bedingungen der Ungleicheit, von den Mittelgrössen und von den imaginären Grössen.* Arch. Math. Phys. **1** (1841), 268—317.

GUHA, U. C.

1. *Arithmetic mean-geometric mean inequality.* Math. Gaz. **51** (1967), 145—146.

GULDBERG, A.

1. *Sur les valeurs moyennes.* C. R. Acad. Sci. Paris **175** (1922), 1035—1037.

GUSTIN, W. E.

1. *Gaussian means.* Amer. Math. Monthly **54** (1947), 332—335.

GUSTIN W. S.

1. *Asymptotic behavior of mean value functions.* Amer. Math. Monthly **57** (1950), 541—544.

HAMY, M.

1. *Sur le théorème de la moyenne.* Bull. Sci. Math. (2) **14** (1890), 103—104.

HÄNTZSCHE, W. and H. WENDT

1. *Zum arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel.* Unterrichtsbl. Math. Naturw. **42** (1937), 22—25.

HARDY, G. H.

1. *A course in pure mathematics.* Cambridge 6th ed. 1928; 9th ed. 1948.
2. *Divergent series.* Oxford 1949.

HARDY, G. H., J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA

1. *Inequalities.* Cambridge 1934, 1952, 1959, 1964, 1967; Moskva 1948; Peking 1965.

HAYASHI, T.

1. *Un théorème relatif aux valeurs moyennes.* Nouv. Ann. Math. (4) **5** (1905), 355—357.

HENDERSSON, R.

1. *Moral values.* Bull. Amer. Math. Soc. **2** (1895/6), 46—51.

HENRICI, P.

1. *Two remarks on the Kantorovich inequality.* Amer. Math. Monthly **68** (1961), 904—906.

HERING, F.

1. *A generalization of the arithmetic-geometric mean inequality and an application to finite sequences of zeros and ones.* Israel J. Math. **11** (1972), 14—30.

HETTNER, G.

1. *Zur Theorie des arithmetisch-geometrisch Mittel aus vier Elementen.* J. Reine Angew. Math. **89** (1880), 221—246.

HEYMANN, O.

1. *Über einen einfach Beweis eines Satzes von Dörrie.* Math. Naturwiss. Unterricht. **11** (1958), 65—66.

HILLE, E.

1. *Methods of classical and functional analysis.* Reading (USA), Menlo Parks (USA), London, Don Mills (Canada), 1972.
2. *Meanvalues and functional equations* (in Functional equations and inequalities, Roma 1971), pp. 153—162.

HOFSOMMER, D. J. and R. P. VAN DE RIET

1. *On the numerical calculation of elliptic integrals of the 1st and 2nd kind and the elliptic functions of Jacobi.* Stichtung Math. Centrum, Amsterdam, Report TW94, November 1962.

HÖLDER, O.

1. *Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgrenze.* Math. Ann. **20** (1882), 535—549.
2. *Über einen Mittelwertsatz.* Göttinger Nachr. 1889, 38—47.

HORVÁTH, J.

1. *Sur le rapport entre les systèmes de postulats caractérisant les valeurs moyennes quasi arithmétiques symmétriques.* C. R. Acad. Sci Paris **225** (1947), 1256—1257.
2. *On a theorem of Boge Jessen* I. Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **20**, № **12** (1948), 45—47.
3. *On a theorem of Boge Jessen* II. Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **20** № **13** (1948), 48—51.
4. *Note sur un problème de L. Fejér.* Bul. Inst. Politehn. Iaşi **3** (1948), 164—168.

HOSSZÚ, M.

1. *A biszimmetria függvényegyenletéhez.* Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **1** (1952), 335—342.
2. *On the functional equation of distributivity.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **4** (1953), 159—167.
3. *On the functional equation of autodistributivity.* Publ. Math. Debrecen **3** (1953), 83—86.
4. *A generalization of the functional equation of bisymmetry.* Studia Math. **14** (1953), 100—105.
5. *Nonsymmetric means.* Publ. Math. Debrecen **6** (1959), 1—9.

HOSSZÚ, M. and E. VINCZE

1. *Über den wahrscheinlichsten Wert.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **14** (1963), 131—136.

HOUSEHOLDER, A. S.

1. *The Kantorovich and some related inequalities.* SIAM Rev. **7** (1965), 463—473.

HOWROYD, T. D.

1. *Some existence theorems for functional equations in many variables and the characterization of weighted quasi-arithmetic mean.* Aequationes Math. **7** (1971), 1—15.

HSU, L. C.

1. *Questions* 1843 *and* 1844. Math. Student **23** (1955), 121.

HUNTER, J.

1. *A generalization of the inequality of the arithmetic-geometric means.* Proc. Glasgow Math. Assoc. **2** (1956), 149—158.

HURWITZ, A.

1. *Über den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels.* J. Reine Angew. Math. **108** (1891), 266—268 and Math. Werke **II.** Basel 1933, pp. 505—507.
2. *Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration.* Nachr. Gesellsch. Wiss. Göttingen Mat.-Phys. Kl. **1897,** 71—90 and Math. Werke **B II**, Basel 1933, pp. 546—564.

HUTINGTON, E.

1. *Sets of independent postulates for the arithmetic mean, the geometric mean, the harmonic mean, and the root-mean square.* Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927), 1—22.

INFANTOZZI, C. A.

1. *An introduction to relations among inequalities.* Amer. Math. Soc. Meeting 700. Cleveland, Ohio. 1972. Notices Amer. Math. Soc. № **141** (1972), A819—A820.

IONESCU, H. M.

1. *Valorii medii.* Rev. Mat. Fiz. **4** (1953), 55—62.

IVANOV, I. I. (ИВАНОВ, И. И)

1. *О неравенстве двух интегралов.* Leningrad, Izv. Politehn. In-ta **30** (1927), 104—106.

IZUMI, S.

1. *Some inequalities on means and covariance.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **A 5** (1969), 41—50.

IZUMI, S., K. KOBAYASHI and T. TAKAHASHI

1. *On some inequalities.* Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **(3) 16** (1934), 345—351.

JACKSON, D.

1. *Note on the median of a set of numbers.* Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1921), 160—167.

JACOB, M.

1. *La moyenne d'indice m. — Théorie générale des moyennes, proportions et progressions.* Bull. Statist. **4** (1950).

JACOBSTAHL, E.

1. *Über das arithmetische und geometrische Mittel.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **23** (1951), 122 and **25** (1952), 5—6.

JANIĆ, R. R. and P. M. VASIĆ

1. *Problem* 75. Mat. Vesnik **19** (1967), 103.

JECKLIN, H.

