UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 599 (1977), 1—59.

599. O NEKIM FUNKCIONALNIM NEJEDNAKOSTIMA*

Gradimir V. Milovanović

1. UVOD

1.1. Ovaj rad sastoji se iz sledećih poglavlja:

1. Uvod;
2. O MALET-HAMMONDovoj funkcionalnoj jednačini i odgovarajućoj funkcionalnoj nejednakosti;
3. O generalizacijama teoreme E. LANDAUa;
4. Neke integralne nejednakosti;
5. Neki otvreni problemi i mogućnosti daljih generalizacija;
6. Bibliografija.

Neka od ovih poglavlja podeljena su na odeljke.

1.2. U poglavlju **2.** određeno je opšte neprekidno rešenje funkcionale jednačine

$$\begin{vmatrix} F_0(x) & F_1(x) & \cdots & F_n(x) \\ a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & & a_n^{x_1} \\ \vdots & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_n^{x_n} \end{vmatrix} = 0,$$

pod sledećim pretpostavkama:

1° Nepoznate funkcije $F_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

2° $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$;

3° $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Korišćenjem ovog rezultata, za MALET-HAMMONDovu funkcionalnu jednačinu ([**3**])

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big) f(x_1, \ldots, x_n) = \Big(\prod_{k=0}^{n} a_k\Big) f(x_1 - 1, \ldots, x_n - 1)$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + 1, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

* Received May 26, 1977.

određeno je rešenje oblika

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} G_0(x) & G_1(x) & \cdots & G_n(x) \\ a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & & a_n^{x_1} \\ \vdots & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_n^{x_n} \end{vmatrix}.$$

Posmatrane su i neke opštije jednačine.

Takođe je posmatran skup od dve funkcionalne jednačine, od kojih je jedna MALET-HAMMONDova, a druga CAUCHYeva jednačina $f(X+Y)=f(X)f(Y)$ $(X,\ Y\in \mathbf{R}^n)$.

Neki od ovih rezultata objavljeni su u člancima [**1**] i [**4**].

U vezi sa funkcionalnim jednačinama nameće se i problem razmatranja odgovarajućih funkcionalnih nejednakosti. Tako, na primer, R. COOPER ([**58**]) razmatrao je funkcionalnu nejednakost

$$g(x+y) \leqq g(x) + g(y),$$

koja je u vezi sa CAUCHYevom jednačinom $g(x+y)=g(x)+g(y)$. J. E. WETZEL u [**59**] proučava nejednakost $f(x+y) \geqq f(x) f(y)$.

U novije vreme sve je veći broj radova koji tretiraju ovu problematiku ([**60**], [**61**], [**62**], [**63**], [**64**]). Neki od ovih rezultata nalaze primenu i u teoriji informacija.

U odeljku **2.3.** razmatrana je funkcionalna nejednakost

$$Af(x_1, \dots, x_n) \geqq Bf(x_1-1, \dots, x_n-1) + \sum_{k=1}^{n} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k+1, x_{k+1}, \dots, x_n), \tag{1.1}$$

gde je $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ i $A,\ B>0$.

Pod uslovom da f zadovoljava CAUCHYevu jednačinu

$$f(X+Y)=f(X)f(Y) \quad (X,\ Y\in \mathbf{R}^n).$$

određeno je opšte rešenje nejednakosti (1.1).

1.3. Poznata teorema E. LANDAUa ([**8**]) generalisana je od strane više autora u raznim pravcima. U ovom poglavlju data je jedna generalizacija ove teoreme i ona se odnosi na operatore u BANACHovom prostoru.

Na osnovu sugestije profesora P. R. BEESACKa (Canada) ovaj rezultat je dalje generalisan (teorema 3).

Slično je teoremom 2 generalisan i jedan rezultat V. G. AVAKUMOVIĆa i S. ALJANČIĆa ([**26**]).

Kako su ovi rezultati dosta opšti, to je specifikacijom prostora i operatora dobijen veći broj partikularnih rezultata.

U poslednjem odeljku ovog poglavlja date su i neke primene navedenog rezultata na operatore u funkcionalnim prostorima.

1.4. Četvrto poglavlje posvećeno je integralnim nejednakostima.

U prvom odeljku, jedan rezultat A. OSTROWSKOG ([**28**]), koji je u vezi sa rezultatima iz trećeg poglavlja, generalisan je za težinsku aritmetičku integralnu sredinu, a zatim su dobijeni rezultati preneti na funkcije više promenljivih. Takođe su dati analogni za težinsku geometrijsku integralnu sredinu.

U drugom odeljku razmatrana je nejednakost K. S. K. IYENGARA ([**35**])

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(b-a)\big(f(a)+f(b)\big)\right|\leqq\frac{M(b-a)^2}{4}-\frac{1}{4M}\big(f(b)-f(a)\big)^2, \tag{1.2}$$

koja važi pod uslovom da je f diferencijabilna funkcija na $[a, b]$ i $|f'(x)|\leqq M$.

Pri tome je, najpre, nejednakost (1.2), generalisana za težinsku aritmetičku integralnu sredinu pri čemu su uslovi za f oslabljeni.

Pretpostavljajući da je $|f^{(n+1)}(x)|\leqq M\,(n\geqq 1)$, nejednakost IYENGARA je dalje generalisana.

U odeljku **4.4.** date su neke generalizacije nejednakosti V. A. ZMOROVIČA ([**51**])

$$\int_{a-h}^{a+h}(f''(x))^2\,\mathrm{d}x\geqq\frac{3}{2h^3}\big(f(a+h)-2f(a)+f(a-h)\big)^2,$$

koja važi pod uslovom da je f dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na $[a-h,\ a+h]$.

Naime, pod izvesnim uslovima za g i Φ, dokazane su nejednakosti oblika

$$\int_{a-h}^{a+h} g(x)\,|f''(x)|^r\,\mathrm{d}x\geqq C_r(g;\,h)\,|\Delta|^r\qquad (r>1),$$

$$\int_{a-h}^{a+h} g(x)\,\Phi\big(f''(x)\big)\,\mathrm{d}x\geqq D_m(g;\,h)\,\Phi(\Delta)\qquad (m>1),$$

gde je

$$\Delta=\frac{1}{h^2}\big(f(a+h)-2f(a)+f(a-h)\big).$$

Na kraju ovog poglavlja date su neke primene dobijenih rezultata u numeričkoj integraciji i one se odnose na ocenu greške u nekim formulama za numeričko izračunavanje integrala.

1.5. U petom poglavlju izloženi su problemi koji su ostali otvoreni. Ukazano je i na mogućne generalizacije dobijenih rezultata.

1.6. U poglavlju Bibliografija, popisana je literatura koja je u tekstu citirana ili je korišćena kao opšta literatura.

1.7. Ovaj rad predstavlja skraćenu verziju doktorske disertacije odbranjene na Elektronskom fakultetu u Nišu. Rezultati koji su posebno publikovani, navedeni su bez dokaza.

*
* *

I ovom prilikom želim da se zahvalim profesoru dr D. S. MITRINOVIĆU, koji je rukovodio izradom ove teze i pružio mi dragocenu pomoć, kako diskusijom o pojedinim problemima tako i omogućavanjem korišćenja svoje obimne dokumentacije.

Isto tako zahvaljujem profesorima dr R. Ž. ĐORĐEVIĆU i dr P. M. VASIĆU, kao i profesoru dr B. CRSTICIU (Rumunija), koji su sa posebnom pažnjom čitali ovu tezu u rukopisu i dali mi niz korisnih saveta i sugestija i time doprineli konačnoj verziji ove teze.

2. O MALET-HAMMONDOVOJ FUNKCIONALNOJ JEDNAČINI I ODGOVARAJUĆOJ FUNKCIONALNOJ NEJEDNAKOSTI

2.1. O jednoj funkcionalnoj jednačini u obliku determinante

U ovom odeljku odredićemo opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine

$$(1.1)\qquad \begin{vmatrix} F_0(x) & F_1(x) & \cdots & F_n(x) \\ a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & & a_n^{x_1} \\ \vdots & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_n^{x_n} \end{vmatrix} = 0,$$

pod sledećim pretpostavkama:

1° Nepoznate funkcije $F_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

2° $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$,

3° $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Ako sa Δ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ označimo determinantu

$$\Delta_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & \cdots & a_{i-1}^{x_1} & a_{i+1}^{x_1} & \cdots & a_n^{x_1} \\ \vdots & & & & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_{i-1}^{x_n} & a_{i+1}^{x_n} & & a_n^{x_n} \end{vmatrix},$$

tj.

$$\Delta_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} e^{k_0 x_1} & e^{k_1 x_1} & \ldots & e^{k_{i-1} x_1} & e^{k_{i+1} x_1} & \ldots & e^{k_n x_1} \\ \vdots & & & & & & \\ e^{k_0 x_n} & e^{k_1 x_n} & & e^{k_{i-1} x_n} & e^{k_{i+1} x_n} & & e^{k_n x_n} \end{vmatrix},$$

gde smo stavili $k_i = \log a_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, funkcionalna jednačina (1.1) postaje

$$(1.2)\qquad \sum_{i=1}^{n} (-1)^i F_i(x)\, \Delta_i(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Za jednačinu (1.1), tj. (1.2), važe sledeće dve teoreme (videti **[1]**, **[39]**, **[67]**).

Teorema 1. *Ako $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ne čine geometrijsku progresiju, funkcionalna jednačina* (1.1) *u skupu neprekidnih funkcija ima samo trivijalna rešenja $F_i(x) \equiv 0$* $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Teorema 2. *Ako* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *čine geometrijsku progresiju sa količnikom* q, *funkcionalna jednačina* (1.1) *ima opšte neprekidno rešenje određeno sa*

$$F_0(x)=F(x),\quad F_j(x)\equiv 0\quad (j=1,\ldots,n-1),\quad F_n(x)=(-1)^{n-1}q^x F(x),$$

gde je F *proizvoljna neprekidna funkcija sa vrednostima u* $\mathbf{R}$.

2.2. O Malet-Hammondovoj funkcionalnoj jednačini i nekim njenim generalizacijama

J. C. Malet (videti [3]) postavio je sledeći problim:

Dokazati da funkcija $x\mapsto f(x)=b^x-a^x$ zadovoljava jednačinu

$$(a+b)f(x)=abf(x-1)+f(x+1)\qquad (a\neq b).$$

Rešavajući ovaj problem, J. Hammond ([3]) dokazao je opštiji rezultat:

Funkcija f, definisana sa

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & & a_n^{x_1}\\ \vdots & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_n^{x_n}\end{vmatrix}\qquad (a_i>0;\quad a_i<a_j \Leftrightarrow i<j), \tag{2.1}$$

zadovoljava jednačinu

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)f(x_1,\ldots,x_n)=\Big(\prod_{k=0}^{n} a_k\Big)f(x_1-1,\ldots,x_n-1)$$
$$+\sum_{k=1}^{n} f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+1,x_{k+1},\ldots,x_n). \tag{2.2}$$

U ovom odeljku posmatraćemo funkcionalnu jednačinu (2.2), gde je $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $a_i>0$ $(i=0,1,\ldots,n)$, $a_i<a_j \Leftrightarrow i<j$.

Funkcija f, definisana sa (2.1), je jedno partikularno rešenje jednačine (2.2), koju smo iz tih razloga nazvali Malet-Hammondovom.

Nije teško pokazati da je i funkcija f, data sa

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n\\ a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & & a_n^{x_1}\\ \vdots & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_n^{x_n}\end{vmatrix}, \tag{2.3}$$

gde su C_i $(i=0,1,\ldots,n)$ proizvoljne realne konstante, takođe rešenje jednačine (2.2).

Posmatrajući rešenje (2.3) prirodno se nameće problem da li se umesto konstanti $C_i\,(i=0, 1, \ldots, n)$ mogu odrediti neke opštije funkcije

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto g_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i=0, 1, \ldots, n),$$

tako da je i funkcija f, data sa

$$f(x_1, \ldots, x_u) = \begin{vmatrix} g_0(x_1, \ldots, x_n) & g_1(x_1, \ldots, x_n) & \cdots & g_n(x_1, \ldots, x_n) \\ a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & & a_n^{x_1} \\ \vdots & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_n^{x_n} \end{vmatrix}$$

rešenje funkcionalne jednačine (2.2).

S obzirom da je jednačina (2.2) simetrična po svim argumentima x_i, prirodno je tražiti rešenja za g_i u klasi simetričnih funkcija.

Navedeni problem rešili smo potpuno u klasi neprekidnih funkcija koje zavise od zbira argumenata, tj.

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = G_i(x_1 + \cdots + x_n) \qquad (i=0, 1, \ldots, n).$$

Naravno, ostao je otvoren problem da li u klasi nekih opštijih simetričnih funkcija postoji rešenje navedenog problema.

Dakle, odredićemo opšte rešenje funkcionalne jednačine (2.2) oblika

$$(2.4) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(x;\, G_0, G_1, \ldots, G_n),$$

gde su uvedene oznake

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad A = \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad \Delta(x;\, F_0, F_1, \ldots, F_n) = \begin{vmatrix} F_0(x) & F_1(x) & \cdots & F_n(x) \\ a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & & a_n^{x_1} \\ \vdots & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_n^{x_n} \end{vmatrix}.$$

Teorema 3. *Ako su funkcije $H_i\,(i=0, 1, \ldots, n)$ opšta neprekidna rešenja jednačine*

$$(2.5) \qquad \Delta(x;\, H_0, \ldots, H_n) = 0,$$

funkcionalna jednačina (2.2) *ima „opšte rešenje“*[1] *dato sa*

$$(2.6) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(x;\, G_0, \ldots, G_n),$$

ako i samo ako svaka od funkcija $G_i\,(i=0, 1, \ldots, n)$ zadovoljava odgovarajuću jednačinu

$$(2.7) \qquad (A-a_i)\, G_i(x+1) - A G_i(x) + a_i G_i(x-n) = H_i(x) \qquad (i=0, 1, \ldots, n).$$

[1] Ovde se pod „opštim rešenjem“ podrazumeva opšte rešenje oblika (2.4).

Jednačina (2.5) je razmatrana u prethodnom odeljku. Neprekidna rešenja ove jednačine su (videti teoremu 1 i teoremu 2):

1°

$$
\begin{aligned}
&H_0(x) = H(x),\\
(2.8)\qquad &H_i(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1),\\
&H_n(x) = (-1)^{n-1} q^x H(x),
\end{aligned}
$$

gde je H proizvoljna neprekidna funkcija definisana na $\mathbf{R}$ i sa vrednostima u $\mathbf{R}$, ako brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ čine geometrijsku progresiju, gde je $a_i = q^i a_0$ $(i = 1, \ldots, n)$, ili

2° $H_i(x) \equiv 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$,

ako brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ne čine geometrijsku progresiju.

Na osnovu prethodnog, može se zaključiti da bi i za određivanje funkcija G_i, kao rešenje jednačina (2.7), trebalo razlikovati ova dva slučaja. Pokazaćemo da za to nema potrebe, tj. da je dovoljno uzeti $H_i(x) \equiv 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Korišćenjem u matematičkoj literaturi poznatog operatora E^r, definisanog pomoću

$$E^0 h(x) = h(x), \quad Eh(x) = h(x+1), \quad E^r h(x) = E(E^{r-1} h(x)) \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

jednačine (2.7) mogu se predstaviti u obliku

$$\Phi_i(E)\, G_i(x) = H_i(x+n) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{2.9}$$

gde je

$$\Phi_i(E) = (A - a_i)\, E^{n+1} - A E^n + a_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Opšta rešenja jednačina (2.9) data su pomoću

$$G_i(x) = g_i(x) + \tilde{g}_i(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

gde su $\tilde{g}_i$ partikularna rešenja jednačina (2.9), a g_i opšta rešenja odgovarajućih homogenih jednačina

$$\Phi_i(E)\, G_i(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= \Delta(x;\, g_0 + \tilde{g}_0, \ldots, g_n + \tilde{g}_n)\\
&= \Delta(x;\, g_0, \ldots, g_n) + \Delta(x;\, \tilde{g}_0, \ldots, \tilde{g}_n).
\end{aligned}
$$

Lema 1. *Ako je* $\Delta(x;\, H_0, \ldots, H_n) = 0$ *i ako su* $\tilde{g}_0, \ldots, \tilde{g}_n$ *partikularna rešenja jednačina* (2.9), *tada je*

$$\Delta(x;\, \tilde{g}_0, \ldots, \tilde{g}_n) = 0. \tag{2.10}$$

Teorema 4. *Ako su* $\alpha_{0i}(x)$ *i* $\alpha_{ki}(x)$ *proizvoljne periodične konstante*[1] *i* λ_{ki} $(k=1, \ldots, n)$ *koreni jednačina*

$$\frac{A-a_i}{a_i}\lambda^n-\lambda^{n-1}-\cdots-\lambda-1=0 \qquad (i=0, 1, \ldots, n),$$

„opšte rešenje" jednačine (2.2) *je*

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\Delta(x;\ G_0, \ldots, G_n),$$

gde su funkcije G_i *određene sa*

$$G_i(x)=\alpha_{0i}(x)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}(x)\,\lambda_{ki}{}^x \qquad (i=0, 1, \ldots, n).$$

Primer. Neka $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ i neka su a, b, c međusobno različiti pozitivni brojevi. Opšte rešenje oblika (2.4) funkcionalne jednačine

$$(a+b+c)f(x, y)=abc\,f(x-1, y-1)+f(x+1, y)+f(x, y+1)$$

je

$$f(x, y)=\begin{vmatrix} G_1(x+y) & G_2(x+y) & G_3(x+y) \\ a^x & b^x & c^x \\ a^y & b^y & c^y \end{vmatrix},$$

gde su funkcije G_i $(i=1, 2, 3)$, sa vrednostima u $\mathbf{R}$, date sa

$$G_1(x)=\alpha_1(x)+\beta_1(x)\left(\frac{\sqrt{a^2+4a(b+c)}+a}{2(b+c)}\right)^x+\gamma_1(x)\left(\frac{\sqrt{a^2+4a(b+c)}-a}{2(b+c)}\right)^x\cos\pi x,$$

$$G_2(x)=\alpha_2(x)+\beta_2(x)\left(\frac{\sqrt{b^2+4b(c+a)}+b}{2(c+a)}\right)^x+\gamma_2(x)\left(\frac{\sqrt{b^2+4b(c+a)}-b}{2(c+a)}\right)^x\cos\pi x,$$

$$G_3(x)=\alpha_3(x)+\beta_3(x)\left(\frac{\sqrt{c^2+4c(a+b)}+c}{2(a+b)}\right)^x+\gamma_3(x)\left(\frac{\sqrt{c^2+4c(a+b)}-c}{2(a+b)}\right)^x\cos\pi x,$$

i $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1, 2, 3)$ realne periodične konstante.

Sada ćemo ukazati na neke generalizacije dobijenih rezultata. Naime, posmatraćemo funkcionalne jednačine

$$\text{(2.10)} \qquad af(x_1, \ldots, x_n)=\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)f(x_1-1, \ldots, x_n-1)+\sum_{k=1}^{n}f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k+m, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

$$\text{(2.11)} \qquad af(x_1, \ldots, x_n)=\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)^r f(x_1-r, \ldots, x_n-r)+\sum_{k=1}^{n}f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k+m, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

gde je

$$0<a_0<a_1<\cdots<a_n;\quad m, r\in\mathbf{N};\quad a\in\mathbf{R};\quad f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}.$$

Ako stavimo $A_m=a_0{}^m+a_1{}^m+\cdots+a_n{}^m$, važe sledeći rezultati.

[1] Periodična konstanta $C(x)$ je funkcija sa periodom jedan, tj. $C(x+1)=C(x)$ (videti [5] i [6]).

Teorema 5. *Ako su $a_{ki}(x)$ proizvoljne periodične konstante i λ_{ki} koreni jednačina*

$$(A_m - a_i^m)\,\lambda^{m+n} - a\lambda^n + a_i = 0 \qquad (i=0,1,\ldots,n),$$

„opšte rešenje" jednačine (2.10) *je*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \Delta(x;\, G_0,\ldots,G_n),$$

gde su funkcije G_i definisane sa

$$G_i(x) = \sum_{k=1}^{n+m} a_{ki}(x)\,\lambda_{ki}^{\,x} \qquad (i=0,1,\ldots,n).$$

Teorema 6. *Ako su funkcije H_i $(i=0,1,\ldots,n)$ opšta neprekidna rešenja jednačine*

$$\Delta(x;\, H_0,\ldots,H_n) = 0,$$

funkcionalna jednačina (2.11) *ima „opšte rešenje" dato sa*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \Delta(x;\, G_0,\ldots,G_n),$$

ako i samo ako funkcije G_i zadovoljavaju jednačine

$$(A_m - a_i^m)\,G_i(x+m) - aG_i(x) + a_i^r\,G_i(x-nr) = H_i(x).$$

Posmatrajmo sada skup funkcionalnih jednačina

$$\begin{aligned} Af(x_1,\ldots,x_n) &= Bf(x_1-1,\ldots,x_n-1) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} f(x_1,\ldots,x_{k-1},\, x_k+1,\, x_{k+1},\ldots,x_n), \qquad (2.12) \\ f(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) &= f(x_1,\ldots,x_n)\,f(y_1,\ldots,y_n), \end{aligned}$$

gde je $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ i $A, B > 0$.

Odredićemo opšte netrivijalno rešenje skupa ovih jednačina.

Ako uvedemo oznake

$$X = (x_1,\ldots,x_n), \quad O = (0,\ldots,0), \quad f(X) = f(x,\ldots,x_n);$$

$$e_1 = (1,0,\ldots,0), \quad e_2 = (0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ e_n = (0,0,\ldots,1);$$

$$e = \sum_{k=1}^{n} e_k = (1,1,\ldots,1),$$

skup jednačina (2.12) dobija oblik

$$Af(X) = Bf(X-e) + \sum_{k=1}^{n} f(X+e_k) \qquad (A, B > 0), \tag{2.13}$$

$$f(X+Y) = f(X)\,f(Y). \tag{2.14}$$

Teorema 7. *Opšte netrivijalno rešenje* $X \mapsto f(X)$ *jednačine* (2.14), *za koje je*

$$A = \frac{B}{\prod_{k=1}^{n} b_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad (b_k = f(e_k)), \tag{2.15}$$

rešenje je i jednačine (2.13).

Dokaz. Neka je $X \mapsto f(X)$ rešenje jednačine (2.14). Na osnovu (2.14), jednačina (2.13) postaje

$$Af(X) = Bf(X)f(-e) + \sum_{k=1}^{n} f(X)f(e_k).$$

Kako je $f(X) \neq 0$, poslednja jednakost dobija oblik

$$A = Bf(-e) + \sum_{k=1}^{n} f(e_k), \quad \text{tj.} \quad A = \frac{B}{\prod_{k=1}^{n} f(e_k)} + \sum_{k=1}^{n} f(e_k),$$

jer je $f(-e)f(e) = f(O) = 1$ i $f(e) = \prod_{k=1}^{n} f(e_k)$.

Ovim je završen dokaz teoreme 7.

Primedba 1. Skup vrednosti rešenja jednačine (2.14) koja zadovoljavaju (2.15) nije prazan. Da bismo ovo dokazali, dovoljno je pokazati da za dato A i B ($A, B > 0$) jednačina (2.15) može imati pozitivna rešenja po b_k ($k = 1, \ldots, n$), s obzirom da su netrivijalna rešenja Cauchyeve jednačine (2.14) pozitivna (videti [7]).

Neka je $n = 1$. Tada se (2.15) svodi na

$$b_1^2 - Ab_1 - B = 0.$$

S obzirom na učinjene pretpostavke za A i B, poslednja jednačina ima po b_1 jedno rešenje koje je pozitivno.

Neka je sada $n > 1$. Stavljajući $A' = A - \sum_{k=2}^{n} b_k$, $B' = B \Big/ \left(\prod_{k=2}^{n} b_k\right)$, jednakost (2.15) postaje

$$b_1^2 + A'b_1 - B' = 0. \tag{2.16}$$

Kako je uvek moguće izabrati pozitivne brejeve b_k ($k = 2, \ldots, n$), takve da je $A' = A - \sum_{k=2}^{n} b_k > 0$, jednačina (2.16), kao i u slučaju $n = 1$, ima pozitivno rešenje za b_1.

Sličan problem može se postaviti i za skup jednačina

$$Af(X) = Bf(X - e) + \sum_{k=1}^{n} f(X + e_k), \tag{2.17}$$

$$f(X + Y) = f(X) + f(Y). \tag{2.18}$$

Tada iz (2.17) i (2.18) sleduje

$$Af(X)=B\big(f(X)-f(e)\big)+\sum_{k=1}^{n} f(e_k)+nf(X),$$

tj.

$$(A-B-n)f(X)=(1-B)f(e),$$

jer je $f(-e)=-f(e)$ i $\sum_{k=1}^{n} f(e_k)=f\left(\sum_{k=1}^{n} e_k\right)=f(e)$.

Na osnovu prethodnog, zaključujemo da su rešenja funkcionalne jednačine (2.18) istovremeno i rešenja jednačine (2.17) ako je $B=1$ i $A=n+1$.

PRIMEDBA 2. Ako je $A-B=n$, jednačina (2.17) ima konstantno rešenje, tj. $f(X)=C\,(C=\text{const})$.

2.3. Funkcionalna nejednakost koja je u vezi sa Malet-Hammondovom funkcionalnom jednačinom

U ovom odeljku posmatraćemo funkcionalnu nejednakost

(3.1) $$Af(x_1, \ldots, x_n)\geqq Bf(x_1-1, \ldots, x_n-1)$$
$$+\sum_{k=1}^{n} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k+1, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

gde je $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ i $A, B>0$.

Sa S označićemo skup netrivijalnih rešenja CAUCHYeve funkcionalne jednačine $f(X+Y)=f(X)f(Y)$ $(f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R})$.

Saglasno uvedenim oznakama u **2.2**, nejednakost (3.1) se može predstaviti u obliku

(3.2) $$Af(X)\geqq Bf(X-e)+\sum_{k=1}^{n} f(X+e_k).$$

Teorema 8. *Ako pozitivni brojevi $b_k\,(k=1, \ldots, n)$ zadovoljavaju jednakost*

(3.3) $$\left(A-\sum_{k=1}^{n} b_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)\geqq B$$

i ako je $b_k=f(e_k)$ $(k=1, \ldots, n)$ $(f\in S)$, tada je $X\mapsto f(X)$ rešenje funkcionalne nejednakosti (3.2).

Dokaz je sličan dokazu teoreme 7.

PRIMEDBA 3. Neprekidna rešenja nejednakosti (3.2), tj. nejednakosti (3.1) u skupu S su oblika

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right),$$

gde realni brojevi $\lambda_k\,(k=1, \ldots, n)$ zadvoljavaju nejednakost

$$\left(A-\sum_{k=1}^{n} \exp(\lambda_k)\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)\geqq B.$$

3. O GENERALIZACIJAMA TEOREME E. LANDAUA

3.1. Teorema E. Landaua i neke njene generalizacije

E. LANDAU je 1913. godine u radu [**8**] dokazao sledeću teoremu.
Teorema A. *Neka je* $x \mapsto f(x)$ *realna funkcija koja na intervalu* I, *dužine ne manje od* 2, *ispunjava uslove* $|f(x)| \leqq 1$ *i* $|f''(x)| \leqq 1$. *Tada je*

$$|f'(x)| \leqq 2 \tag{1.1}$$

za svako $x \in I$, *gde je konstanta* 2 *najbolja moguća.*

Bez smanjenja opštosti u teoremi A može se uzeti $I=[0, 2]$. Funkcija $x \mapsto f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$ pokazuje da u (1.1) može da važi znak jednakosti.

Od strane više autora teorema A je generalisana u više pravaca.

Jedan opštiji problem o nejednakostima sa izvodima, kako saznajemo iz [**9**, str. 138], postavili su 1914. godine G. H. HARDY i J. E. LITTLEWOOD. Naime, ako su k i n prirodni brojevi ($k<n$), $I=(-\infty, +\infty)$, $\|f\|_I=\sup\limits_{x \in I}|f(x)|$, problem je odrediti najbolju moguću konstantu $C_{n,k}$ u nejednakosti

$$\|f^{(k)}\|_I \leqq C_{n,k}\|f\|_I^{\frac{n-k}{n}}\|f^{(n)}\|_I^{\frac{k}{n}}. \tag{1.2}$$

Navedeni problem razmatrao je veliki broj autora (J. HADAMARD [**10**], G. E. ŠILOV [**11**], A. GORNY [**12**], [**13**], [**14**], [**15**] i drugi).

Potpuno rešenje ovog problema dao je A. KOLMOGOROV (videti [**16**] i **17**]), dokazujući da je

$$C_{n,k}=\frac{K_{n-k}}{K_n^{1-k/n}}, \text{ gde je } K_n=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k(n+1)}}{(2k+1)^{n+1}}.$$

Sa konstantom K_n (često se naziva konstanta FAVARDa), kako kaže S. M. NIKOLJSKIĬ u knjizi [**65**, str. 199—200], povezani su rezultati mnogih ekstremalnih problema u teoriji funkcija.

Još neki rezultati u vezi sa ovim problemom mogu se naći u člancima [**18**] i [**19**], kao i u monografiji [**9**, str. 138—140].

Za interval $I=(0,+\infty)$, problem određivanja konstante $C_{n,k}$ u (1.2) tretirao je S. B. STEČKIN [**66**].

Sličan problem razmatran je i za funkcije iz prostora $L^p\,(=L^p(I))$, gde je I realna prava ili poluprava $(0, +\infty)$.

Teorema A generalisana je i u sledećem interesantnom pravcu ([**20**]).

Teorema B. *Neka je A infinitezimalni generator jako neprekidne polugrupe $\{T(t)\,|\,t>0\}$ linearno ograničenih operatora*[1] *na Banachovom prostoru X. Neka su M i ω realni brojevi takvi da je*

$$\|T(t)\|\leqq Me^{\omega t} \quad (\forall t>0).$$

Tada za svako $x\in \operatorname{Dom}(A^2)$ $\big((A-\omega I)^2 x\neq 0\big)$ važi nejednakost

$$\|(A-\omega I)x\|^2\leqq 2M(1+M)\cdot\|x\|\cdot\|(A-\omega I)^2 x\|.$$

Teoremi B prethode rezultati izloženi u radovima [**24**] i [**25**].

Sada ćemo navesti neke generalizacije teoreme A, koje su u vezi sa ovim radom.

1° J. D. Kečkić ([**9**, str. 381—382]) dao je sledeći rezultat.

Teorema C. *Neka je $x\mapsto f(x)$ realna funkcija koja na intervalu I dužine ne manje od $a\,(a>0)$, ispunjava uslove $|f(x)|\leqq 1$ i $|f''(x)|\leqq 1$. Tada je*

$$|f'(x)|\leqq\frac{2}{a}+\frac{a}{2} \qquad (\forall x\in I).$$

Teorema C predstavlja uopštenje teoreme A i na nju se svodi za $a=2$.

2° U radu [**26**] V. G. Avakumović i S. Aljančić geometrijskim razmatranjima dokazali su sledeće teoreme.

Teorema D. *Iz $|\Phi''(x)|\leqq 1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ sleduje*

$$|\Phi'(x)-\Phi(1)+\Phi(0)|\leqq\frac{1}{2}-x+x^2 \qquad (\forall x\in[0,1]).$$

Polinom $x\mapsto\frac{1}{2}-x+x^2$ je najbolje mogući.