1. *Zur Systematik der statistischen Mittelwerte.* Z. Schweiz. Statistik u. Volkwirtschaft **83** (1947) 340—347.
2. *Über mathematische Mittelwerte.* Elem. Math. **3** (1948), 12—17.
3. *Der Begriff des mathematischen Mittelwertes und die Mittelwertformeln.* Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich. **93** (1948), 35—41.
4. *Eine geometrische Anwendung der grundlegenden algebraischen Mittelwerten.* Elem. Math. **3** (1948), 61—63.
5. *Ein Satz über Quadratsummen.* Elem. Math. **4** (1949), 12—14.
6. *Versuch einer Systematik des mathematischen Mittelwertbegriffs.* Comment. Math. Helv. **22** (1949), 260—270.
7. *Quasiarithmetische Mittelwerte* I *and* II. Elem. Math **4** (1949), 112—115 and 128—133.
8. *La notion de moyenne.* Metron **15** (1949), 3—11.
9. *Trigonometrische Mittelwerte.* Elem. Math. **8** (1953), 54—60.
10. *Über gewogene Mittelwerte, insbesondere gewogene geometrische Mittel.* Elem. Math. **17** (1962), 128—133.
11. *Über eine Anwendung gewogener geometrischer Mittelwerte.* Mitt. Verein. Schweiz. Versich.-Math. **62** (1962), 20—26.
12. *Über Zusammenhange zwischen einfachen Funktionalgleichungen und elementaren Mittelwerten.* Mitt. Verein. Schweiz. Versich.-Math. **63** (1963), 19—26.
13. *Über einfache und kombinatorische Potenzmittel.* Mitt. Verein. Schweiz. Versich.-Math. **66** (1966), 173—182.
14. *Diskussion einiger Naherungen der temporaren Verbindungsrente.* Mitt. Verein. Schweiz. Versich.-Math. **71** (1971), 95—110.
15. *Über eine spezielle algebraische Mittelwertbildung.* Mitt. Verein. Schweiz. Versich.-Math. **72** (1972), 159—169.

JECKLIN, H. and M. EISENRING

1. *Die elementaren Mittelwerte.* Mitt. Verein. Schweiz. Versich.-Math. **47** (1947), 123—165.

JENSEN, J. L. W. V.

1. *Sur une généralisation d'une formule de Tchebycheff.* Bull. Sci. Math. **(2) 12** (1888), 134—135.
2. *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.* Acta Math. **30** (1906), 175—193.

JESSEN, B.

1. *Über die Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels.* Acta Sci. Math. (Szeged) **5** (1930), 108—116.
2. *Bemaerkninger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier* I *and* II. Mat. Tidsskr. **B 1931,** 17—28, 84—95.
3. *Om Uligheder imellem Potensmiddelvaerdier.* Mat. Tidsskr. B (1933), 1—19.
4. *Über eine allgemeine Ungleichung zwischen Mittelwerten.* Acta Litt. Ac. Sci. Univ. Hungary **6** (1933), 67—79.

JOLLIFFE, A. E.

1. *An identity connected with a polynomial algebraic equation* **8** (1933), 82—85.

JULIA, G.

1. *Principes géométriques d'analyse,* vol. **2.** Paris 1932.

JUŽAKOV, A. P. (ЮЖАКОВ, А. П.)

1. *Об одном неравенстве.* Mat. v škole **1971, № 3,** 71.

KALAJDŽIĆ, G.

1. *Two elementary inequalities.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **412**— № **460** (1973), 53—56.

KÄMMERER, F.

1. *Ein arithmetisch-geometrisches Mittel.* Jber. Deutsch. Math.-Verein. **34** (1925), 87—88.

KANTOROVIČ, L. B.

1. *Functional analysis and applied mathematics.* Uspehi Mat. Nauk (N. S.) **3** (1948), 89—145 and Nat. Bur. Standards Rep. № **1509** (1952).

KAZARINOFF, N.

1. *Analytic inequalities.* New York 1961.

KELLOGG, O. D.

1. *A necessary condition that all the roots of a polynomial be real.* Ann. Math. **9** (1907/8), 97—98.
2. *Foundations of potential theory.* Berlin 1929.

KESTELMAN, H.

1. *On arithmetic and geometric means.* Math. Gaz. **46** (1963), 130.

KIMBERLING, C. H.

1. *Some corollaries to an integral inequality.* Amer. Math. Monthly **81** (1974), 269—270.

KITAGAWA, T. J.

1. *On some class of weighted means.* Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **(3) 16** (1934), 117—126.
2. *On an axiomatic research for the mean values of function.* Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **(3) 17** (1935), 78—88.

KLAMKIN, M. S.

1. *Inequalities concerning the arithmetic, geometric and harmonic means.* Math. Gaz. **52** (1968), 156—157.

KLINE, M.

1. *Mathematical throught from ancient to modern times.* New York 1972.

KNASTER, B.

1. *Sur une équivalence pour les fonctions.* Colloq. Math. **2** (1949), 1—4.

KNOPP, K.

1. *Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern.* Math. Z. **30** (1929), 387—413.
2. *Über Reihen mit positiven Gliedern.* J. London Math. Soc. **5** (1930), 13—21.
3. *Über die maximalen Abstände und Verhältnisse verschiedener Mittelwerte.* Math. Z. **39** (1935), 768—776.

KOBAYASHI, K.

1. *On some inequalities.* Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **(3) 16** (1934), 341—344.

KOBER, H.

1. *On the arithmetic and geometric means and Hölder's inequality.* Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 452—459.

KOLMOGOROV, A. N.

1. *Sur la notion de moyenne.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **(6) 12** (1930), 388—391.

KOROVKIN, P. P.

1. *Inequalities.* Moskva 1951, 1956; New York-London 1961.

KRÁLIK, D.

1. *Über einige Verallgemeinerungsmögchlichkeiten des logarithmischen Mittels zweier positiven Zahlen.* Periodica, Polytech. Chem. Eng. **16** (1972), 373—379.

KREIS, H.

1. *Arithmetisches und geometrisches Mittel.* Elem. Math. **1** (1946), 37—39.

KRITIKOS, H.

1. *Sur une extension de l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique* Bull. Soc. Math. Grèce **9** (1928), 43—46.
2. *Une propriété de la moyenne arithmétique.* Bull. Soc. Math. Grèce **24** (1949), 111—118.

KUCZMA, M.

1. *Rownania funkcyjne i ich znaczenie we wspolczesnej matematyce.* Prace Mat. **6** (1961), 175—211.
2. *A survey of theory of functional equations.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **130** (1964), 1—64.

KUZNECOV, V. M. (КУЗНЕЦОВ, В. М.)

1. *О работах Гаусса и венгерских математиков по теории арифметико-геометрического среднего.* Rostov-na-Donu Gos. Univ. Nauč. Soobš. **1969,** 110—115.

LABUTIN, D. N. (ЛАБУТИН, Д. Н.)

1. *О неравенствах.* Pyatigorski Sb. Nauč. Trudov. Ped. Inst. **1** (1947), 188—196.
2. *О средних величинах.* Pyatigorski Sb. Nauč. Trudov. Ped. Inst. **3** (1948), 52—55.
3. *О средней гармонической.* Pyatigorski Sb. Nauč. Trudov Ped. Inst. **3** (1948), 56—59.
4. *К вопросу о средних величинах.* Sb. Trudov Pyatigorski Gos. Ped. Inst. **8** (1955), 13—19.
5. *Сравнение средних величин.* Kabardino-Balkarsk. Gos. Univ. Učen. Zap. Ser. Fiz. -Mat. **12** (1957), 72—74.

LACKOVIĆ, I. B. and S. K. SIMIĆ

1. *On weighted arithmetic means which are invariant with respect to k-th order convexity.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **461**—№ **497** (1974), 159—166.