Teorema E. *Iz $|\Phi''(x)|\leqq 1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ i $\Phi'(0)=\Phi'(1)$ sleduje*

$$|\Phi'(x)-\Phi(1)+\Phi(0)|\leqq\frac{1}{4} \qquad (\forall x\in[0,1]),$$

gde je konstanta $\frac{1}{4}$ najbolja mogućna.

3° I. B. Lacković i M. S. Stanković u radu [**27**] dokazali su sledeću teoremu.

Teorema F. *Neka funkcija $f\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ definisana na skupu*

$$K_n=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,0\leqq x_i\leqq a,\quad a>0,\quad i=1,\ldots,n\}$$

ispunjava uslove:

---

[1] Videti literaturu [**21**], [**22**], [**23**].

a) $|f(x_1, \ldots, x_n)| \leqq 1$ *za svako* $(x_1, \ldots, x_n) \in K_n$;

b) Svi njeni izvodi prvog reda su neprekidni na K_n, *a svi izvodi drugog reda neprekidni na skupu*

$$\mathring{K}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid 0 < x_i < a,\ i = 1, \ldots, n\} ;$$

c) $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqq 1$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *za svako* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathring{K}_n$.

Tada je

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqq \frac{2}{a} + n^2 \frac{a}{2}$$

za svako $(x_1, \ldots, x_n) \in K_n$.

U istom radu [27] navedena je primedba D. D. Adamovića bez dokaza, koja predstavlja generalizaciju teoreme *F*. Iskazana u obliku teoreme, ta primedba glasi:

Teorema G. *Neka funkcija* $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *definisana na skupu*

$$L_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_i \leqq x_i \leqq b_i,\quad a_i < b_i\ (1 \leqq i \leqq n)\}$$

ispunjava uslove:

a) $|f(x_1, \ldots, x_n)| \leqq 1$ *za svako* $(x_1, \ldots, x_n) \in L_n$;

b) Svi njeni izvodi prvog reda su neprekidni na L_n *i diferencijabilni na skupu*

$$\mathring{L}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_i < x_i < b_i,\ 1 \leqq i \leqq n\};$$

c) $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqq 1$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *za svako* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathring{L}_n$.

Tada za svako $(x_1, \ldots, x_n) \in L_n$ *važi nejednakost*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqq 2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

Za $(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$, $(b_1, \ldots, b_n) = (a, \ldots, a)$ *teorema G se svodi na teoremu F.*

4° U radu [28] A. Ostrowski dokazao je sledeći rezultat.

Teorema H. *Neka je* $x \mapsto f(x)$ *diferencijabilna funkcija u intervalu* (a, b) *i neka je, u* (a, b) $|f'(x)| \leqq N$. *Tada je, za svako* $x \in (a, b)$,

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqq \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right)(b-a)\,N.$$

Primedba. Teoreme D i H su ekvivalentne. Za

$$\Phi(t) = (b-a)^{-1} N^{-1} \int_0^t f(a + (b-a)\,s)\,ds$$

teorema D se svodi na teoremu H. S druge strane, ako se u teoremu H stavi $f(x) = \Phi'(x)$, $N = 1$, $a = 0$, $b = 1$ dooija se teorema D.

3.2. Neke nove generalizacije teoreme E. Landaua

U ovom odeljku daćemo neke generalizacije teoreme A i one se odnose na operatore u BANACHovom prostoru (videti [29] i [39]).

Neka su X i Y BANACHovi prostori. Ako $a, b \in X\, (a \neq b)$, definišimo funkcionelu $g: X \to \mathbf{R}^+$ na sledeći način

$$g(x) = \|x-a\|^2 + \|b-x\|^2 \qquad (x \in X).$$

Neka je osim toga $D \subset \{x \mid g(x) \leq \|b-a\|^2,\ x \in X\}$ konveksan skup takav da $a, b \in \bar{D}$, gde je $\bar{D}$ zatvorenje (adherencija) od D.

Teorema 1. *Ako je $F: X \to Y$ dvaput Fréchet-diferencijabilan operator na $\bar{D}$, i ako je*

$$\|F(x) \leq M \qquad (\forall x \in \bar{D}) \tag{2.1}$$

i

$$\|F''_{(a)}(h, h)\| \leq N \|h\|^2 \qquad (\forall h \in X \wedge \forall a \in D),$$

tada je

$$\|F'_{(x)}(b-a)\| \leq 2M + \frac{N}{2} g(x) \leq 2M + \frac{N}{2} \|b-a\|^2$$

za svako $x \in \bar{D}$

PRIMEDBA. Teorema 1 ostaje u važnosti ako se uslov (2.1) zameni slabijim nslovom

$$\|F(b) - F(a)\| \leq 2M.$$

Kako je teorema 1 dosta opšta, to ćemo specifikacijom prostora X i Y i operatora $F: X \to Y$ dobiti nekoliko partikularnih rezultata, od kojih su neki poznati. Te rezultate iskazaćemo u obliku posledica.

Posledica 1. *Ako je $X = Y = \mathbf{R}$, $\|x-y\| = |x-y|$ $(x, y \in \mathbf{R})$, $F = f$, $M = 1$, $N = 1$, $D = \{x \mid x \in (\alpha, \beta),\ 0 < a \leq \beta - \alpha\}$, iz teoreme 1 sleduje teorema C.*

Posledica 2. *Neka je $D = \{x \mid a < x < b\}$, $h > 0$ i $x \mapsto f(x)$ diferencijabilna funkcija na $[a, b+h]$ takva da je $|f(x)| \leq 1$ $(\forall \in [a, b+h])$ i $|\Delta_h f'(x)| \leq 1$ $(\forall x \in D)$, gde je $\Delta_h g(x) = \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x))$. Tada je*

$$|\Delta_h f(x)| \leq \frac{2}{b-a} + \frac{b-a}{2} \qquad (\forall x \in [a, b]).$$

Za dokaz posledice 2 treba u teoremu 1 staviti $X = Y = \mathbf{R}$, $\|x-y\| = |x-y|$,

$$F(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt \quad (a \leq x \leq b).$$

Ovaj rezultat predstavlja jedan analogon teoremi C.

Posledica 3. *Neka je*

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad a = (a_1, \ldots, a_n) \quad b = (b_1, \ldots, b_n) \quad (a_i < b_i;\ i = 1, \ldots, n)$$

i

$$D \subset \left\{(x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i - x_i|\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i|\right)^2\right\}$$

konveksan skup takav da $a, b \in \bar{D}$.

Ako je $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *dvaput diferencijabilna funkcija na* $\bar{D}$, *koja zadovoljava uslove*

$$|f(x_1, \ldots, x_n)| \leqq M \quad (\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \bar{D})$$

i

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqq N \quad (\forall (x_1, \ldots, x_n) \in D; \quad i, j = 1, \ldots, n), \tag{2.2}$$

tada je

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqq 2M + \frac{N}{2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i - x_i|\right)^2\right\}$$

$$\leqq 2M + \frac{N}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

za svako $(x_1, \ldots, x_n) \in \bar{D}$.

Ako u teoremi 1 stavimo $X = \mathbf{R}^n$, $Y = \mathbf{R}$, $F(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$ i

$$\|x - \bar{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}_i| \; (x, \bar{x} \in X), \quad \|y - \bar{y}\| = |y - \bar{y}| \quad (y, \bar{y} \in Y),$$

dobija se tvrđenje posledice 3.

Napomenimo da u ovom slučaju, iz (2.2) sleduje

$$\|F''_{(x)}(h, h)\| = \left|\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j\right|$$

$$\leqq \sum_{i,j} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| \cdot |h_i| \cdot |h_j|$$

$$\leqq N\left(\sum_i |h_i|\right)^2 = N\|h\|^2$$

za svako $x \in D$ i svako $h \in X$.

Primedba. Za $M = 1$, $N = 1$, $D = \{x \mid a_i < x_i < b_i, \; (i = 1, \ldots, n)\}$, posledica 3 se svodi na teoremu G.

Teorema 2. *Neka je* $F: X \to Y$ *dvaput Fréchet-diferencijabilan operator na* $\bar{D}$ *koji zadovoljava uslov*

$$\|F''_{(x)}(h, h)\| \leqq N\|h\|^2 \quad (\forall h \in X \wedge \forall \alpha \in D).$$

Tada je

$$\|F'_{(x)}(b - a) - F(b) + F(a)\| \leqq \frac{N}{2}\{\|x - a\|^2 + \|b - x\|^2\}$$

za svako $x \in \bar{D}$.

Neke posledice teoreme 2 su:

Posledica 4. *Neka je*

$$x=(x_1, \ldots, x_n), \quad a=(a_1, \ldots, a_n), \quad b=(b_1, \ldots, b_n) \quad (a_i<b_i; \quad i=1, \ldots, n)$$

i

$$D \subset \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \,\Big|\, \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i-a_i| \Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i-x_i| \Big)^2 < \Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i-a_i| \Big)^2 \right\}$$

konveksan skup takav da $a, b \in \bar{D}$.

Ako je $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *dvaput diferencijabilna funkcija na* $\bar{D}$ *i*

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leqq N \quad (\forall (x_1, \ldots, x_n) \in D; \ i, j=1, \ldots, n),$$

tada za svako $(x_1, \ldots, x_n) \in \bar{D}$ *važi nejednakost*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i-a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} - f(b_1, \ldots, b_n) + f(a_1, \ldots, a_n) \right| \leqq \frac{N}{2} \left\{ \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i-a_i| \Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i-x_i| \Big)^2 \right\}. \tag{2.3}$$

Ako se u teoremi 2 stavi $X=\mathbf{R}^n$, $Y=\mathbf{R}$, $F(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ i

$$\|x-\bar{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i-\bar{x}_i| \quad (x, \bar{x} \in X), \quad \|y-\bar{y}\| = |y-\bar{y}| \quad (y, \bar{y} \in Y)$$

dobija se tvrđenje posledice 4.

Primedba. Za $N=1$ i $D=\{x \mid a_i<x_i<b_i \quad (i=1, \ldots, n)\}$ (2.3) se svodi na

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i-a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} - f(b_1, \ldots, b_n) + f(a_1, \ldots, a_n) \right| \leqq \frac{1}{2} ((Z-A)^2 + (B-Z)^2) = \frac{1}{2} (A^2+B^2) - (A+B) Z + Z^2,$$

gde je

$$A=\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad B=\sum_{i=1}^{n} b_i, \quad Z=\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ovaj rezultat predstavlja jednu generalizaciju teoreme D.

Posledica 5. *Ako je* $X=Y=\mathbf{R}$, $\|x-y\|=|x-y|$ $(x, y \in \mathbf{R})$, $D=\{x \mid a<x<b;$ $a, b \in \mathbf{R}\}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, *gde je f diferencijabilna funkcija definisana na* $[a, b]$ *i* $|f'(x)| \leqq N$, *za svako* $x \in D$, *iz teoreme 2 sleduje da tvrđenje teoreme H važi za svako* $x \in [a, b]$.

Posledica 6. *Neka je* $x \mapsto f(x)$ *dva puta diferencijabilna funkcija definisana na segmentu* $[a, b]$ *i neka je*

$$|(c-x) f''(x)| \leqq M \quad (M>0; \ \forall x \in (a, b)), \tag{2.4}$$

gde je $c \in [a, b]$. *Tada za svako* $x \in [a, b]$ *važi nejednakost*

$$(2.5)\qquad \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{(c-a)\,f(a)+(b-c)\,f(b)}{b-a}+(c-x)\,f'(x)\right)\right|$$
$$\leqq \frac{M}{4\,(b-a)}\left((x-a)^2+(b-x)^2\right).$$

Ako stavimo $x=c=\dfrac{pa+qb}{p+q}$ $(p,\ q\geqq 0,\ p+q>0)$ gde su p i q dati brojevi, iz (2.5) sleduje nejednakost

$$(2.6)\qquad \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)+\frac{qf(a)+pf(b)}{p+q}\right)\right|\leqq\frac{M\,(b-a)}{4}\,\frac{p^2+q^2}{(p+q)^2}.$$

Vodeći računa o uslovu (2.4) i dajući neke posebne vrednosti za p i q u (2.6), zaključujemo da važe sledeće implikacije:

1° $|(x-a)f''(x)|\leqq M \vee |(b-x)f''(x)|\leqq M \Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)\right|\leqq\frac{M\,(b-a)}{4};$$

2° $\left|\left(\dfrac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\right|\leqq M \Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right|\leqq\frac{M\,(b-a)}{8}.$$

Da bismo dokazali nejednakost (2.5) u teoremi 2, treba staviti:

$$X=Y=\mathbf{R},\quad D=\{x\mid a<x<b\},\quad \|x-y\|=|x-y|\quad (x,\ y\in\mathbf{R}),$$

a operator F definisati pomoću

$$F(x)=\int_c^x\left(\frac{x+c}{2}-t\right)f'(t)\,\mathrm{d}t^{1)}.$$

Kako je

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(c)\right)+\frac{c-x}{2}f'(x),$$

$$F''(x)=\frac{c-x}{2}f''(x),$$

1) $F(x)=\dfrac{c-x}{2}\left(f(c)+f(x)\right)+\displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

$$F(a)=\frac{c-a}{2}\big(f(c)+f(a)\big)-\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$F(b)=-\frac{b-c}{2}\big(f(c)+f(b)\big)+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$|F''(x)|=\frac{1}{2}|(c-x)f''(x)|\leqq\frac{M}{2}=N,$$

tvrđenje teoreme 2 se svodi na (2.5).

Sledeća teorema je generalizacija teoreme 1.

Teorema 3. *Neka je F konveksan skup takav da je* $a, b\in\overline{D}$ *i* $F: X\to Y$ *dvaput Fréchet-diferencijabilan operator na* $\overline{D}$ *koji zadovoljava uslov*

$$\|F''_{(a)}(h,h)\|\leqq H(\|h\|)\quad(\forall h\in X\wedge\forall a\in D),$$

gde je H funkcija definisana na $\mathbf{R}^+$ *i sa vrednostima u* $\mathbf{R}^+$.

Tada je

$$\|F'_{(x)}(b-a)\|\leqq\|F(b)-F(a)\|+\frac{1}{2}\{H(\|x-a\|)+H(\|b-x\|)\}$$

za svako $x\in\overline{D}$.

Posledica 7. *Ako konveksni skup D i funkcija* $H:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ *zadovoljavaju*

$$H(\|x-a\|)+H(\|b-x\|)\leqq H(\|b-a\|)\quad(\forall x\in\overline{D}),$$

važi nejednakost

$$\|F'_{(x)}(b-a)\|\leqq\|F(b)-F(a)\|+\frac{1}{2}H(\|b-a\|)\quad(\forall x\in\overline{D}).$$

PRIMEDBA. Ako je $H(t)=Nt^2$ $(N>0,\ t\in\mathbf{R}^+)$, posledica 7 se svodi na teoremu 1.

3.3. Primena na operatore u funkcionalnim prostorima

U prethodnom odeljku dobijeno je više nejednakosti za operatore u konačno-dimenzionalnim prostorima. Radi se o posledicama teorema 1 i 2. U ovom odeljku, primenom istih teorema, dobićemo neke nejednakosti za operatore u nekim opštijim funkcionalnim prostorima.

1. U [30] (str. 606) naveden je sledeći rezult.

Teorema I. *Neka je funkcija* $(s,t,u)\mapsto K(s,t;u)$ *neprekidna i dvaput neprekidno-diferencijabilna po u, i*

$$|K''_{uu}(s,t;u)|\leqq M|u|^{p-2}+N\quad(s,t\in[0,1],\ |u|<+\infty;\ M,N>0,\ p\in\mathbf{R}).$$

Ako je $p\geqq 2$, *operator F, definisan sa*

$$F(f)=\int_0^1 K(s,t;f(t))\,\mathrm{d}t\quad(f\in L^p),$$

preslikava prostor L^p *u prostor* L^q $(1 \leqq q < +\infty)$[1)] *i dva puta je diferencijabilan, pri čemu je*

$$F'_{(f)}(h) = \int_0^1 K'_u(s, t; f(t))\, h(t)\, dt,$$

$$F''_{(f)}(h, k) = \int_0^1 K''_{uu}(s, t; f(t))\, h(t)\, k(t)\, dt$$

za svako $f \in L^p$.

Koristeći se ovom teoremom, ukazaćemo na neke posledice teorema 1 i 2.

Neka je $X = L^p (p \geqq 2)$, $Y = L^q (1 \leqq q < +\infty)$. U prostoru L^p uočimo funkcije $t \mapsto a(t) = 0$ i $t \mapsto b(t) > 0$ $(t \in [0, 1])$.

Neka je dalje

$$D \subset \{f \mid \|f\|^2_{L^p} + \|b - f\|^2_{L^p} < \|b\|^2_{L^p},\ f \in L^p\}$$

konveksan skup takav da $a(t), b(t) \in \bar{D}$.

Predhodno ćemo dati sledeću lemu ([**29**], [**39**])

Lema 1. *Ako su ispunjeni uslovi teoreme I, važi nejednakost*

$$\| F''_{(f)}(h, h)\|_{L^p} \leqq \Phi(f) \| h \|^2_{L^p},$$

gde funkcija $\Phi : L^p \to \mathbf{R}^+$ *i određena je sa*

$$\Phi(f) = \begin{cases} 2^{2/p}(M \|f\|^{p-2}_{L^p} + N) & p > 2, \\ M + N & p = 2. \end{cases}$$

Napomenimo da je $\Phi(f) \leqq \Phi(b)$ $(\forall f \in \bar{D})$.

Posledica 8. *Ako su ispunjeni uslovi teoreme I, tada na osnovu teoreme* 2 *i dokazane leme* 1, *važi nejednakost*

$$\Big\| \int_0^1 K'_u(s, t; f(t))\, b(t)\, dt - \int_0^1 K(s, t; b(t))\, dt + \int_0^1 K(s, t; 0)\, dt \Big\|_{L^q}$$
$$\leqq \frac{1}{2} \Phi(b) (\|f\|^2_{L^p} + \|b - f\|^2_{L^p})$$

za svako $f \in \bar{D}$.

Posledica 9. *Ako je*

$$\sup_{f \in \bar{D}} \|F(f)\|_{L^q} = \sup_{f \in \bar{D}} \Big(\int_0^1 \Big| \int_0^1 K(s, t; f(t))\, dt \Big|^q ds \Big)^{1/q} \leqq M$$

i ako su ispunjeni uslovi teoreme I, na osnovu teoreme 1 *i leme* 1 *sleduje nejednakost*

$$\Big\| \int_0^1 K'_u(s, t; f(t))\, b(t)\, dt \Big\|_{L^q} \leqq 2M + \frac{1}{2} \Phi(b) \|b\|^2_{L^p}$$

za svako $x \in \bar{D}$.

[1)] Prostor $L^p(\alpha, \beta)$ za $\alpha = 0$ i $\beta = 1$ označavćemo samo sa L^p.

2. Neka su sada:

1° $X = C^1[\alpha, \beta]$, $Y = \mathbf{R}$;

2° $\|f-g\| = \max_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)-g(x)| + \max_{x\in[\alpha,\beta]} |f'(x)-g'(x)| \qquad (f, g \in X)$;

3° $\|y'-y''\| = |y'-y''| \quad (y', y'' \in \mathbf{R})$;

4° Funkcija $(x, u, v) \mapsto G(x, u, v)$ dva puta neprekidno diferencijabilna za $x \in [\alpha, \beta]$ i $u, v \in \mathbf{R}$;

5° Funkcionela $F: C^1[\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ definisana sa

$$F(f) = \int_\alpha^\beta G(x, f(x), f'(x))\,\mathrm{d}x;$$

6° $a(x) = 0, \quad b(x) > 0 \quad (a, b \in C^1[\alpha, \beta])$;

7° $D \subset \{f \mid \|f\|^2 + \|b-f\|^2 < \|b\|^2, \ f \in C^1[\alpha, \beta]\}$ konveksan skup takav da $a, b \in \overline{D}$.

Uvedimo oznaku $(u, v) = \int_\alpha^\beta |G''_{uv}(x, f(x), f'(x))|\,\mathrm{d}x.$

Ako je

$$\max\{\sup_{f\in D}(f, f), \ \sup_{f\in D}(f, f'), \ \sup_{f\in D}(f', f')\} \leqq N, \tag{3.1}$$

tada iz

$$F''_{(f)}(h, k) = \int_\alpha^\beta \left(G''_{ff} h(x) k(x) + G''_{ff'}(h(x) k(x))' + G''_{f'f'} h'(x) k'(x)\right)\mathrm{d}x$$

sleduje nejednakost

$$|F''_{(f)}(h, h)| \leqq N\left(\max_{x\in[\alpha,\beta]} |h(x)| + \max_{x\in[\alpha,\beta]} |h'(x)|\right)^2 = N\|h\|^2 \qquad (\forall h \in X).$$

Posledica 10. *Pod pretpostavkom da $f \in \overline{D}$ zadovoljava uslov* (3.1), *iz teoreme* 2 *sleduje*

$$\Big| \int_\alpha^\beta \left(G'_f(x, f, f')\, b(x) + G'_{f'}(x, f, f')\, b'(x)\right)\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta G(x, b, b')\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_\alpha^\beta G(x, 0, 0)\,\mathrm{d}x + \Big| \leqq \frac{N}{2}(\|f\|^2 + \|b-f\|^2)$$

za svako $f \in \overline{D}$.

Posledica 11. *Ako je*

$$\sup_{f\in D} \left| \int_\alpha^\beta G(x, f(x), f'(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqq M,$$

tada na osnovu teoreme 1 *i nejednakosti* (3.1) *sleduje*

$$\left| \int_\alpha^\beta \left(G'_f(x, f, f')\, b(x) + G'_{f'}(x, f, f')\, b'(x)\right)\mathrm{d}x \right| \leqq 2M + \frac{N}{2}\|b\|^2$$

za svako $f \in \overline{D}$.

4. NEKE INTEGRALNE NEJEDNAKOSTI

4.1. Generalizacija jednog rezultata A. Ostrowskog

A. OSTROWSKI ([**28**]) dokazao je, kao što je u **3.1.** navedeno (teorema H), sledeći rezultat:

Teorema A. *Neka je* $x \mapsto f(x)$ *diferencijabilna funkcija u intervalu* (a, b) *i neka je u* (a, b) $|f'(x)| \leqq N\ (N>0)$. *Tada je, za svako* $x \in (a, b)$,

$$(1.1)\qquad \left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \left(\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right)(b-a)N.$$

S druge strane, u **3.2**, dokazano je da se ova teorema dobija kao jedna od posledica teoreme 2 (posledica 5). Naime, ako je $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ diferencijabilna funkcija definisana na $[a, b]$ i takva da je $|f'(x)| \leqq N\,(N>0)\,(\forall x \in (a, b))$, tada stavljanjem

$$X=Y=\mathbf{R},\quad \|x-y\|=|x-y| \quad (x, y \in \mathbf{R}),$$

$$D=\{x \mid a<x<b;\ a, b \in \mathbf{R}\},\qquad F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

iz teoreme 2 sleduje da nejednakost (1.1) važi za svako $x \in [a, b]$.

Polazeći od jednog rezultata J. B. DIAZA i F. T. METCALFA (videti [**31**] ili [**9**, str. 147]), A. LUPAS ([**32**]) dokazao je sledeći rezultat koji je u vezi sa teoremom A.

Teorema B. *Neka je* $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ *apsolutno neprekidna funkcija na* $[a, b]$ *i neka je* $f' \in L^2(a, b)$. *Tada je, za svako* $x \in [a, b]$,

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqq \frac{2}{\pi}\max(x-a,\ b-x)\,\|f'\|,$$

gde je

$$\|f'\|=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

U ovom odeljku daćemo neke generalizacije teoreme A. Naime, dokazaćemo najpre nejednakost (1.1) za težinsku aritmetičku integralnu sredinu i jedan njen analogon za težinsku geometrijsku integralnu sredinu, a zatim ćemo dobijene rezultate preneti na funkcije više promenljivih.

U radu ćemo koristiti jedan rezultat koji je dao J. KARAMATA, u naknadnoj napomeni uz članak [33]. Taj rezultat, koji je u vezi sa teoremom o srednjoj vrednosti određenih integrala glasi:

Teorema C. *Neka su funkcije f i p integrabilne na* (0, 1). *Ako je*

$$m \leqq f(x) \leqq M \, (0 \leqq x \leqq 1) \quad i \quad \mu = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

tada je

$$\frac{\lambda m (M-\mu) + M(\mu-m)}{\lambda (M-\mu) + (\mu-m)} \leqq \frac{\int_0^1 p(t) f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t} \leqq \frac{m (M-\mu) + \lambda M(\mu-m)}{(M-\mu) + \lambda(\mu-m)}, \tag{1.2}$$

za sve funkcije f koje zadovoljavaju uslov

$$0 < c \leqq p(x) \leqq \lambda c \qquad (\lambda \geqq 1;\ 0 \leqq x \leqq 1).$$

Uvedimo oznake

1° $I = (a, b)$;

2° $\bar{I}$ zatvorenje (adherencija) od I;

3° Težinska aritmetička integralna sredina

$$A(f;\ p) = \frac{\int_a^b p(x) f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x};$$

4° Težinska geometrijska integralna sredina

$$G(f;\ p) = \exp \frac{\int_a^b p(x) \log f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x} \qquad (f(x) > 0 \ \forall x \in I),$$

kao i sledeću definiciju:

Definicija 1. *Integrabilna funkcija p na I pripada klasi $Q(\lambda;\ I)$ ako postoji realan broj $\lambda \geqq 1$, tako da važi*

$$0 < c \leqq p(x) \leqq \lambda c \qquad (\forall x \in \bar{I}).$$

Dokazaćemo teoremu koja je generalizacija teoreme A.

Teorema 1. *Neka je $x \mapsto f(x)$ diferencijabilna funkcija definisana na $\bar{I}$ i takva da je $|f'(x)| \leqq N \, (N > 0) \, (\forall x \in I)$. Ako $p \in Q(\lambda;\ I)$, tada za svako $x \in \bar{I}$, važi nejednakost*

$$|f(x) - A(f;\ p)| \leqq \frac{\lambda N M(x)\, r(x)}{M(x) + (\lambda - 1)\, r(x)}, \tag{1.3}$$

gde su M i r određeni sa

$$M(x)=\max(x-a,\ b-x) \quad i \quad r(x)=\left(\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right)(b-a).$$

Dokaz. Neka je $x\in\bar{I}$ i $t\in I$.

Na osnovu TALYORove formule, imamo

$$f(x)-f(t)=f'\big(t+\theta(x-t)\big)(x-t) \qquad (0<\theta<1). \tag{1.4}$$

Množenjem (1.4) sa $p(t)\ (>0)$ i integracijom, dobijamo

$$f(x)\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b p(t)f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b p(t)f'\big(t+\theta(x-t)\big)(x-t)\,\mathrm{d}t,$$

tj.

$$|f(x)-A(f;p)|=\frac{\left|\int_a^b p(t)f'(t+\theta(x-t))(x-t)\,\mathrm{d}t\right|}{\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

$$\leqq\frac{\int_a^b p(t)\,|f'(t+\theta(x-t))|\cdot|x-t|\,\mathrm{d}t}{\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$\leqq N\frac{\int_a^b p(t)\,|x-t|\,\mathrm{d}t}{\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t},$$

s obzirom da je $\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t>0$ i $|f'(x)|\leqq N\ (N>0) \qquad (\forall\, x\in I)$.

Kako je

$$0\leqq|x-t|\leqq\max(x-a,\ b-x)=M(x) \qquad (\forall\, t\in I),$$

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b|x-t|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{b-a}\left(\int_a^x(x-t)\,\mathrm{d}t+\int_x^b(t-x)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{4}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

$$=r(x)$$

i $p \in Q(\lambda; I)$, primenom teoreme C, prevedene na interval (a, b), dobijamo

$$\frac{\int_a^b p(t)\,|x-t|\,\mathrm{d}t}{\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t} \leqq \frac{\lambda M(x)\, r(x)}{M(x)+(\lambda-1)\, r(x)}. \tag{1.6}$$

Najzad, na osnovu (1.5) i (1.6) dobijamo (1.3), čime je teorema 1 dokazana.

Primedba. Za $p(x) \equiv 1$ $(\Rightarrow \lambda = 1)$, (1.3) se svodi na

$$|f(x) - A(f; 1)| \leqq N r(x),$$

što je ekvivalentno sa (1.1).

Iz teoreme 1, sleduje sledeći rezultat.

Teorema 2. *Neka diferencijabilna funkcija* $f: I \to \mathbf{R}^+$ *ispunjava uslov*

$$|f'(x)| \leqq N f(x) \qquad (N > 0;\ \forall x \in I)$$

i neka $p \in Q(\lambda; I)$. *Tada za svako* $x \in \bar{I}$, *važi nejednakost*

$$G(f; p) \exp\left(-\frac{\lambda N M(x)\, r(x)}{M(x)+(\lambda-1)\, r(x)}\right) \leqq f(x) \leqq G(f; p) \exp\left(\frac{\lambda N M(x)\, r(x)}{M(x)+(\lambda-1)\, r(x)}\right), \tag{1.7}$$

gde su M *i* r *definisani kao u teoremi* 1.

Dokaz. Ova teorema je posledica teoreme 1. Naime, ako u teoremu 1, umesto funkcije $x \mapsto f(x)$, stavimo funkciju $x \mapsto \log f(x)$ $(f(x) > 0$ za svako $x \in \bar{I})$ dobija se nejednakost (1.5).

Sada ćemo dobijene rezultate preneti na funkcije više promenljivih, ograničavajući pritom parcijalne izvode prvog reda.

Prethodno uvedimo sledeće oznake:

1° $I_i = (a_i, b_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$;

2° $D_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} I_i$ $(k = 1, \ldots, n)$, gde $\prod$ predstavlja Dekartov proizvod skupova I_i;

3° $D = \prod_{i=1}^{n} I_i \left(= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_i < x_i < b_i\ (i = 1, \ldots, n)\}\right)$;

4° $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, $f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$;

5° $\mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$, $\mathrm{d}Y_k = \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_{k-1}\, \mathrm{d}y_{k+1} \cdots \mathrm{d}y_n$;

6° $M_i = M_i(x_i) = \max(x_i - a_i,\ b_i - x_i)$,

$$r_i = r_i(x_i) = \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(x_i - \dfrac{a_i + b_i}{2}\right)^2}{(b_i - a_i)^2}\right)(b_i - a_i) \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

7° $P_k(y_k) = \int\limits_{D_k} \cdots \int p(Y)\,\mathrm{d}Y_k \qquad (k=1, \ldots, n);$

8° $A(f;\, p) = \dfrac{\int\limits_D \cdots \int p(X) \log f(X)\,\mathrm{d}X}{\int\limits_D \cdots \int p(X)\,\mathrm{d}X},$

$$G(f;\, p) = \exp\left(\frac{\int\limits_D \cdots \int p(X) \log f(X)\,\mathrm{d}X}{\int\limits_D \cdots \int p(X)\,\mathrm{d}X}\right) \qquad (f(X) > 0 \quad \forall X \in \bar{D}).$$

U radu [**34**] dokazali smo sledeću teoremu

Teorema 3. *Neka je* $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *diferencijabilna funkcija definisana na* $\bar{D}$ *i neka je* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqq N_i$ $(N_i > 0;\ i = 1, \ldots, n)$ *za svako* $X \in D$. *Tada je*

$$|f(X) - A(f;\, 1)| \leqq \sum_{i=1}^{n} N_i r_i \tag{1.8}$$

za svako $X \in \bar{D}$.