LAGRANGE, J. L.

1. *Sur une nouvelle méthode de calcul intégral.* Oeuvres **II** (1868), 253—312.

LAWRENCE, B. E.

1. *A proof that the arithemtic mean of any number of positive numbers is greater than their geometric mean.* Math. Gaz. **19** (1935), 221—222.

LEHMER, D. H.

1. *On the compounding of certain means.* J. Math. Anal. Appl. **36** (1971), 183—200.

LENSTRA, H. W.

1. *Trois problèmes analogues concernant des maximums.* Nieuw Tijdschr. Wisk. **30** (1942/43), 138—143.

LEVIN, V.

1. *Two remarks in van der Corput's generalisation of Knopp's inequality.* Verh. Nederl. Akad. Wetensch. Afd. Natuurk. Sect. I. **49** (1937), 429—431.

LEVINSON, N.

1. *Generalisation of an inequality of Ky Fan.* J. Math. Anal. Appl. **8** (1964), 133—134.

LIAPOUNOFF, A.

1. *Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité.* Mem. Acad. Sci. St. Petersbourg **VIII, 12** (1901), № 5, 1—24.

LIDSTONE, G. J.

1. *The arithmetic and geometric mean.* Math. Gaz. **16** (1932), 127.

LIN, T.-P.

1 *The power mean and the logarithmic mean.* Amer. Math. Monthly **81** (1974), 879—888.

LIOUVILLE, J.

1. *Sur la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs quantitiés positives.* J. Math. Pures Appl. **4** (1839), 493—494.

LOB, H.

1. *A formula in inequalities.* Math. Gaz. **12** (1924/25), 15—17.

LOEWNER, C. and H. B. MANN

1. *On the difference between the geometric and the arithmetic means of n quantities.* Advances in Math. **5** (1971), 472—473.

LOHNSTEIN, T.

1. *Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels.* Z. Math. Phys. **33** (1888), 129—136.
2. *Über das harmonisch-geometrische Mittel.* Z. Math. Phys. **33** (1888), 316—318.

LOREY, W.

1. *Zur Theorie der Mittelwerte.* Naturf. Ges. Görlitz **25** (1906), 9 pp.

LOSONCZI, L.

1. *Über den Vergleich von Mittelwerten die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind.* Publ. Math. Debrecen **17** (1970), 203—208.
2. *Über eine neue Klasse von Mittelwerten.* Acta Sci. Math. (Szeged) **32** (1971), 71—81.
3. *Subhomogene Mittelwerte.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **22** (1971), 187—195.
4. *Subadditive Mittelwerte.* Arch. Math. **22** (1971), 168—174.
5. *General inequalities for nonsymmetric means.* Aequationes Math. **9** (1973), 221—235.

LOVERA, P.

1. *Sopra alcune diseguaglianze che si presentano nella matematica attuariale.* Giorn. Ist. Ital. Attuari **19** (1956), 131—139.

LUPAŞ, A.

1. *A remark on the Schweizer and Kantorovich inequalities.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **381**—№**409** (1972), 13—15.

LUPAŞ, A. and H. HIDAKA

1. *Problem* 5666. Amer. Math. Monthly **77** (1970), 411—412.

MACLAURIN, C.

1. *A second letter to Martin Folkes, Esq.; concerning the roots of equations with the demonstrations of other rules in algebra.* Phil. Trans. **36** (1729), 59—96.

MADEVSKI, Ž.

1. *Quelques conséquences d'une inégalité d'Ostrowski.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **412**—№ **460** (1973), 168—170.

MAJÓ TORRENT, J.

1. *Nota sobre la extension al campo complejo de la media aritmetica y geometrica.* Gac. Mat. (Madrid) **(1) 8** (1956), 195—198.

MANCA, P.

1. *Sopra alcune proprietà della medie associative in R^1 e in R^n.* Giorn. Ist. Ital. Attuari **32** (1969), 81—91.

MARCUS, M. and L. LOPES

1. *Inequalities for symmetric functions and Hermitian matrices.* Canad. J. Math. **9** (1957), 305—312.

MARDESSICH, B.

1. *Sulle relazioni fra medie combinatorie e medie potenziate.* Statistica (Bologna) **13** (1953), 77—85.

MARHASIN A. B. (МАРХАСИН, А. В.)

1. *Одно обобщение неравенства между арифметическим и геометрическит средним.* Акад. Наук СССР, Сибирское отд. Инст. горного дела. Вопросы теории передачи информации при управл. производ. **1971**, 16—19.

MARSHALL, A. W. and I. OLKIN

1. *Reversal of Lyapunov, Hölder and Minkowski inequalities and other extension of the Kantorovich inequality.* J. Math. Anal. Appl. **8** (1964), 503—514.

MARSHALL, A. W., I. OLKIN and F. PROSCHAN

1. *Monotonicity of ratios of means and other applications of majorisation.* S **1**, 177—190.

MARTINOTTI, P.

1. *Le medie relative.* Giorn. Econom. et Revista Statistica **4 (71)** (1931), 291—303.
2. *Estensioni nel concetto di media.* Giorn. Econom. e Ann. Econom. **(5) 1** (1939), 624—632.

MATHIEU, J. J. A.

1. *Note relative à l'approximation des moyennes géométriques par des séries de moyennes arithmétiques et de moyenne harmoniques.* Ann. Math. **18** (1879), 529—531.

MATSUMURA, S.

1. *Über die Axiomatik von Mittelbildungen.* Tôhoku Math. J. **36** (1933), 260—262.

McLAUGHLIN, H. W. and F. T. METCALF

1. *Dependence of some classical inequalities on the index set.* S **2**, pp. 213—222.
2. *Remark on a recent generalisation of Cauchy-Schwartz inequality.* J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), 522—523.
3. *An inequality for generalized means.* Pacific J. Math. **22** (1967), 303—311.
4. *The Minkowski and Tchebychef inequalities as functions of the index set.* Duke Math. J. **35** (1968), 865—873.
5. *Several inequalities for sums, means and integral norms.* J. Math. Anal. Appl. **22** (1968), 272—284.

McLeod, J. B.

1. *On four inequalities in symmetric functions.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **11** (1958/59), 211—219.

Menon, K. V.

1. *Inequalities for symmetric functions.* Duke Math. J. **35** (1968), 37—46.
2. *Inequalities for generalised symmetric functions.* Canad. Math. Bull. **12** (1969), 615—623.
3. *An inequality of Schur and an inequality of Newton.* Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 441—449.
4. *On the convolution of logarithmically concave sequences.* Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1969), 439—441.
5. *Symmetric forms.* Canad. Math. Bull. **13** (1970), 83—87.
6. *A note on symmetric forms.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **357**—№ **380** (1971), 11—13.
7. *An inequality for elementary symmetric functions.* Canad. Math. Bull. **15** (1972), 133—135.

Messedaglia, A.

1. *Il calcolo dei valori medii e le sue applicationi statistiche.* Arch. Statist. **5** (1908).

Mijajlović, Ž. and Ž. M. Mitrović

1. *Problem* 224. Mat. Vesnik **9** **(24)** (1972), 90.

Mikusiński, J. G.

1. *Sur les moyennes de la forme* $\psi^{-1}(\Sigma\, q\, \psi(x))$. Studia Math. **10** (1948), 90—96.

Mineur, A.

1. *Sur les moyennes.* Mathesis **47** (1933), 64—66.

Mitrinović, D. S.

1. *Zbornik matematičkih problema* I. Beograd 1958.
2. *Elementary inequalities.* Groningen 1964.
3. *Nejednakosti.* Beograd 1965.
4. *An inequality concerning arithmetic and geometric means.* Math. Gaz. **50** (1966), 310—311.
5. *Certain inequalities for elementary symmetric functions.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **181**—№ **196** (1967), 17—20.
6. *Some inequalities involving elementary symmetric functions.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **181**—№ **196** (1967), 21—27.
7. *Inequalities concerning the elementary symmetric functions.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **210**—№ **228** (1968), 17—19.
8. *Problem* 5626. Amer. Math. Monthly **75** (1968), 911—912.
9. (in cooperation with P. M. Vasić). *Analytic inequalities.* Berlin-Heidelberg-New York 1970; *Analitičke nejednakosti.* Beograd 1970.
10. *Važnije nejednakosti.* Matematička biblioteka **7** (1958), 64 pp.
11. *Linearna algebra — Analitička geometrija — Polinomi,* (sa D. Mihailovićem). Beograd 1959, 414 pp.
12. *Inequalities of R. Rado type for weighted means.* Publ. Inst. Math. (Belgrade) **6** **(20)** (1966), 105—10.6

Mitrinović, D. S., D. Ž. Đoković and Ž. M. Mitrović

1. *Problem* 76. Mat. Vesnik **7** **(22)** (1970), 561.

Mitrinović, D. S., and D. Ž. Đoković

1. *Polinomi i matrice.* Beograd 1966 i 1975.

Mitrinović, D. S. and Ž. Mitrović

1. *Problem* 129. Mat. Vesnik **6** **(21)** (1966), 246.

MITRINOVIĆ, D. S. and P. M. VASIĆ

1. *Nouvelles inégalités pour les moyennes d'ordre arbitraire.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **159**—№ **170** (1966), 1—8.
2. *Une classe d'inégalités, où interviennent les moyennes d'ordre arbitraire.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **159**—№ **170** (1966), 9—17.
3. *Une classe d'inégalités.* Mathematica (Cluj) **31** (1966), 305—308.
4. *Propriétés d'un rapport où interviennent les moyennes d'ordre arbitraire.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **181**—№ **196** (1967), 29—33.
5. *Monotonost količnika dve sredine.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **181**—№ **196** (1967), 35—38.
6. *Généralisation d'un procédé fournissant des inégalités du type de Rado.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **210**—№ **228** (1968), 27—30.
7. *Inégalités du type de Rado concernant des fonctions symmetriques.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **210**—№ **228** (1968), 31—34.
8. *Généralisation d'une inégalité de Henrici.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **210**—№ **228** (1968), 35—38.
9. *Inégalités pour les fonctions symmetriques élémentaires.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **210**—№ **228** (1968), 39—41.
10. *Une inégalité générale relative aux moyennes d'ordre arbitraire.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. № **210**—№ **228** (1968), 81—85.
11. *Sredine.* Matematička biblioteka № 40. Beograd 1969.
12. *History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **461**—№ **497** (1974), 1—30.
13. *The centroid method in inequalities.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **498**—№ **541** (1975), 3—16.
14. *On a theorem of W. Sierpiński concerning mean.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **544**—№ **576** (1976), 113—114.

MITROVIĆ, Ž.

1. *On a generalization of Fan-Todd's inequality.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **412**—№ **460** (1973), 151—154.

MOHR, E. H.

1. *Introduction to a form of general analysis.* New Haven Math. Coll. 1910, 82.

MOHR, E.

1. *Über die Funktionalgleichung des arithmetisch-geometrischen Mittels.* Math. Nachr. **10** (1953), 129—133.
2. *Die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel von n positiven Zahlen.* Math.-Phys. Semesterber. (N. F.) **10** (1964), 276—277.

MOND, B.

1. *A matrix inequality including that of Kantorovich.* J. Math. Anal. Appl. **13** (1966), 49—52.

MOND, B. and O. SHISHA

1. *Ratios of means and applications.* S **1**, 191—197.
2. *Bounds on differences of means.* S **1**, 293—308.
3. *Differences of means.* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 328—333.
4. *Differences and ratio inequalities in Hilbert space.* S **2**, 241—249.

DE MORGAN, A.

1. *Principle of mean values.* Seance of April 25, 1853. Proc. Cambridge Phil. Soc. **9** (1866), 123—126.

MORONEY, M. J.

1. *Facts from figures.* London 1951.

MOTZKIN, T. S.

1. *Algebraic inequalities.* S **1**, 199—204.
2. *The arithmetic-geometric inequality.* S **1**, 205—224.

MUIRHEAD, R. F.

1. *Some methods applicable to identities of symmetric algebraic functions of n letters.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **21** (1902/3), 144—157.
2. *Proofs that the arithmetic mean is greater than the geometric mean.* Math. Gaz. **2** (1901—1904), 283—287.
3. *Proofs of an inequality.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **24** (1906), 45—50.
4. *Inequalities relating to some algebraic means.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **19** (1900—1901), 36—45.

MULHOLLAND, H. P.

1. *The generalization of certain inequality theorems involving powers.* Proc. London. Math. Soc. **(2) 33** (1932), 481—516.

MULLIN, A. A.

1. *Concerning some inequalities.* Amer. Math. Monthly **66** (1959), 498—500.

MYRBERG, P. J.

1. *Eine Verallgemeinerung des arithmetisch-geometrischen Mittels.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. **A I 253** (1958), 3—19.

NAGELL, T.

1. *Über das arithmetische und das geometrische Mittel.* Nordisk Mat. Tidskr. **14** (1932), 54—55.

NAGUMO, M.

1. *Über eine Klasse der Mittelwerte.* Japan. J. Math. **7** (1930), 71—79.
2. *On mean values* (Japonese). Tôkyo But. Z. **40** (1931), 520—527.
3. *Über den Mittelwert, der durch die kleinste Abweichung definiert wird.* Japan. J. Math. **10** (1933), 53—56.

NAKAHARA, I.

1. *Axioms for the weighted means.* Tôhoku Math. J. **41** (1935), 424—434.

NANJUNDIAH, T. S.

1. *Inequalities relating to arithmetic and geometric means* I. J. Mysore Univ. Sect. B **6** (1946), 63—74.
2. *Inequalities relating to arithmetic and geometric means* II. J. Mysore Univ. Sect. B **6** (1946), 107—113.
3. *Sharpenings of some classical inequalities.* Math. Student **20** (1952), 24—25.

NARUMI, S.

1. *Note on the law of the arithmetical mean.* Tôhoku Math. J. **30** (1929), 19—21.

NESS, W.

1. *Das arithmetische und das geometrische Mittel.* Praxis Math. **6** (1964), 293—296.

NETTO, E.

1. *Vorlesungen über Algebra*, vol. 1. Leipzig 1920.