Ovde ćemo dokazati opštiju teoremu.

Teorema 4. *Neka je* $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *diferencijabilna funkcija definisana na* $\bar{D}$ *i neka je* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqq N_i$ $(N_i > 0;\ i = 1, \ldots, n)$ *za svako* $X \in D$.

1° *Ako je funkcija* $X \mapsto p(X)$ *integrabilna na* D *i* $p(X) > 0$ $(\forall X \in \bar{D})$, *tada za svako* $X \in \bar{D}$, *važi nejednakost*

$$|f(X) - A(f;\, p)| \leqq \sum_{i=1}^{n} N_i A(f_i;\, p), \tag{1.9}$$

gde je $y_i \mapsto f(y_i) = |x_i - y_i|$ $(i = 1, \ldots, n)$.

2° *Ako, osim prethodnih uslova,* $p \in Q(\lambda_i;\, I_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, *nejednakost*

$$|f(X) - A(f;\, p)| \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i N_i M_i r_i}{M_i + (\lambda_i - 1) r_i} \tag{1.10}$$

važi za svako $X \in \bar{D}$.

Dokaz. Neka je $X \in \bar{D}$ i $Y \in D$. Slično, kao u dokazu teoreme 1, pođimo od TAYLORove formule

$$f(X) - f(Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(C)}{\partial x_i} (x_i - y_i), \tag{1.11}$$

gde je $C = (y_1 + \theta(x_1 - y_1), \ldots, y_n + \theta(x_n - y_n))$ $(0 < \theta < 1)$.

Kako je $p(Y) > 0$ iz (1.11) sleduje

$$p(Y) f(X) - p(Y) f(Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(C)}{\partial x_i} p(Y)\,(x_i - y_i). \tag{1.12}$$

Integracijom (1.12) po oblasti D, a zatim deobom dobijene jednakosti sa $\int_D \cdots \int p(Y)\,\mathrm{d}Y\ (>0)$, imamo

$$f(X)-A(f;\ p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_D \cdots \int \frac{\partial f(C)}{\partial x_i}\,p(Y)\,(x_i-y_i)\,\mathrm{d}Y}{\int_D \cdots \int p(Y)\,\mathrm{d}Y},$$

odakle je

$$|f(X)-A(f;\ p)|\leqq\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_D \cdots \int \left|\frac{\partial f(C)}{\partial x_i}\right| p(Y)\,|x_i-y_i|\,\mathrm{d}Y}{\int_D \cdots \int p(Y)\,\mathrm{d}Y}\leqq\sum_{i=1}^{n} N_i A(f_i;\ p),$$

gde su funkcije f_i, date sa

$$f_i(y_i)=|x_i-y_i| \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Ovim je tvrđenje 1° dokazano.

Kako je

$$0\leqq f_i(y_i)=|x_i-y_i|\leqq \max(x_i-a_i,\ b_i-x_i)=M_i \qquad (y_i\in I_i),$$

$$\mu_i=\frac{1}{b_i-a_i}\int_{a_i}^{b_i} f_i(y_i)\,\mathrm{d}y_i=r_i,$$

i $p_i\in Q(\lambda_i;\ I_i)$ $(i=1,\ldots,n)$, primenom teoreme C na

$$A(f;\ p)=\frac{\int_D \cdots \int p(Y)\,f_i(y_i)\,\mathrm{d}Y}{\int_D \cdots \int p(Y)\,\mathrm{d}Y}=\frac{\int_{b_i}^{a_i} p_i(y_i)\,f_i(y_i)\,\mathrm{d}y_i}{\int_{b_i}^{a_i} p_i(y_i)\,\mathrm{d}y_i} \qquad (i=1,\ldots,n).$$

dobijamo

(1.13) $$A(f;\ p)\leqq\frac{\lambda_i M_i r_i}{M_i+(\lambda_i-1)\,r_i} \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Konačno iz nejednakosti (1.9) i (1.13) sleduje nejednakost (1.10), čime je teorema 4 dokazana.

PRIMEDBA. Ako je $p(X)\equiv 1$ $(\Rightarrow \lambda_i=1\ (i=1,\ldots,n))$, nejednakost (1.10) se svodi na nejednakost (1.8) (teorema 3).

Iz teoreme 4 sleduje sledeći rezultat (slično kao teorema 2 iz teoreme 1):

Teorema 5. *Neka diferencijabilna funkcija* $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ *definisana na* $\overline{D}$ *ispunjava uslove*

$$f(X)>0 \quad (\forall x\in\overline{D}) \quad i \quad \left|\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}\right|\leqq N_i f(X) \qquad (\forall X\in D),$$

gde je $N_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$.

1° *Ako je funkcija* $X \mapsto p(X)$ *integrabilna na* D *i* $p(X)>0$ $(\forall X \in \bar{D})$, *tada za svako* $X \in \bar{D}$, *važi nejednakost*

$$G(f;\ p)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} N_i A(f_i,\ p)\right) \leqq f(X) \leqq G(f;\ p)\exp\left(\sum_{i=1}^{n} N_i A(f_i;\ p)\right),$$

gde je $y_i \mapsto f(y_i)=|x_i-y_i|$ $(i=1, \ldots, n)$.

2° *Ako, osim prethodnih oslova,* $P_i \in Q(\lambda_i;\ I_i)$ $(i=1, \ldots, n)$, *nejednakost*

$$\frac{1}{B} G(f;\ p) \leqq f(X) \leqq B G(f;\ p), \tag{1.14}$$

gde je

$$B=\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i N_i M_i r_i}{M_i+(\lambda_i-1) r_i}\right),$$

važi za svako $X \in \bar{D}$.

Primedba. Ako je $p(X) \equiv 1$ $(\Rightarrow \lambda_i=1\ (i=1, \ldots, n))$, nejednakost (1.14) se svodi na nejednakost

$$G(f;\ 1)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} N_i r_i\right) \leqq f(X) \leqq G(f;\ 1)\exp\left(\sum_{i=1}^{n} N_i r_i\right),$$

koja važi za svako $X \in \bar{D}$.

4.2. O jednoj nejednakosti K. S. K. Iyengara

K. S. K. Iyengar u radu [35] dokazao je sledeći rezultat:

Teorema D. *Neka je* f *diferencijabilna funkcija na segmentu* $[a, b]$ *i neka je* $|f'(x)| \leqq M$ $(M>0)$. *Tada je*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(b-a)\,(f(a)+f(b))\right| \leqq \frac{M(b-a)^2}{4}-\frac{1}{4M}(f(b)-f(a))^2. \tag{2.1}$$

Primedba. Ako se u teoremi D uslov $|f'(x)| \leqq M$ zameni uslovom $m \leqq f'(x) \leqq M$ dobija se nejednakost

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right| \leqq \frac{(M-m)(b-a)}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}-\dfrac{M+m}{2}\right)^2}{(M-m)^2}\right).$$

U vezi sa teoremom D, P. R. Beesack dao je sledeći komentar (videti [9, str. 298]):

Nejednakost (2.1) je veoma dobra. Njoj je srodna sledeća nejednakost

$$m\frac{(b-a)^2}{2} \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a) f(a) \leqq M\frac{(b-a)^2}{2}, \tag{2.2}$$

gde je f' neprekidna funkcija na $[a, b]$ i $m \leqq f'(x) \leqq M$ $(\forall x \in [a, b])$.

PRIMEDBA. Za važenje nejednakosti (2.2) nije potrebno pretpostaviti neprekidnost prvog izvoda f'. Naime, dovoljno je da neprekidna funkcija f na $[a, b]$ ima ograničen izvod u svakoj tački $x \in (a, b)$, tj. $m \leqq f'(x) \leqq M$.

Zaista, kako je $m \leqq f'(x) \leqq M$, iz LAGRANGEOVE formule

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a) \qquad (a<c<x),$$

sleduje

$$m(x-a) \leqq f(x)-f(a) \leqq M(x-a),$$

odakle integracijom dobijamo (2.2).

U radu [35] teorema D je dokazana geometrijskim razmatranjem. Još jedan geometrijski dokaz ove teoreme dao je G. S. MAHAJANI ([36]).

Ako se uvedu oznake

$$q=\frac{|f(b)-f(a)|}{M(b-a)} \tag{2.3}$$

i

$$A(f; p)=\frac{\int_a^b p(x) f(x)\, \mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\, \mathrm{d}x}, \tag{2.4}$$

nejednakost (2.1) se može predstaviti u obliku

$$\left|A(f; 1)-\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right| \leqq \frac{M(b-a)}{4}(1-q^2). \tag{2.5}$$

U ovom odeljku daćemo jednu generalizaciju teoreme D. Naime, dokazaćemo nejednakost (2.5) za težinsku aritmetičku integralnu sredinu, a dokaz ćemo sprovesti analitičkim putem.

Teorema 6. *Neka je* $x \mapsto f(x)$ *diferencijabilna funkcija definisana na segmentu* $[a, b]$ *i takva da je* $|f'(x)| \leqq M$ $(\forall x \in (a, b))$. *Ako* $p \in Q(\lambda; (a, b))$, *tj.*

$$0<c \leqq p(x) \leqq \lambda c \qquad (\lambda \geqq 1;\ \forall x \in [a, b]),$$

tada važi nejednakost

$$\left|A(f; p)-\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right| \leqq \frac{M(b-a)}{2} \cdot \frac{(\lambda+q)(1-q^2)+2(\lambda-1) q}{2 \lambda(1+q)-(\lambda-1)(1+q^2)}, \tag{2.6}$$

gde su q *i* A *definisani sa* (2.3) *i* (2.4) *respektivno.*

Dokaz. Iz nejednakosti $|f'(x)| \leqq M$ $(\forall x \in (a, b))$ i LAGRANGEOVE formule sleduje

$$-M(x-a) \leqq f(x)-f(a) \leqq M(x-a), \qquad -M(b-x) \leqq f(b)-f(x) \leqq M(b-x),$$

tj.

$$f(a)-M(x-a) \leqq f(x) \leqq f(a)+M(x-a), \; f(b)-M(b-x) \leqq f(x) \leqq f(b)+M(b-x),$$

odakle je

$$\begin{aligned} \max\big(f(a)-M(x-a),\ f(b)-M(b-x)\big) &\leqq f(x) \\ &\leqq \min\big(f(a)+M(x-a),\ f(b)+M(b-x)\big). \end{aligned}$$

Kako je, za svako $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$\min(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - |\beta - \alpha|) \quad \text{i} \quad \max(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + |\beta - \alpha|),$$

poslednje nejednakosti postaju

$$(2.7) \qquad -\frac{1}{2}(M(b-a) - g(x)) \leqq f(x) - \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) \leqq \frac{1}{2}(M(b-a) - h(x)),$$

gde smo stavili

$$g(x) = |M(2x - a - b) + f(b) - f(a)|, \quad h(x) = |M(2x - a - b) - f(b) + f(a)|.$$

Kako je p integrabilna funkcija na (a, b) i $p(x) > 0$ iz (2.7) sleduje

$$(2.8) \qquad -\frac{1}{2}\left(M(b-a)\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b p(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\leqq \int_a^b p(x) f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(f(a) + f(b))\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left(M(b-a)\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b p(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

tj.

$$-\frac{1}{2}(M(b-a) - A(g; p)) \leqq A(f; p) - \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) \leqq \frac{1}{2}(M(b-a) - A(h; p)),$$

gde je A određeno sa (2.4).

S obzirom da je

$$\min_{x \in [a, b]} g(x) = \min_{x \in [a, b]} h(x) = 0,$$

$$\max_{x \in [a, b]} g(x) = \max_{x \in [a, b]} h(x) = M(b-a)(1+q),$$

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{M(b-a)}{2}(1+q^2)$$

i $p \in Q(\lambda; (a, b))$, na osnovu teoreme C, imamo

$$A(g; p) \geqq \frac{M(b-a)(1+q)\dfrac{M(b-a)}{2}(1+q^2)}{\lambda M(b-a)(1+q) - (\lambda - 1)\dfrac{M(b-a)}{2}(1+q^2)} = M(b-a)\,B(\lambda; q),$$

gde smo stavili

$$(2.9) \qquad B(\lambda; q) = \frac{(1+q)(1+q^2)}{2\lambda(1+q) - (\lambda - 1)(1+q^2)}.$$

Slično nalazimo

$$A(h; p) \geqq M(b-a)\,B(\lambda; q),$$

pa je konačno

$$\left| A(f;\, p) - \frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \right| \leqq \frac{M(b-a)}{2}\left(1 - B(\lambda;\, q)\right)$$

$$= \frac{M(b-a)}{2} \cdot \frac{(\lambda+q)(1-q^2)+2(\lambda-1)q}{2\lambda(1+q)-(\lambda-1)(1+q^2)}.$$

Ovim je dokaz završen.

PRIMEDBA. Ako je $p(x) \equiv 1$ ($\Rightarrow \lambda = 1$), nejednakost (2.6) se svodi na (2.5).

Tvrđenje teorema 6 je u važnosti i pod nešto oslabljenim uslovom za funkciju f. Naime, važi sledeća teorema.

Teorema 7. *Ako funkcija f, definisana na $[a, b]$ zadovoljava Lipschitzov uslov sa konstantom M i ako $p \in Q(\lambda;\, (a;\, b))$, važi nejednakost* (2.6).

4.3. Neka dalja proširenja Iyengarove nejednakosti

U ovom odeljku koristićemo neke pojmove i rezultate iz teorije konveksnih funkcija, pa ćemo ih zato ukratko izložiti. Kompletniji rezultati mogu se naći u **[9]**, **[40]**, **[41]**, **[42]**.

Definicija 2. *Funkcija f se naziva konveksna u Jensenovom smislu, ili J-konveksna na $[a, b]$, ako za svake dve tačke $x, y \in [a, b]$ važi nejednakost*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{3.1}$$

Definicija 3. *Funkcija f se naziva J-konkavna na $[a, b]$ ako je funkcija $x \mapsto -f(x)$ J-konveksna na $[a, b]$.*

Definicija 4. *Funkcija f se naziva konveksna na segmentu $[a, b]$ ako i samo ako nejednakost*

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{3.2}$$

važi za sve $x, y \in [a, b]$ i za sve realne brojeve $\lambda \in [0, 1]$.

Konveksna funkcija je J-konveksna, jer se (3.2) za $\lambda = \frac{1}{2}$ svodi na (3.1). S druge strane, svaka neprekidna J-konveksna funkcija je konveksna.

Teorema E. 1° *Funkcija f je konveksna na $[a, b]$ ako i samo ako je za svaku tačku $c \in [a, b]$ funkcija $x \mapsto \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ neopadajuća na $[a, b]$.*

2° *Diferencijabilna funkcija f je konveksna ako i samo ako je f' neopadajuća na $[a, b]$.*

3° *Dva puta diferencijabilna funkcija f je konveksna na $[a, b]$ ako i samo ako je $f''(x) \geqq 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

Saglasno prethodnom, u literaturi su definisane konveksne funkcije reda n (**[40]**, **[9]**, **[42]**, **[43]**), pri čemu se ta definicija za $n = 1$ svodi na običnu konveksnost.

Definicija 5. *Funkcija* $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ *naziva se konveksna reda* n $(n \in \mathbf{N}_0)$ *na* $[a, b]$ *ako i samo ako, za svako* $x_1, \ldots, x_{n+2} \in [a, b]$, *važi*

$$[x_1, \ldots, x_{x+2}; f] \geqq 0,$$

gde je izraz $[x_1, \ldots, x_n; f]$ *definisan rekurzivno*

$$[x_1, \ldots, x_n; f] = \frac{[x_2, \ldots, x_n; f] - [x_1, \ldots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_1}; \qquad [x; f] = f(x).$$

Primedba. Konveksna funkcija reda 0 je neopadajuća funkcija na $[a, b]$.