NEWMAN, D. J.

1. *Arithmetic, geometric inequality.* Amer. Math. Monthly **67** (1960), 886.

NEWMAN, M.

1. *Kantorovich's inequality.* J. Res. Nat. Bureau Standard, **64 B** (1959), 33—34.

NEWTON, I.

1. *The mathematical papers of Isaac Newton,* V. 1683—1684. Cambridge 1972.

NIKOLAEV, A. N. (НИКОЛАЕВ, А. Н.)

1. *Извлечение квадратных и кубических корней из чисел с помощью арифмометра.* Taškent, Bull. Univ. **11** (1925), 65—74.

NOLTE, S. D.

1. *An application of generalized means.* Proc. Iowa Acad. Sci. **66** (1959), 357—361.

NORRIS, N.

1. *Inequalities among averages.* Ann. Math. Statist. **6** (1935), 27—29.

OBERSCHELP, W.

1. *Ein neuer elementaren Beweis für die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel.* Math.-Phys. Semesterber. (N. F.) **18** (1971), 53—54.

OPPENHEIM, A.

1. *On inequalities connecting arithmetic means and geometric means of two sets of three positive numbers.* Math. Gaz. **49** (1965), 160—162.
2. *On inequalities connecting arithmetic and geometric means of two sets of three positive numbers* II. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **210**—№ **228** (1968), 21—24.

ORY, H.

1. *L'extraction des racines par la méthode heronienne.* Mathesis **52** (1938), 239—246.

ORTS, J. M.

1. *Iteración de funciones simétricas.* Rev. Mat. Hisp.-Amer. **(2) 9** (1934), 1—6.

O'SHEA, S.

1. *The arithmetic-geometric mean inequality.* Amer. Math. Monthly **75** (1968), 1092—1093.

OSTLE, B. and H. L. TERWILLIGER

1. *A comparison of two means.* Proc. Montana Acad. Sci. **17** (1957), 69—70.

OSTROWSKI, A.

1. *Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur.* J. Math. Pures Appl. **(9) 31** (1951), 253—292.
2. *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung,* vol. **2.** Basel 1951.

OZEKI, N.

1. *On some inequalities* (Japonese). J. College Arts Sci. Chiba Univ. **4** (1965), 211—214.

PAASCHE, I.

1. *Über die Cauchysche Mittelwertefunktion (Potenzmittel).* Math. Naturwiss. Unterricht. **6** (1953/54), 362—364.

PATLAK, C. S. and D. C. B. MARSH

1. *Problem E* 1449. Amer. Math. Monthly **68** (1961), 670—671.

PERELJDIK, A. L. (ПЕРЕЛЬДИК, А. Л.)

1. *Обобщение неравенства, связывающего среднегеометрическое со среднеарифметическим нескольких чисел.* Бюллетень Среднеазиатского Гос. Университета, вып **22**, № **9** (1937), 83—88.

PETROVIĆ, M.

1. *Računanje sa brojnim razmacima.* Beograd 1932 i 1969.

PIETRA, G.

1. *Di una formula per il calcolo delle medie combinatorie.* Atti Soc. Progr. Sci. **27,** № **5** (1939), 38—45.

PITTENGER, A. O.

1. *The symmetric, logarithmic and power means* (to appear in Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. for 1978).
2. *Inequalities between arithmetic and logarithmic means* (to appear in Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. for 1978).

PIZZETTI, E.

1. *Osservazioni sulle medie esponenziali e baso-esponenziali.* Metron 13, № **4** (1939), 3—15.
2. *Medie ascedenti e medie discedenti.* Metron **14,** № **1** (1940), 55—66.
3. *Considerazioni in margine al concetto di media.* Statistica (Bologna) **10** (1950).

PÓLYA, G.

1. *On the harmonic mean of two numbers.* Amer. Math. Monthly **57** (1950), 26—28.
2. *Induction and analogy in mathematics,* vol **1.** Princeton 1954.

PÓLYA, G. and G. SZEGÖ

1. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* vol **1.** Berlin 1925; *Problems and theorems in analysis,* vol. **1,** New York-Heidelberg-Berlin 1972.

POMPEIU, D.

1. *Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne.* C. R. Acad. Sci. Paris **190** (1930), 1107—1109.

POMPILJ, G.

1. *Sulle medie combinatorie potenziate dei campioni.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **18** (1949), 181—196.

POP, F.

1. *Note matematice* 3. Gaz. Mat. Seria A. № 2, **78** (1973), 72—74.

POPOVIĆ, V.

1. *Une démonstration de l'inégalité de Cauchy.* Bull. Soc. Mat. Phys. Serbie **1** (1949), № **3—4,** 133—135.

POPOVICIU, T.

1. *Sur un théorème de Laguerre.* Bull. Soc. Sci. Cluj **8** (1934), 1—4.
2. *Asupra mediilor aritmetice si medie geometrice.* Gazeta Mat. **40** (1934), 155—160.
3. *Les fonctions convexes.* Actualités Sci. Ind. № **992,** Paris 1944.
4. *Sur une inégalité.* Mathematica (Timişoara) **23** (1948), 127—128.
5. *Asupra unor inequalitati intre medii.* Stud. Cerc. Mat. **11** (1960), 343—355.
6. *Sur une inégalité de N. Levinson.* Mathematica (Cluj) **6** (**21**) (1961), 301—306.
7. *Sur une inégalité entre des valeurs moyennes.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **381**—№ **409** (1972), 1—8.

PRASAD, G.

1. *Six lectures on the mean value theorem of the differential calculus.* Calcuta 1931.

PRATELLI, A.

1. *Sulle medie trigonometriche.* Atti Prima Riun. Sci. Soc. Ital. Statis. Pisa 1940, 99—104.

PRINGSHEIM, A.

1. *Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen.* Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. **32** (1909), 170.

RAHMAIL, R. T. (РАХМАИЛ, Р. Т.)

1. *Оценка отношения разностей средних степеных.* Sb. Mat. Fizika **3 M** (1976), 91—96.

RAMSEY, A. J.

1. *Dinamics* I. Cambridge 1929.
2. *Statics.* Cambridge 1934.

RANKIN, R. A.

1. *A problem concerning the product on n real variables.* Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **25**, № 13 (1952), 50—53.

REDHEFFER, R.

1. *Recurrent inequalities.* Proc. London. Math. Soc. (3) **17** (1967), 683—699.

RENNIE, B. C.

1. *On a class of inequalities.* J. Austral. Math. Soc. **3** (1963), 442—448.

RICCI, U.

1. *Confronti fra medie.* Giorn. Econom. e Rev. Statist. (3) **36, № 11** (1915), 38—66.

VAN DE RIET, R. P.

1. *Some remarks on the arithmetic-geometrical mean.* Stichtung Math. Centrum. Amsterdam Tech. Note TN **35** (1963), 14 pp.
2. *On the connection between the arithmetico-geometrical mean and the complete elliptic integral of the first kind.* Stichtung. Math. Centrum. Amsterdam Tech. Note TN **36** (1964), 6 pp.

RODENBERG, O.

1. *Über ein Maximumproblem.* Z. Math. Phys. **24** (1879), 63—64.

ROGERS, L. J.

1. *An extension of a certain theorem in inequalities.* Mess. Math. **17** (1887/8), 145—150.

ROGHI, G.

1. *Funzionali collegati a medie generalizzate.* Univ. degli Studi di Roma. Facoltà di ingegneria. Publ. Ist. Mat. App. **83** (1971), 83—97.

ROMANOVSKY, V. I. (РОМАНОВСКИЙ, В. И.)

1. *Аналитические неравенства и статистические критерии.* Izv. Akad. Nauk SSSR **1938**, 457—477.

ROSENBERG, L.

1. *The iteration of means.* Math. Mag. **39** (1966), 58—62.

ROSEVEARE, W. N.

1. *A chapter on algebra.* Math. Gaz. **2** (1901—1904), 301—306.

RYLL-NARDZEWSKI, C.

1. *Sur les moyennes.* Studia Math. **11** (1950), 31—37.

SALEME, B. M.

1. *Sobre algunas desigualdades.* Math. Notae **3** (1943), 41—46.

SASSER, D. W. and M. L. SLATER

1. *On the inequality* $\Sigma x_i y_i \geq \frac{1}{n} \Sigma x_i \Sigma y_i$ *and the van der Waerden permanent conjecture.* J. Comb. Theory **3** (1967), 25—33.

SCARDINA, A. V.

1. *Considerazioni sulle tre medie di due numeri positivi.* Bollettino (Calabrese) (5) **25** (1974), 64—66.

SCHERING, K.

1. *Zur Theorie der Borchardtschen arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen.* J. Reine Angew. Math. **85** (1878), 115—170.

SCHIAPARELLI, G.

1. *Sul principio della media arithmetica nel calcolo dei resultati delle osservazioni.* Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A (2) **1** (1868), 771—778.
2. *Sur le principe de la moyenne arithmétique.* Astronom. Nachr. **87** (1875), 55—58.
3. *Come si possa giustificare l'uso della media arithmetica nel calcolo dei risultati d'osservazione.* Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A (2) **40** (1907), 752—764; shortened version in Astronom. Nachr. **176** (1907), 205—212.

SCHIMMACK, R.

1. *Der Satz vom arithmetischen Mittel in axiomatischer Begründung.* Math. Ann. **68** (1909), 125—132 and 304.

SCHLESINGER, L.

1. *Über Gauss Jungendarbeiten zum arithmetisch-geometrischen Mittel.* Jber. Deutsch. Math.--Verein. **20** (1911), 396—403.

SCHLÖMILCH, O.

1. *Über Mittelgrössen verschiedener Ordnung.* Z. Math. Phys. **3** (1858), 301—308.
2. *Über die Vergleichung zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel.* Z. Math. Phys. **3** (1858), 187—189.
3. *Moyennes géométriques, arithmétiques, harmoniques comparées.* Nouv. Ann. Math. **18** (1859), 353—355.

SCHÖNWALD, H. G.

1. *Eine Bemerkung zu Verallgemeinerungen der Unglechung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.* Monatsh. Math. **80** (1975), 141—143.

SCHREIBNER,

1. *Über Mittelwerte.* Berichte Kön. Sächs. Gesellsch. Wiss. Math. Phys. Klasse. Sitzung am 12 Dez. **1873,** 562—567.

SCHUR, I.

1. *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.* Math. Z. **1** (1918), 377—402.
2. *Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinanten Theorie.* S.-B. Berlin. Math. Gesellsch. **22** (1923), 9—20.

SCHWEITZER, A. R.

1. *A new functional characterisation of the arithmetic mean.* Bull. Amer. Math. Soc. **22** (1915/6), 171.
2. *On iterative functional equations of the distributive type.* Bull. Amer. Math. Soc. **24** (1917), 372—373.

SCHWEITZER, O.

1. *Egy egyenlötlenseg az arithmetski középértékröl.* Math. Phys. Lapok **28** (1914), 257—263.

SEGRE, B.

1. *Inequalities concerning symmetric or almost-symmetric functions.* Tensor (N. S) **24** (1972), 273—287.

SHISHA, O.

1. *Geometric interpretations of the inequalities between arithmetic, geometric and harmonic means.* Math. Mag. **39** (1966), 268—269.
2. *Inequalities* I (edited by O. Shisha). New York—London 1967.
3. *Inequalities* II (edited by O. Shisha). New York—London 1970.
4. *Inequalities* III (edited by O. Shisha). New—York—London 1972.

SHISHA, O. and G. T. CARGO

1. *On comparable means.* Pacific J. Math. **14** (1964), 1053—1058.

SHISHA, O. and B. MOND

1. *Difference of means.* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 428—333.
2. *Bounds on differences on means.* S **1,** 293—308.

SIBIRANI, F.

1. *Intorno alle funzioni convesse.* Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett. **(2) 40** (1907), 903—919.
2. *Di un presunto errore di logica di Cauchy.* Period. Mat. **(4) 4** (1924), 438—440.

SIEGEL, C. L.

1. *The trace of totally positive and real algebraic integers.* Ann. of Math. **46** (1945), 302—312.

SIERPIŃSKI, W.

1. *Sur une inégalité pour la moyenne arithmétique, géométrique et harmonique* (na poljskom). Warsch. Sitzungsber. **2** (1909), 354—357.

SIMON, H.

1. *Über einige Ungleichungen.* Z. Math. Phys. **33** (1888), 56—61.

SIMONART, F.

1. *Sur certaines inégalités relatives aux moyennes d'une fonction.* Ann. Soc. Sci. Bruxelles **A 52** (1932), 275—279.

SMITH, C.

1. *A treatise on algebra.* London 1888.

SNIAD, H.

1. *On convexity of mean value functions.* Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 770—776.

SOLBERG, N.

1. *Det aritmetiske og geometriske middeltall.* Nordisk Mat. Tidskr. **16** (1934), 58—59.

SOUBLIN, J.

1. *Étude algébrique de la notion de moyenne.* (Thèse). Paris 1966.
2. *Médiations.* C. R. Acad. Sci. Paris. **263** A (1966), 49—50.
3. *Médiations.* C. R. Acad. Sci. Paris. **263** A (1966), 115—117.

SPECHT, W.

1. *Zur Theorie der elementaren Mittel.* Math. Z. **74** (1960), 91—98.

STEFFENSEN, J. F.

1. *On certain inequalities between mean values and their application to actuarial problems.* Skand. Aktuarietidskr. **1** (1918), pp. 82—97.

2. *On certain inequalities and methods of approximation.* J. Inst. Actuar. **51** (1919), 274—297.
3. *Et Bevis for Saetningen om, at det geometriske Middeltal af positive Størrelser ikke er større end det aritmetiske.* Mat. Tidsskrift **A** (1930), 115—116.
4. *The geometrical mean.* J. Inst. Actuar. **62** (1931), 117—118.

STERNBERG, W.

1. *Einige Sätze über Mittelwerte.* Leipziger Ges. Wiss. Berichte (Math.-Nat. Klasse) **71** (1919), 277—285.

STOLARSKY, K. B.

1. *Generalizations of the logarithmic mean.* Math. Mag. **48** (1975), 87—92.