U vezi sa konveksnim funkcijama reda n važi sledeća teorema (videti [**42**]):

Teorema F. *Neka je funkcija* f *konveksna reda* n. *Tada postoji* $f^{(k)}$ *na* (a, b) *za* $k < n$ *i on je konveksna funkcija reda* $n-k$.

U ekspozitornom članku [**43**] nalazimo teoremu, koja daje kriterijum za konveksnost reda n.

Teorema G. *Ako je funkcija* f *definisana na* $[a, b]$ *i njen izvod* $f^{(n+1)}(x) \geqq 0$ $(f^{(n+1)}(x) \leqq 0)$ *za* $x \in (a, b)$, *tada je* f *konveksna reda* n (*konkavna reda* n) *na segmentu* $[a, b]$.

Lj. R. Stanković u radu [**44**] (videti takođe [**45**]) dao je sledeći rezultat:

Teorema H. *Neka je* f *nenegativna funkcija na* $[a, b]$ *i neka* f *zadovoljava uslove*:

1° f *je konveksna reda* n;

2° $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^r} = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1).$

Tada je funkcija $x \mapsto \dfrac{f(x)}{(x-a)^n}$ *neopadajuća na* $[a, b]$.

I. B. Lacković u [**46**, str. 66] primetio je da je u pretpostavci 2° ove teoreme dovoljno da stoji samo uslov

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Sada ćemo dati jedan rezultat koji je opštiji od Teoreme H. Ovaj rezultat koristićemo u daljem radu.

Teorema 8. *Neka je funkcija* f *konveksnaa reda* $n\,(n \geqq 1)$ *na* $[a, b]$. *Tada je za svako* $c \in [a, b]$ *funkcija* $x \mapsto \dfrac{G(x)}{(x-c)^n}$ *neopadajuća na* $[a, b]$, *gde je* G *određeno sa*

$$G(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k. \tag{3.3}$$

Dokaz. Neka $c \in [a, b]$. Kako je f konveksna funkcija reda n, na osnovu teoreme F, postoje izvodi $f^{(k)}\,(k < n)$. Funkcija G, definisana pomoću (3.3), je tokođe konveksna reda n, pri čemu je

$$G(c) = G'(c) = \cdots = G^{(n-1)}(c) = 0. \tag{3.4}$$

Kako je na osnovu teoreme F, $G^{(n-1)}$ konveksna funkcija (reda jedan), primenom HADAMARDove nejednakosti ([9], [47]) dobijamo

$$\frac{1}{x-c}\int_c^x G^{(n-1)}(t)\,\mathrm{d}t \leqq \frac{1}{2}\left(G^{(n-1)}(c)+G^{(n-1)}(x)\right) \qquad (x \neq c),$$

odakle je, s obzirom na (3.4),

(3.5) $$\operatorname{sgn}(x-c)\left((x-c)\,G^{(n-1)}(x)-2\,G^{(n-2)}(x)\right) \geqq 0.$$

Sukcesivncm integracijom nejednakosti (3.5) $n-2$ puta od c do x, dobijamo

(3.6) $$(x-c)\,G'(x)-nG(x) \geqq 0 \qquad (x>c)$$

i

(3.7) $$(-1)^{n+1}\left((x-c)\,G'(x)-nG(x)\right) \geqq 0 \qquad (x<c).$$

Iz (3.6) i (3.7), pri $x \neq c$, sleduje

$$\frac{(x-c)\,G'(x)-nG(x)}{(x-c)^{n+1}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{G(x)}{(x-c)^n}\right) \geqq 0,$$

čime je dokaz završen.

U ciju dalje generalizacije IYENGARove nejednakosti, dokazaćemo sledeću lemu.

Lema 1. *Neka je $x \mapsto F(x)$ diferencijabilna funkcija definisana na $[a, b]$. Nejednakosti*

(3.8) $$-M \leqq F'(x) \leqq M \qquad (M>0;\ \forall x \in [a, b])$$

važe ako i samo ako je

(3.9) $x \mapsto F(x)+M(x-a)$ *neopadajuća funkcija na* $[a, b]$

i

(3.10) $x \mapsto F(x)-M(x-a)$ *nerastuća funkcija na* $[a, b]$.

Dokaz. (a) *Uslov je potreban.* Pretpostavimo da važe nejednakosti (3.8) i da je $a \leqq x \leqq y \leqq b$. Tada, iz nejednakosti (3.8) i LAGRANGEove formule, dobijamo

$$-M(y-x) \leqq F(y)-F(x) \leqq M(y-x),$$

odakle je

$$F(x)+M(x-a) \leqq F(y)+M(y-a) \quad \text{i} \quad F(y)-M(y-a) \leqq F(x)-M(x-a).$$

Poslednje nejednakosti predstavljaju tvrđenja (3.9) i (3.10).

(b) *Uslov je dovoljan.* Neka su tačna tvrđenja (3.9) i (3.10). Tada je

$$F'(x)+M \geqq 0 \quad \text{i} \quad F'(x)-M \leqq 0,$$

tj.

$$-M \leqq F'(x) \leqq M,$$

čime je dokaz završen.

Na osnovu leme 1 sleduje

Lema 2. *Neka je* $x \mapsto F(x)$ *diferencijabilna funkcija na* $[a, b]$. *Nejednakosti* (3.8) *važe ako i samo ako je*

$$x \mapsto -F(x) - M(b-x) \text{ neopadajuća funkcija na } [a, b]$$

i

$$x \mapsto -F(x) + M(b-x) \text{ nerastuća funkcija na } [a, b].$$

Sledeća teorema generališe teoremu 6 (videti [**48**]):

Teorema 9. *Neka je* $x \mapsto f(x)$ *dva puta diferencijabilna funkcija definisana na segmentu* $[a, b]$ *takva da je* $|f''(x)| \leqq M$ $(M > 0)$ $(\forall x \in (a, b))$ *i* $f'(a) = f'(b)$. *Ako* $p \in Q(\lambda; (a, b))$ *važi nejednakost*

$$\left| A(f; p) - \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + \frac{1}{2}\left(f'(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) A\left(\frac{a+b}{2} - x; p\right) \right| \tag{3.11}$$
$$\leqq \frac{M(b-a)^2}{8} \cdot \frac{(\lambda+q)(1-q^2) + 2(\lambda-1)q}{2\lambda(1+q) - (\lambda-1)(1+q^2)},$$

gde je A *određeno sa* (2.4) *i*

$$q = \frac{2}{M(b-a)} \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a) \right|.$$

Dokaz. Neka je

$$|f''(x)| \leqq M \qquad (\forall x \in (a, b)). \tag{3.12}$$

Tada je

$$x \mapsto f(x) + \frac{M}{2}(x-a)^2 \text{ konveksna funkcija na } [a, b]$$

i

$$x \mapsto f(x) - \frac{M}{2}(x-a)^2 \text{ konkavna funkcija na } [a, b],$$

odakle, na osnovu teoreme E, sleduje

$$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{M}{2}(x-a) \text{ neopadajuća funkcija na } [a, b] \tag{3.13}$$

i

$$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{M}{2}(x-a) \text{ nerastuća funkcija na } [a, b]. \tag{3.14}$$

Na osnovu (3.13) i (3.14) i leme 1 zaključujemo da funkcija F definisana na $[a, b]$ pomoću

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & (x \neq a), \\ f'(a) & (x = a), \end{cases}$$

zadovoljava uslove teoreme 6, pri čemu je $|F'(x)| \leqq \frac{M}{2}$ $(\forall x \in (a, b)$.

Ako u nejednakostima (2.8)[1], tj.

$$
(3.15)\qquad -\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}(b-a)\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b P(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)
$$

$$
\leqq\int_a^b P(x)\,F(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\big(F(a)+F(b)\big)\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x
$$

$$
\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}(b-a)\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b P(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x\right),
$$

sa oznakama

$$
g(x)=\left|\frac{M}{2}(2x-a-b)+F(b)-F(a)\right|\quad \text{i}\quad h(x)=\left|\frac{M}{2}(2x-a-b)-F(b)+F(a)\right|,
$$

stavimo $P(x)=(x-a)\,p(x)$ i dobijene nejednakosti podelimo sa $\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\,(>0)$, dobijamo

$$
(3.16)\qquad -\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}(b-a)\,A(x-a;\,p)-A(g_a;\,p)\right)
$$

$$
\leqq A(f;\,p)-f(a)-\frac{1}{2}\left(f'(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)A(x-a;\,p)
$$

$$
\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}(b-a)\,A(x-a;\,p)-A(h_a;\,p)\right),
$$

gde smo stavili

$$
g_a(x)=(x-a)\,g(x)\quad \text{i}\quad h_a(x)=(x-a)\,h(x).
$$

Slično, iz (3.12) sleduje

$$
x\mapsto\frac{f(b)-f(x)}{b-x}-\frac{M}{2}(b-x)\ \text{ neopadajuća funkcija na } [a,\,b]
$$

i

$$
x\mapsto\frac{f(b)-f(x)}{b-x}+\frac{M}{2}(b-x)\ \text{ nerastuća funkcija na } [a,\,b].
$$

Na osnovu leme 2, zaključujemo da uslove teoreme 6 zadovoljava i funkcija G definisana pomoću

$$
G(x)=\begin{cases}-\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} & (x\neq b),\\[2mm] -f'(b) & (x=b),\end{cases}
$$

pri čemu je $|G'(x)|\leqq\dfrac{M}{2}$.

[1] Nejednakosti (2.8), tj. (3.15) važe za svaku integrabilnu nenegativnu funkciju $x\mapsto P(x)$.

Kako je $f'(a)=f'(b)$, imamo

$$\frac{F(b)-F(a)}{\frac{M}{2}(b-a)}=\frac{G(b)-G(a)}{\frac{M}{2}(b-a)}=\frac{2}{M(b-a)}\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(a)\right).$$

Ako u (3.15) $F(x)$ i $P(x)$ zamenimo sa $G(x)$ i $(b-x)\,p(x)$ respektivno, dobijamo

$$\text{(3.17)}\qquad -\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}(b-a)\,A(b-x;\,p)+A(g_b;\,p)\right)$$
$$\leqq A(f;\,p)-f(b)+\frac{1}{2}\left(f'(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)A(b-x;\,p)$$
$$\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}(b-a)\,A(b-x;\,p)+A(h_b;\,p)\right).$$

Kako je A linearna funkcionela po prvom argumentu, tj. kako za proizvoljne realne konstante C_1 i C_2 važi

$$A(C_1f_1+C_2f_2;\,p)=C_1A(f_1;\,p)+C_2A(f_2;\,p),$$

i kako je

$$A(C;\,p)=C\qquad(C=\text{const}),$$

sabiranjem nejednakosti (3.16) i (3.17), sleduje

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{M}{2}(b-a)^2-(b-a)\,A(g;\,p)\right)$$
$$\leqq A(f;\,p)-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))+\frac{1}{4}\left(f'(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)A(a+b-2x;\,p)$$
$$\leqq\frac{1}{4}\left(\frac{M}{2}(b-a)^2-(b-a)\,A(h;\,p)\right).$$

Najzad, primenom teoreme C, dobijamo (3.11).

Iz teoreme 9 sleduje rezultat:

Teorema 10. *Ako funkcije $x\mapsto f(x)$ i $x\mapsto p(x)$ ispunjavaju uslove kao u teoremi 9 i ako je*

$$\text{(3.18)}\qquad p\left(\frac{a+b}{2}-x\right)=p\left(\frac{a+b}{2}+x\right)\qquad\left(\forall x\in\left[-\frac{b-a}{2},\,\frac{b-a}{2}\right]\right),$$

tada je

$$\text{(3.19)}\qquad \left|A(f;\,p)+\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right|\leqq\frac{M(b-a)^2}{8}\cdot\frac{(\lambda+q)(1-q^2)+2(\lambda-1)q}{2\lambda(1+q)-(\lambda-1)(1+q^2)},$$

gde je

$$\text{(3.20)}\qquad q=\frac{2}{M(b-a)}\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(a)\right|.$$

Dokaz. Iz (3.18) sleduje

$$A\left(\frac{a+b}{2}-x;\ p\right)=\frac{\int\limits_a^b p(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}=0.$$

Tada se (3.11) svodi na (3.19).

Sledeća posledica generališe teoremu D.

Posledica 1. *Neka je $x\mapsto f(x)$ dva puta diferencijabilna funkcija definisana na segmentu $[a,\ b]$ takva da je $|f''(x)|\leqq M$ $(\forall x\in(a,\ b))$ i $f'(a)=f'(b)$. Tada je*

$$\left|A(f;\ 1)-\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right|\leqq\frac{M(b-a)^2}{16}(1-q^2), \tag{3.21}$$

gde je q definisano sa (3.20).

Primedba. Nejednakost (3.21) može se predstaviti u obliku

$$\left|\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right|\leqq\frac{M(b-a)^2}{16}-\frac{1}{4M}\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(a)\right)^2$$

Na osnovu prethodnog, prirodno se nameće problem generalizacije teoreme 6, pri uslovu

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqq M\qquad (n>1;\quad x\in(a,\ b)). \tag{3.22}$$

Pretpostavimo da je uslov (3.22) ispunjen. Tada je na $[a,\ b]$

$$x\mapsto f(x)+\frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ \text{konveksna funkcija reda } n$$

i

$$x\mapsto f(x)-\frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ \text{konkavna funkcija reda } n.$$

Na osnovu teoreme 8 i leme 1 zaključujemo da funkcija F definisana na $[a,\ b]$ pomoću

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n} & (x\neq a),\\[2ex] \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} & (x=a),\end{cases}$$

zadovoljava uslove teoreme 6, pri čemu je $|F'(x)|\leqq\dfrac{M}{(n+1)!}$ $(\forall x\in(a,\ b))$.

Isto tako i funkcija

$$x \mapsto G(x) = \begin{cases} (-1)^{n-1} \dfrac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k}{(b-x)^n} & (x \neq b), \\ -\dfrac{f^{(n)}(b)}{n!} & (x = b), \end{cases}$$

zadovoljava uslove teoreme 6.

Sada se, slično teoremama 9 i 10, mogu formulisati i dokazati sledeći rezultati:

Teorema 11. *Neka je* $x \mapsto f(x)$ $n+1$ $(n>1)$ *puta diferencijabilna funkcija definisana na* $[a, b]$ *takva da je* $|f^{(n+1)}(x)| \leqq M$ $(M>0)$ $(\forall x \in (a, b))$ *i*

$$f^{(k)}(b) = (-1)^{k-1} f^{(k)}(a) \qquad (k = 1, \dots, n).$$

Ako $p \in Q(\lambda; (a, b))$ *važi nejednakost*

$$\Bigg| A(f; p) - \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{1}{4}\left(f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right) A\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n; p\right)\Bigg|$$

$$\leqq \frac{M(b-a)^{n+1}}{4(n+1)!}\left(A\left(\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n; p\right) - \frac{(1+q)\, r_n(q)}{\lambda(1+q) - (\lambda-1)\, r_n(q)}\right),$$

gde je A *određeno sa* (2.4) *i*

$$q = \frac{(n+1)!}{M(b-a)^n}\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^{k-1}\right|, \tag{3.21}$$

$$r_n(q) = \frac{1}{2^{n-1}(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} \binom{n+2}{2k} q^{2k} + n 2^n\right). \tag{3.22}$$

Teorema 12. *Ako funkcije* $x \mapsto f(x)$ *i* $x \mapsto p(x)$ *ispunjavaju uslove kao u teoremi* 11 *i ako je*

$$p\left(\frac{a+b}{2} - x\right) = p\left(\frac{a+b}{2} + x\right) \qquad \left(\forall x \in \left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right]\right),$$

važi nejednakost

$$\left| A(f; p) - \frac{1}{2}(f(a) + f(b))\right| \leqq \frac{M(b-a)^{n+1}}{4(n+1)!}\left(2A\left(\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n; p\right) - \frac{(1+q)\, r_n(q)}{\lambda(1+q) - (\lambda-1)\, r_n(q)}\right),$$

gde su A, q, r_n *određeni sa* (2.4), (3.21), (3.22) *respektivno.*

Posledica 2. *Neka funkcija f zadovoljava uslove kao u teoremi* 11. *Tada je*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right|\leqq\frac{M(b-a)^{n+1}}{4(n+1)!}\left(\frac{2}{n+1}-r_n(q)\right),$$

gde je r_n određeno sa (3.22).

Primedba. U časopisu Amer. Math. Monthly ([**49**]) postavljen je problem, koji je u vezi sa prethodnim rezultatima:

Neka na $[a, b]$ f ima neprekidan izvod reda $2n$ i neka je $|f^{(2n)}(x)|\leqq M$ i $f^{(r)}(a)=f^{(r)}(b)=0$ za $r=0, 1, \ldots, n-1$. Dokazati da važi nejednakost

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqq\frac{(n!)^2 M}{(2n)!\,(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}.$$

U istom časopisu objavljeno je rešenje ovog problema koje je dao A. Torchinsky ([**50**]).

4.4. O nekim generalizacijama nejednakosti V. A. Zmoroviča

U radu [**51**] V.A Zmorovič dokazao je sledeću teoremu:

Teorema I. *Ako je funkcija $f\colon[a-h, a+h]\to\mathbf{R}$ dva puta neprekidno-diferencijabilna, tada je*

$$\int_{a-h}^{a+h}(f''(x))^2\,\mathrm{d}x\geqq\frac{3}{2h^3}(f(a+h)-2f(a)+f(a-h))^2,$$

sa jednakošću ako i samo ako je f dato sa

$$f(x)=\begin{cases}C_1\{(h-a+x)^3+6h^2(a-x)\}+C_2x+C_3 & (x\in[a-h, a])\\ C_1(h+a-x)^3+C_2x+C_3 & (x\in[a, a+h]),\end{cases}$$

gde su C_1, C_2, C_3 proizvoljne realne konstante.

Navedeni rezultat V. A. Zmoroviča predstavlja poboljšanje nejednakosti

$$\int_{a-h}^{a+h}(f''(x))\,\mathrm{d}x\geqq\frac{1}{2h^3}(f(a+h)-2f(a)+f(a-h))^2,$$

koju je geometrijskim razmatranjem dobio M. A. Lavrent'ev (videti [**51**]), pretpostavljajući pritom strožije uslove. Naime, Lavrent'ev je dokazao poslednju nejednakost pod uslovom da je f četiri puta neprekidno-diferencijabilna funkcija na $[a-h, a+h]$.

Sličan rezultat nalazimo u [**52**] (teorema 264):

Teorema J. *Ako je*

$$f(-1)=-1,\quad f(1)=1,\quad f'(-1)=f'(1)=0$$

i $k\in\mathbf{N}$, tada je

$$\int_{-1}^{+1}(f''(x))^{2k}\,\mathrm{d}x\geqq 2\left(\frac{4k-1}{2k-1}\right)^{2k-1},$$

sa jednakošću samo za

$$f(x)=\frac{4k-1}{2k}x-\frac{2k-1}{2k}x^{(4k-1)/(2k-1)}.$$

Daćemo sada neke generalizacije teoreme 1.

Najpre uvedimo oznaku

$$\Delta=\frac{1}{h^2}[f(a+h)-2f(a)+f(a-h)]$$

i primetimo da je

$$\int_0^h (h-t)\big(f''(a-t)+f''(a+t)\big)\,dt=h^2\Delta. \tag{4.1}$$

Teorema 13. *Neka je funkcija* $f:[a-h,\ a+h]\to\mathbf{R}$ *dva puta neprekidno-diferencijabilna i* $g:[a-h,\ a+h]\to\mathbf{R}^+$ *neprekidna.*

Tada važi nejednakost

$$\int_{a-h}^{a+h} g(x)\,|f''(x)|^r\,dx\geqq\frac{h^{2r}}{\delta(r)^{r-1}}|\Delta|^r\qquad(r>1), \tag{4.2}$$

gde je

$$\delta(r)=\int_0^h (h-t)^{\frac{r}{r-1}}\big(g(a-t)^{\frac{1}{1-r}}+g(a+t)^{\frac{1}{1-r}}\big)\,dt. \tag{4.3}$$

Jednakost u (4.2) *nastupa ako i samo ako je funkcija f data sa*

$$f(x)=\begin{cases} A_1\displaystyle\int_a^x (x-t)\left|\frac{h-a+t}{g(t)}\right|^{\frac{1}{r-1}}dt+A_2x+A_3 & (x\in[a-h,\ a])\\[2ex] A_1\displaystyle\int_a^x (x-t)\left|\frac{h+a-t}{g(t)}\right|^{\frac{1}{r-1}}dt+A_2x+A_3 & (x\in[a,\ a+h]),\end{cases} \tag{4.4}$$

gde su A_1, A_2, A_3 *proizvoljne realne konstante.*

Dokaz. Stavimo $\gamma(t)=\big(g(a-t)^{\frac{1}{1-r}}+g(a+t)^{\frac{1}{1-r}}\big)^{\frac{1-r}{r}}$. Tada (4.3) postaje

$$\delta(r)=\int_0^h\left(\frac{h-t}{\gamma(t)}\right)^{\frac{r}{r-1}}dt. \tag{4.5}$$

Kako je

$$\int_{a-h}^{a+h} g(x)\,|f''(x)|^r\,dx=\int_0^h\big(g(a-t)\,|f''(a-t)|^r+g(a+t)\,|f''(a+t)|^r\big)\,dt,$$

stavljanjem $p_1=g(a-t)$, $p_2=g(a+t)$, $z_1=f''(a-t)$, $z_2=f''(a+t)$, na osnovu nejednakosti (videti [53], [54])

$$(4.6)\qquad |z_1+\cdots+z_n|^r \leqq \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i^{\frac{1}{1-r}}\Big)^{r-1} (p_1|z_1|^r+\cdots+p_n|z_n|^r)$$

$$(z_i \in \mathbf{C},\ p_i>0\ (i=1,\ldots,n),\ r>1),$$

imamo

$$\int_{a-h}^{a+h} g(x)\,|f''(x)|^r\,\mathrm{d}x \geqq \int_0^h \frac{|f''(a-t)+f''(a+t)|^r}{\Big(g(a-t)^{\frac{1}{1-r}}+g(a+t)^{\frac{1}{1-r}}\Big)^{r-1}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^h \big(\gamma(t)\,|f''(a-t)+f''(a+t)|\big)^r\,\mathrm{d}t,$$

ili, s obzirom na (4.5),

$$(4.7)\qquad \int_{a-h}^{a+h} g(x)\,|f''(x)|^r\,\mathrm{d}x$$

$$\geqq \frac{1}{\delta(r)^{r-1}}\Big(\int_0^h \big(\gamma(t)\,|f''(a-t)+f''(a+t)|\big)^r\,\mathrm{d}t\Big)\Big(\int_0^h \Big(\frac{h-t}{\gamma(t)}\Big)^{\frac{r}{r-1}}\mathrm{d}t\Big)^{r-1}.$$

Primenom HÖLDERove nejednakosti na desnu stranu u (4.7), dobijamo

$$\int_{a-h}^{a+h} g(x)\,|f''(x)|^r\,\mathrm{d}x \geqq \frac{1}{\delta(r)^{r-1}}\Big(\int_0^h (h-t)\,|f''(a-t)+f''(a+t)|\,\mathrm{d}t\Big)^r$$

$$\geqq \frac{1}{\delta(r)^{r-1}}\Big|\int_0^h (h-t)\big(f''(a-t)+f''(a+t)\big)\,\mathrm{d}t\Big|^r,$$

odakle, s obzirom na (4.1), sleduje (4.2).

Kako u (4.6) nastupa jednakost ako i samo ako je

$$p_1|z_1|^{r-1}=\cdots=p_n|z_n|^{r-1} \quad \text{i} \quad z_k\bar{z}_j \geqq 0 \qquad (k,\ j=1,\ldots,n),$$

a u HÖLDERovoj nejednakosti

$$\int_\alpha^\beta |\varphi(x)\,\psi(x)|\,\mathrm{d}x \leqq \Big(\int_\alpha^\beta |\varphi(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\Big(\int_\alpha^\beta |\psi(x)|^q\,\mathrm{d}x\Big)^{1/q} \qquad \Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1\Big)$$

ako i samo ako je $|\varphi(x)|^p=C|\psi(x)|^q$, gde je C realna konstanta (videti [9, str. 54]), zaključujemo da jednakost u (4.2) nastupa ako i samo ako je

$$(4.8)\qquad \begin{aligned} & g(a-t)^{\frac{1}{r-1}} f''(a-t)=g(a+t)^{\frac{1}{r-1}} f''(a+t),\\ & \big(\gamma(t)\big(f''(a-t)+f''(a+t)\big)\big)^r = C\Big(\frac{h-t}{\gamma(t)}\Big)^{\frac{r}{r-1}} \qquad (C\in\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Iz (4.8), ako stavimo $C=A_1{}^r$, sleduje

$$f''(a-t)=A_1\left(\frac{h-t}{g(a-t)}\right)^{\frac{1}{r-1}},\quad f''(a+t)=A_1\left(\frac{h-t}{g(a+t)}\right)^{\frac{1}{r-1}}\qquad (0\leqq t\leqq h),$$

odakle, integracijom, dobijamo (4.4).

Posledica 3. *Ako je funkcija* $f:[a-h,\ a+h]\to\mathbf{R}$ *dva puta neprekidno-diferencijabilna, važi nejednakost*

$$\text{(4.9)}\qquad \int_{a-h}^{a+h}|f''(x)|^r\,\mathrm{d}x\geqq\left(\frac{2r-1}{2r-2}\right)^{r-1}h\,|\Delta|^r\qquad (r>1).$$

Jednakost u (4.9) *nastupa ako i samo ako je funkcija* f *data sa*

$$f(x)=\begin{cases} C_1\left((h-a+x)^{\frac{2r-1}{r-1}}+\dfrac{4r-2}{r-1}h^{\frac{r}{r-1}}(a-x)\right)+C_2x+C_3 & (x\in[a-h,\ a])\\ C_1(h+a-x)^{\frac{2r-1}{r-1}}+C_2x+C_3 & (x\in[a,\ a+h])\end{cases}$$

gde su $C_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ *proizvoljne realne konstante.*

Stavljanjem $g(x)\equiv 1$, iz teoreme 13 sleduje tvrđenje posledice 3.

PRIMEDBA. Za $r=2$, posledica 3 se svodi na teoremu I.

Posmatrajući levu stranu nejednakosti (4.2) u obliku

$$\int_{a-h}^{a+h}g(x)\,\Phi(f''(x))\,\mathrm{d}x,$$

gde je $t\mapsto\Phi(t)=|t|^r\ (r>1)$, zaključujemo da je Φ konveksna funkcija. To nam je dalo ideju da generališemo teoremu 13, za neku opštiju funkciju Φ.

Prethodno dajemo sledeću definiciju.

Definicija 6. *Neprekidna funkcija* $\Phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ *pripada klasi* M *ako postoje konveksna funkcija* $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ *i realni brojevi* λ *i* m *tako da za svako* $x\in\mathbf{R}$ *važe nejednakosti*

$$F(x)\leqq\Phi(x)^{1/m}\leqq\lambda F(x)\qquad(\lambda\geqq 1;\ m>1).$$

Napomenimo da ovde pod konveksnom funkcijom podrazumevamo neprekidnu JENSEN konveksnu funkciju, kao što je definisano u odeljku 4.3.

Jedna generalizacija teoreme 13 je sledeća teorema (videti **[39]** i **[55]**).

Teorema 14. *Neka funkcije* $\Phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$, $f:[a-h,\ a+h]\to\mathbf{R}$, $g:[a-h,\ a+h]\to\mathbf{R}^+$ *ispunjavaju uslove:*

1° $\Phi\in M$;

2° f *dva puta neprekidno-diferencijabilna;*

3° g *neprekidna.*

Tada je

$$\int_{a-h}^{a+h}g(x)\,\Phi(f''(x))\,\mathrm{d}x\geqq\frac{h^{2m}}{\lambda^m\delta\,(m)^{m-1}}\,\Phi(\Delta),$$

gde je δ *određeno sa* (4.3).

PRIMEDBA. Ako je $\Phi(x)^{1/m}=F(x)$ $(m>1)$, gde je F konveksna funkcija, tada važi nejednakost

$$\int_{a-h}^{a+h} g(x)\,\Phi(f''(x))\,\mathrm{d}x \geqq \frac{h^{2m}}{\delta(m)^{m-1}}\,\Phi(\Delta). \tag{4.10}$$

Poslednja nejednakost za $\Phi(x)=|x|^r$ $(r>1)$ i $m=r$ svodi se na (4.2).

Posledica 4. *Neka funkcije* $\Phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ *i* $f:[a-h,\ a+h]\to\mathbf{R}$ *ispunjavaju uslove:*

1° $\Phi(x)^{1/m}=F(x)$ $(m>1;$ *F konveksna funkcija*$)$;

2° *f dva puta neprekidno-diferencijabilna.*

Tada je

$$\int_{a-h}^{a+h} \Phi(f''(x))\,\mathrm{d}x \geqq \left(\frac{2m-1}{2m-2}\right)^{m-1} h\,\Phi(\Delta). \tag{4.11}$$

Nejednakost (4.11) *je oštrija ukoliko je m veće.*

Ako u (4.10) stavimo $g(x)=1$ $(\forall x\in[a-h,\ a+h])$, dobijamo (4.11). S druge strane, kako je $m\mapsto C_m=\left(\frac{2m-1}{2m-2}\right)^{m-1}$ $(m>1)$ rastuća funkcija, nejednakost (4.11) je oštrija ukoliko je m veće. Najveća moguća vrednost za C_m je $C_\infty=\lim\limits_{m\to+\infty} C_m=\sqrt{e}$ i ona egzistira, na primer, kod funkcije $x\mapsto\Phi(x)=e^{kx}$ $(k\in\mathbf{R})$.

Slično dokazu teoreme 14, može se dokazati sledeća teorema.

Teorema 15. *Neka funkcije* $\Phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$, $f:[a,\ a+h]\to\mathbf{R}$, $g\,[a,\ a+h]\to\mathbf{R}^+$ *ispunjavaju uslove:*

1° $\Phi\in M$;

2° *f neprekidno-diferencijabilna*;

3° *g neprekidna.*

Tada je

$$\int_{a}^{a+h} g(x)\,\Phi(f'(x))\,\mathrm{d}x \geqq \frac{\beta_m h}{\lambda^m}\,\Phi(\Delta_1), \tag{4.12}$$

gde su

$$\beta_m=\left(\frac{1}{h}\int_a^{a+h} g(x)^{\frac{1}{1-m}}\,\mathrm{d}x\right)^{1-m} \quad i \quad \Delta_1=\frac{1}{h}\,(f(a+h+f(a)).$$

PRIMEDBA. Za $g(x)\equiv 1$, (4.12) se svodi na

$$\int_a^{a+h} \Phi(f'(x))\,\mathrm{d}x \geqq \frac{h}{\lambda^m}\,\Phi(\Delta_1).$$

4.5. Neke primene u numeričkoj integraciji

Na osnovu rezultata iz odeljka 4.1, sada ćemo naći ocenu za ostatke $R_m(f;\, p)$ u nekim formulama za numeričku integraciju oblika

$$\int_a^b p(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} A_k f(x_k) + R_m(f;\, p), \tag{5.1}$$

gde su $A_k\,(=A_k(p))$ težinski koeficijenti,

$$a \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leqq b,$$

a funkcije $x \mapsto p(x)$ i $x \mapsto f(x)$ ispunjavaju uslove:

1° $p \in Q(\lambda;\, (a, b))$;

2° f diferencijabilna sa ograničenim prvim izvodom na (a, b).