STUBBAN, J. O.

1. *Our det aritmetisce or geometrisce middel.* Nordisk Mat. Tidskr. **26** (1944), 116—117.

STURM, R.

1. *Maxima und Minima in der Elementaren Geometrie.* Leipzig 1910.

SUTÔ, O.

1. *On some classes of functional equations.* Tôhoku Math. J. **3** (1913), 47—62.
2. *Law of the arithmetical mean.* Tôhoku Math. J. **6** (1914), 79—81.

SYLVESTER, J. J.

1. *On an elementary proof and generalisation of Sir Isac Newton's hitherto undemonstrated rule for the discovery of imaginary roots.* Proc. London Math. Soc. **1865/6**, 1—16.
2. *Math. Papers,* vol. **2.** Cambridge 1908, pp. 376, 479, 498—513, 704—708.

SZÉKELY, J. G.

1. *A probabilistic proof of inequalities of some means.* Periodica Polytech. Chem. Eng. **18** (1974), № 1 99—101.

TAIT, P. G.

1. *Physical proof that the geometric mean of any number of quantities is less than the arithmetic mean.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh **6** (1866—1869), 309.

TEODORIU, L.

1. *Sur la définition axiomatique de la moyenne.* Mathematica (Cluj) **5** (1931), 27—32 and Bull. Soc. Sci. Cluj **5** (1931), 441—445.

TERRACINI, A.

1. *Alcune considerazioni sul teorema de valor medio.* Giorn. Mat. Battaglini **51** (1913), 66—72.

TETTAMANTI, K., G. SÁRKÓNY, D. KRÁLIK and R. STOMFAI

1. *Über die Annäherung logarithmischer Funktionen durch algebraische Funktionen.* Periodica Polytech. Chem. Eng. **14** (1970), 99—111.

TETTAMANTI, K. and R. STOMFAI

1. *Über ein Funktionenfolgen—Tripel für die geeignete Beschreibung verschiedener physikalischer Vörgange.* Periodica Polytech. Chem. Eng. **17,** № 2 (1973), 139—164.

THACKER, A.

1. *Demonstration of the known theorem that the arithmetic mean between any number of positive quantities is greater than their geometric mean.* Cambridge Dublin Math. J. **6** (1851), 81—82.

THIELMAN, H. P.

1. *On generalized means.* Proc. Iowa Acad. Sci. **56** (1949), 241—247.

TIETZE, H.

1. *Über eine Verallgemeinerung des Gausschen arithmetisch-geometrisch Mittel und die zugehörige Folge von Zahlen n-tupeln.* Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. **1952/53,** 191—195.

TISSERAND, F.

1. *Remarque à l'occasion d'une communication de M. Bertrand.* C. R. Acad. Sci. Paris **106** (1887), 231—232.

TOBEY, M. D.

1. *A two-parametar homogeneous mean values.* Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 9—14.

TODHUNTER, I.

1. *Algebra.* London 1870.

TONELLI, L.

1. *Sulla iterazione.* Giorn. Mat. Battaglini **48** (1910), 341—373.

TRANSON, A.

1. *Sur un théorème de Cauchy.* Nouv. Ann. Math. **(2) 11** (1872), 257—258.

TRICOMI, F. G.

1. *Sull' algoritmo iterativo de Borchardt e su una sua generalizzazione.* Rend. Circ. Mat. Palermo **(2) 14** (1965), 85—94.
2. *Sulle combinazioni lineari delle tre classiche medie: aritmetica, geometrica e armonica.* Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **104** (1969/70), 557—572.

TWEEDIE, C.

1. *Note on the inequality theorems that lead up to the exponential limit* $\underset{x=\infty}{\mathrm{L}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Proc. Edinburgh Math. Soc. **17** (1899), 33—37.

ULAM, J.

1. *The general mean.* VI Zjazd Mat. Polskich, Warszava 1948, 57—59. (Dodatek do Rocznika Polsk. Towarz. Mat. **22** (1950), 57—59).

UNFERDINGER, F.

1. *Nähere Bestimmung des Unterschiedes zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel positiver Grössen und ein daraus abgeleitetes allgemeines Theorem der Integralrechnung.* Sitzungsberichte Math. Natur.-Wiss. Classe Akad. Wiss. Wien **56** (1867) (Abt. 2), 272—286.

URSELL, H. D.

1. *Inequalities between sums of powers.* Proc. London Math. Soc. **9** (1959), 432—450.

USAI, G.

1. *Proprietà combinatoria in certe medie.* Esercitazioni Mat. **12** (1939), 129—133.
2. *Alcune considerazioni sulle medie.* Boll. Accad. Gioenia Sci. Natur. Catania **(3) 14** (1940), 9—15.

USPENSKY, F. V.

1. *On the arithmetico-geometric means of Gauss* I, II *and* III. Math. Notae **5** (1945), 1—28, 57—58 and 129—161.
2. *Theory of equations.* New York 1948.

VASIĆ, P. M.

1. *On inequalities connecting arithmetic means and geometric means of two sets of n positive numbers*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **381**—№ **409** (1972), 63—66.

VASIĆ, P. and R. R. JANIĆ

1. *On an inequality of N. Levinson*. Publ. Inst. Math. (Belgrade) **10** (**24**) (1970), 155—157.

VASIĆ, P. M. and J. D. KEČKIĆ

1. *Some inequalities for complex numbers*. Math. Balkanica **1** (1971), 282—286.

VASIĆ, P. M., J. D. KEČKIĆ, I. B. LACKOVIĆ and Ž. MITROVIĆ

1. *Some properties of arithmetic means of real sequences*. Mat. Vesnik **9** (1972), 205—212.

VASIĆ, P. M. and Ž. MIJALKOVIĆ

1. *On an index set function conected with Jensen inequality*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **544**—№ **576** (1976), 110—112.

VEINGER, M. I. (ВЕЙНГЕР, М. И.)

1. *О сходимости алгоритма В. Борхардта*. Записки Ленинградского Горного Инст. им. Г. В. Плеханова **43**, № **3** (1964), 26—32.

VERESS, P.

1. *Über den Begriff des Mittelwertes* (Hungarisch). Mat. Fiz. Lapok **43** (1936), 46—60.

VOTA, L.

1. *Medie integrali*. Rend. Sem. Matematico Univ. Pol. Torino **12** (1952—1953), 283—292.

VYTHOULKAS, D.

1. *Generalization of the Schwarz inequality*. Bull. Soc. Math. Grèce **24** (1949), 119—127.

WAHLUND, A.

1. *Beiträge zum Beweise einiger Ungleichheiten*. Ark. Mat. Astronom. Fys. **18**, № **21** (1924), 15 pp.

WALSH, C. E.

1. *A proof of the theorem of the means*. Edinburgh. Math. Notes **33** (1943), 17—18.

WATANABE, Y.

1. *On inequalities among various means*. Comment. Math. Univ. St. Pauli **6** (1957), 71—78.

WATSON, G. S.

1. *Serial correlation in regression analysis* I. Biometrika **42** (1955), 327—341.

WEBER, H.

1. *Lehrbuch der Algebra*, Bd. **2**. Strassburg 1896.

WEILER, H.

1. *Note on harmonic and geometric means*. Austral. J. Statist. **1** (1959), 44—46.

WERTHEIMER, A.

1. *Note on Zoch's paper on the postulate of the arithmetic mean*. Ann. Math. Statist. **7** (1936), 112—115.

WETZEL, J. E.

1. *On the functional inequality* $f(x+y) \geqq f(x)f(y)$. Amer. Math. Monthly **74** (1967), 1065—1068.

WHITELEY, J. N.

1. *Some inequalities concerning symmetric forms.* Mathematica **5** (1958), 49—57.
2. *A generalisation of a theorem of Newton.* Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 144—151.
3. *Two theorems on convolutions.* J. London Math. Soc. **37** (1962), 459—468.
4. *Notes on a theorem on convolutions.* Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 1—7.
5. *On Newton's inequality for real polynomials.* Amer. Math. Monthly **76** (1969), 905—909.

WHITTAKER, E. T. and E. T. ROBINSON

1. *The Calculus of observations.* London 1926.

WHITTAKER, E. T. and G. N. WATSON

1. *A Course in modern analysis.* Cambridge 1950.

WIGERT, S.

1. *Sur l'inégalité* $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$. Ark. Mat. Astronom. Fys. **B 25** (1936), № **11**, 1—2.

WINTNER, A.

1. *On a generalization of the Lagrange-Gauss modular algorithm.* Amer. J. Math. **54** (1932), 346—352.

YOSIDA, Y.

1. *Sur l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique.* Comment. Math. Univ. St. Paul **5** (1956), 1—2.

ZAPPA, G.

1. *Osservazioni sulle medie combinatorie.* Atti Riunione Pisa **17** (1939), 1—7.
2. *Osservazioni sopra le medie combinatorie.* Metron **14,** № **1** (1940), 31—53.

ZOCH, R. T.

1. *On the postulate of the arithmetic mean.* Ann. Math. Statist. **6** (1935), 171—182.
2. *Reply to Mr. Wertheimer's paper.* Ann. Math. Statist. **8** (1937), 177—178.

ŽURAVSKII, A. M. (ЖУРАВСКИЙ, А. М.)

1. *Алгоритм среднего арифметико-геометрического.* Записки Ленинградского Горного Инст. им. Г. В. Плеханова **43** (1964), № **3**, 9—25.

D. S. MITRINOVIĆ, P. S. BULLEN, P. M. VASIĆ

MEANS AND THEIR INEQUALITIES

I

This Monograph will consist of two volumes. The bulk of the material occurs in the first volume; the second, and smaller, volume will contain the theory of Gauss means, the axiomatics of means, means in the complex domain, integral means, as well a variety of means not covered in the first volume.

There are many books on inequalities aimed at the student or non-mathematician. They usually introduce the reader to a particular kind of inequality, such as geometric inequalities or mean inequalities. The reader of these books is given a feel for inequalities and is enabled to progress to the more advanced treatises. Such books exist in several languages. We mention only a few: in English: *An Introduction to Inequalities* by BECKENBACH and BELLMAN (1961), *Analytic Inequalites* by KAZARINOFF (1961) and *Geometric Inequalities* by BOTTEMA, ĐORĐEVIĆ, JANIĆ, MITRINOVIĆ and VASIĆ (1969); in Serbo-Croatian: *Nejednakosti* by MITRINOVIĆ (1965), and *Sredine* by MITRINOVIĆ and VASIĆ (1969); in Russian: *Neravenstva* by NEVJAZSKIĬ (1947), and *Neravenstva* by KOROVKIN (1952); and in Bulgarian: *Neravenstva* by MANOLOV and DOČEV (1967).

Books on inequalities aimed at the professional pure or applied mathematician are less common. The first such, that brought some order to this untidy field, is the classical *Inequalities* by HARDY, LITTLEWOOD and PÓLYA (1934). Important as this outstanding work was, and still is, it made no attempt at completeness. Rather it consists of the total knowledge of three front rank mathematicians in a field where each had made fundamental contributions. Extensive as this combined knowledge was there were inevitably certain lacunae; some important results, such as STEFFENSEN's inequality, were not mentioned at all; the works of certain schools of mathematicians were omitted; and many important ideas were not developed, appearing as exercises at the ends of various chapters. The later book of the same title by BECKENBACH and BELLMAN, appearing in 1961, repairs many of these ommissions. However this book is far from a complete coverage of the field, either in depth, or in scope. A book that attempts to cover most aspects of the subject, and where an attempt is made to give all results in their best possible form, together with either a full proof, or a sketch of the proof, together with references to where a full proof or proof can be found, is the recent *Analytic Inequalities* by MITRINOVIĆ (1970).

Due to the wideness of the topic of inequalities and to the variety of its applications none of the above mentioned books is complete on all of the topics discussed.

Most inequalities depend on many parameters and the natural domain for these parameters is not necessarily obvious, further this natural domain is not usually the widest possible range in which the inequality holds. Thus an author, even the most ambitious, is forced to choose; and then what is omitted from the conditions of an inequality maybe just what is needed for some particular applications. What appear to be needed are advanced works that pick some fairly restricted area from the vast subject of inequalities and treat it in depth. Such coherent parts exist; as HARDY, LITTLEWOOD and PÓLYA showed, the subject of inequalities is not just a collection of results. However to date no one seems to have written a treatise on some such limited but coherent area.

This Monograph takes as its subject means and inequalities related to them. Means are basic to the whole of the area of inequalities and to many of the applications of inequalities to other fields. To take one example, the basic geometric-arithmetic mean inequality can be found lurking, often in an almost impenetrable disguise, behind inequalities of all kinds. The idea of a mean is used extensively in probability and statistics, in the summation of series and integrals, to mention but a few of many of the applications.

The object of this monograph is to provide as complete an account of the properties of means that occur in the theory of inequalities as is within the authors' competence. This book finds its origins in the much more modest *Sredine* mentioned above, which gives an elementary account of this topic.

A full discussion will be given of the various means that occur in the current literature of inequalities, together with a history of the origin of the various inequalities connecting these means. A complete catalogue of all the important proofs of the basic results will be included, as these often indicate the many possible interpretations and applications that can be made. Also an attempt is made to discuss all the known inequalities involving means. An extensive bibliography for the whole monograph will be found at the end of the first volume.

It is in the nature of things that some omissions and errors will be made. The authors ask any mathematician whose results have been quoted inaccurately or incompletely, or any reader noticing errors or omissions to inform them. In this way the second volume can be used to repair major omissions and suitable corrections can be made in later editions. Since there are several authors we can adopt the philosophy of C. B. ALLENDORFER and C. O. OAKLEY from the foreword of their *Principles of Mathematics*: „It is hoped that the book is relatively free of errors, but each author blames the other for those that may be discovered".

It is intended to keep the account of means and their inequalities up to date between revisions by a periodical review of new results to be published in the Publications of the Electrical Engineering Faculty of the University of Belgrade, Series Mathematics and Physics, or in other journals.

May 1, 1977. D. S. MITRINOVIĆ, P. S. BULLEN, P. M. VASIĆ

Belgrade and Vancouver.

CONTENTS

INDEKS IMENA