Takođe ćemo razmatrati neke formule za numeričko izračunavanje višestrukih integrala koje predstavljaju analogon od (5.1).

G. W. Mackey u radu **[56]** (videti takođe [**9**, str. 297]) dokazao je sledeći rezultat.

Teorema K. *Neka je f diferencijabilna realna funkcija definisana na segmentu* $[0, 1]$ *i takva da je*

$$|f'(x)| \leqq M \quad za \quad 0 < x < 1.$$

Tada je

$$\left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) \right| \leqq \frac{M}{m}. \tag{5.2}$$

Korišćenjem teoreme A, teorema K se može uopštiti na sledeći način ([**34**], [**39**]).

Teorema 16. *Neka je* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *diferencijabilna funkcija definisana na* $[0, 1]$ *i takva da je*

$$|f'(x)| \leqq M \quad za \quad 0 < x < 1.$$

Tada je

$$\left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(x_k) \right| \leqq \frac{M}{2} \sum_{k=1}^{m} \left((x_k - a_{k-1})^2 + (a_k - x_k)^2\right). \tag{5.3}$$

gde je

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = 1; \quad \lambda_k = a_k - a_{k-1}, \quad a_{k-1} \leqq x_k \leqq a_k \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Neke posledice teoreme 16 su:

Posledica 5. *Ako je $x_k = a_k$ ili $x_k = a_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, m)$ važi*

$$\left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(x_k) \right| \leqq \frac{M}{2} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2.$$

Posledica 6. *Ako je* $x_k = \frac{1}{2}(a_{k-1}+a_k)$ $(k=1, \ldots, m)$, *važi nejednakost*

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(x_k)\right| \leqq \frac{M}{4} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2.$$

Posledica 7. *Ako je* $a_k = \frac{k}{m}$ $(k=0, 1, \ldots, m)$, *tada je*

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\right| \leqq \frac{M}{2m}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{m} + 2\left(x_k - \frac{k}{m}\right) + 2m\left(x_k - \frac{k}{m}\right)^2\right). \tag{5.4}$$

Iz (5.4), za $x_k = a_k = \frac{k}{m}$ ili $x_k = a_{k-1} = \frac{k-1}{m}$ $(k=1, \ldots, m)$, dobijamo

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\right| \leqq \frac{M}{2m}.$$

Ova nejednakost je strožija od nejednakosti (5.2).

Za $x_k = \frac{1}{2}(a_{k-1}+a_k) = \frac{2k-1}{2m}$ $(k=1, \ldots, m)$, (5.4) se svodi na

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\right| \leqq \frac{M}{4m}. \tag{5.5}$$

Nejednakost (5.5) nalazimo u [**57**, str. 151].

Na osnovu teoreme 1 može se dokazati sledeći rezultat.

Teorema 17. *Neka je* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *diferencijabilna funkcija definisana na* $[0, 1]$ *i takva da je*

$$|f'(x)| \leqq M \qquad (\forall x \in (0, 1)).$$

Ako $p \in Q(\lambda; (0, 1))$ *i* $m \in \mathbf{N}$, *tada je*

$$\left|\int_0^1 p(x) f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{m} A_k f\left(\frac{2k-1}{2m}\right)\right| \leqq \frac{\lambda M}{2(\lambda+1)m}\int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.6}$$

gde je

$$A_k = \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} p(x)\,\mathrm{d}x \qquad (k=1, \ldots, m).$$

Dokaz. Neka je

$$E(f; p; k) = f\left(\frac{2k-1}{2m}\right) - \frac{1}{A_k}\int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kako je, na osnovu teoreme 1,

$$|E(f;\,p;\,k)| \leqq \frac{\lambda M \cdot \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{4m}}{\frac{1}{2m} + (\lambda - 1)\frac{1}{4m}} = \frac{\lambda M}{2m(\lambda+1)},$$

imamo

$$\left|\int_0^1 p(x) f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{m} A_k f\left(\frac{2k-1}{2m}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} A_k E(f;\,p;\,k)\right| \leqq \frac{\lambda M}{2m(\lambda+1)} \sum_{k=1}^{m} A_k$$

$$= \frac{\lambda M}{2m(\lambda+1)} \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x,$$

čime je dokaz završen.

Primedba. Za $p(x) \equiv 1$ ($\Rightarrow \lambda = 1$) (5.6) se svodi na (5.5).

Navešćemo jedan primer.

Primer. Neka je $x \mapsto p(x) = e^{-x}$ ($x \in [0, 1]$). Tada je

$$\lambda = e, \quad \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-1}, \quad A_k = \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} p(x)\,\mathrm{d}x = (e^{1/m} - 1)\,e^{-k/m} \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

pa se (5.6) svodi na

$$\left|\int_0^1 e^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x - (e^{1/m} - 1) \sum_{k=1}^{m} e^{-k/m} f\left(\frac{2k-1}{2m}\right)\right| \leqq \frac{M}{2m} \cdot \frac{e-1}{e+1}.$$

Teorema 16 može se generalisati za slučaj kada je f funkcija više promenljivih.

Prethodno uvodimo sledeće oznake:

$n,\ m_i \in \mathbf{N} \quad (i = 1, \ldots, n); \quad 0 = a_{i0} < a_{i1} < \cdots < a_{im_i} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n);$

$a_{i,k_i-1} \leqq x_{ik_i} \leqq a_{ik_i}, \ \lambda_{ik_i} = a_{ik_i} - a_{i,k_i-1} \quad (k_i = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, n);$

$k = (k_1, \ldots, k_n), \ X = (x_1, \ldots, x_n), \ X_k = (x_{1k_1}, \ldots, x_{nk_n});$

$D = \{X \mid 0 < x_i < 1;\ i = 1, \ldots, n\};$

$D(k) = \{X_k \mid a_{i,k_i-1} < x_{ik_i} < a_{ik_i} \quad (k_i = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, n)\};$

$\mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n;$

$$E(f;\,k) = f(X_k) - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \lambda_{ik_i}} \int \cdots \int_{D(k)} f(X)\,\mathrm{d}X.$$

Teorema 18. *Neka je* $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *diferencijabilna funkcija definisana na* $\bar{D}$ *i neka je u* D $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqq M_i\,(M_i>0;\ i=1,\ldots,n).$

Tada je

$$\left|\int\limits_D\cdots\int f(X)\,\mathrm{d}X-\sum_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{m_n}\lambda_{1k_1}\cdots\lambda_{nk_n}f(X_k)\right| \tag{5.7}$$

$$\leqq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}M_i\left(\sum_{k_i=1}^{m_i}H(x_{ik_i};\ k_i)\right),$$

gde je

$$H(t;\ k_i)=(t-a_{i,k_i-1})^2+(a_{ik_i}-t)^2.$$

Neke posledice teoreme 18 su:

Posledica 8. *Ako je* $x_{ik_i}=a_{ik_i}$ ili $x_{ik_i}=a_{i,k_i-1}$, *iz* (5.7) *sleduje*

$$\left|\int\limits_D\cdots\int f(X)\,\mathrm{d}X-\sum_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{m_n}\lambda_{1k_1}\cdots\lambda_{nk_n}f(X_k)\right|\leqq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}M_i\left(\sum_{k_i=1}^{m_i}\lambda_{ik_i}^{\;2}\right).$$

Ako je, osim toga, $\lambda_{ik_i}=\frac{1}{m_i}$, *važi*

$$\left|\int\limits_D\cdots\int f(X)\,\mathrm{d}X-\frac{1}{m_1\cdots m_n}\sum_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{m_n}f(X_k)\right|\leqq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{m_i}.$$

Posledica 9. *Ako je* $x_{ik_i}=\frac{1}{2}(a_{i,k_i-1}+a_{ik_i})$, *važi*

$$\left|\int\limits_D\cdots\int f(X)\,\mathrm{d}X-\sum_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{m_n}\lambda_{1k_1}\cdots\lambda_{nk_n}f(X_k)\right|\leqq\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}M_i\left(\sum_{k_i=1}^{m_i}\lambda_{ik_i}^{\;2}\right).$$

Ako je, osim toga, $\lambda_{ik_i}=\frac{1}{m_i}$, *imamo*

$$\left|\int\limits_D\cdots\int f(X)\,\mathrm{d}X-\frac{1}{m_1\cdots m_n}\sum_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{m_n}f(X_k)\right|\leqq\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{m_i}.$$

5. NEKI OTVORENI PROBLEMI I MOGUĆNOSTI DALJIH GENERALIZACIJA

5.1. Neki otvoreni problemi

1. Pod pretpostavkom da su $a_i\,(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ međusobno različiti brojevi i $x=\sum\limits_{k-1}^{n} x_k$, u odeljku 2.2. za MALET-HAMMONDovu funkcionalnu jednačinu

$$(1)\qquad \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) f(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) f(x_1-1,\ \ldots,\ x_n-1)$$
$$+\sum_{k=1}^{n} f(x_1,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k+1,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n),$$

određeno je rešenje oblika

$$(2)\qquad f(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\begin{vmatrix} G_0(x) & G_1(x) & \cdots & G_n(x) \\ a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & & a_n^{x_1} \\ \vdots & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_n^{x_n} \end{vmatrix}.$$

Pitanje opšteg rešenja jednačine (1) ostaje otroreno.

U vezi sa prethodnim, otvara se i problem rešavanja opštije jednašine

$$Af(x_1,\ \ldots,\ x_n)=Bf(x_1-1,\ \ldots,\ x_n-1)$$
$$+\sum_{k=1}^{n} f(x_1,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k+1,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n),$$

gde su A i B dati realni brojevi.

2. U odeljku 2.3. određeno je opšte netrivijalno rešenje funkionalne nejednakosti

$$Af(x_1,\ \ldots,\ x_n)\geqq Bf(x_1-1,\ \ldots,\ x_n-1)$$
$$+\sum_{k-1}^{n} f(x_1,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k+1,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n),$$

u skupu neprekidnih rešenja CAUCHYevc jednačine

$$(3)\qquad f(x_1+y_1,\ \ldots,\ x_n+y_n)=f(x_1,\ \ldots,x_n)f(y_1,\ \ldots,\ y_n).$$

Ostaje otvoreno pitanje da li se uslov (3) može oslabiti.

5.2. Mogućnost daljih generalizacija

1. U odeljku 2.2. određeno je rešenje oblika (2) i za neke opštije jednačine od (1). Interesantno bi bilo odrediti njihova rešenja oblika (2), gde funkcije $G_i\,(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ ne bi bile funkcije zbira argumenata, već neke opštije funkcije.

2. Kao posledice dokazanih teorema, u trećem poglavlju dobijen je veći broj partikularnih rezultata, specifikacijom prostora i operatora.

Novim izborom prostora i operatora, moguće je dobiti niz drugih rezultata. U ovom radu se nije na tome insistiralo, ali bi, svakako, bilo interesantno da se, ukoliko je moguće, dobijanjem poznatih rezultata pokuša da otkrije njihovo zajedničko poreklo.

Time bi, naravno, teoreme, dokazane u ovom poglavlju, dobile u svojoj generalnosti.

3. U vezi sa generalizacijama nejednakosti V. A. Zmoroviča, od interesa bi bilo dobiti neke nejednakosti u kojima se pojavljuju viši izvodi.

6. BIBLIOGAFIJA

1. R. Ž. ĐORĐEVIĆ and G. V. MILOVANOVIĆ: *On a functional equation having determinant form.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **498** — № **541** (1975), 85—90.
2. D. S. MITRINOVIĆ: *Novi zbornik matematičkih problema II — Matrice i determinante.* Beograd, 1972.
3. J. C. MALET, J. HAMMOND: *Problem* 5144. Educational Times **28** (1877), 51—52.
4. R. Ž. ĐORĐEVIĆ and G. V. MILOVANOVIĆ: *On a Malet-Hammond's functional equation.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **498** — № **541** (1975), 91—96.
5. H. LEVY and F. LESSMAN: *Finite difference equations.* London, 1959.
6. K. S. MILER: *An introduction to the calculus of finite differences and difference equations.* New York, 1960.
7. J. ACZÉL: *Lectures on Functional Equation and Their Applications.* New York—London, 1966.
8. E. LANDAU: *Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare funktionen.* Proc. London Math. Soc. (2) **13** (1913), 43—49.
9. D. S. MITRINOVIĆ (In cooperation with P. M. VASIĆ): *Analytic inequalities.* Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
10. J. HADAMARD: *Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivées.* Bull. Soc. Math. France **42** (1914), 68—72.
11. G. E. ŠILOV (JU. G. BOSSE): *On inequalities between derivatives* (na ruskom). Sbornik Rabot Student. Naučnyh Kružkov Moskov. Gos. Univ. **1937**, 17—27.
12. A. GORNY: *Sur les fonctions indéfiniment dérivables sur tout l'axe réel.* C. R. Acad. Sci. Paris **206** (1938), 733—735.
13. A. GORNY: *Sur les fonctions endéfiniment dériviables.* Ibid. **206** (1938), 1872—1874.
14. A. GORNY: *Sur les maxima des modules d'une fonction et de ses dérivés.* Ibid. **206** (1938), 1245—1247.
15. A. GORNY: *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle.* Acta Math. **71** (1939), 317—358.
16. A. KOLMOGOROFF: *Une généralisation de l'inégalité de M. J. Hadamard entre les bornes supérieurs des dérivées successives d'une fonction.* C. R. Acad. Sci. Paris **207** (1938), 764—765.
17. A. KOLMOGOROFF: *On inequalities between bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function defined on an infinite interval* (na ruskom). Učen. Zap. Moskov. Gos. Univ. Matematika **30** (1939), 3—16.
18. I. J. SCHOENBERG: *The elementary cases of Landau's problem of inequalities between derivatives.* Amer. Math. Monthly **80** (1973), 121—158.
19. C. K. CHUI and P. W. SMITH: *A note on Landau's problem of bounded intervals.* Ibid. **82** (1975), 927—929.
20. H. KRALJEVIĆ and S. KUREPA: *Semigroups on Banach spaces.* Glasnik Matematički **5** (25) (1970), 109—117.
21. S. KUREPA: *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene.* Zagreb, 1967.
22. N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ: *Linear operators.* Part I. New York—London, 1958.
23. A. V. BALAKRISHNAN: *Introduction to optimization theory in a Hilbert space.* Berlin—Heidelberg—New York, 1971.
24. E. HILLE: *Remark on the Landau—Kallman—Rota inequality* (Reports of Meetings). Aequationes. Math. **4** (1970), 239—240.

25. S KUREPA: *Remark on the Landau inequality* (Reports of Meetings). Ibid. **4** (1970), 240—241.

26. V. G. AVAKUMOVIĆ — S. ALJANČIĆ: *Odredivanje najboljih granica izvoda kada su poznate izvesne osobine funkcije i ostalih izvoda.* Glas Srpske Akad. Nauka **3** (1950), 197—210.

27. I. B. LACKOVIĆ and M. S. STANKOVIĆ: *A note on a theorem of E. Landau.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **381** — № **409** (1972), 113—116.

28. A. OSTROWSKI: *Über die Absolutabweichung einer differentierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert.* Comment. Math. Helv. **10** (1938), 226—227.

29. R. Ž. ĐORĐEVIĆ and G. V. MILOVANOVIĆ: *A generalization of E. Landau's theorem.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **498** — № **541** (1975), 97—106.

30. Л. В. КАНТОРОВИЧ и Г. П. АКИЛОВ: *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* Москва, 1959.

31. J. B. DIAZ and F. T. METCALF: *Variations of Wirtinger's inequality* (Edited by OVED SHISHA). New York, 1967, pp. 79—103.

32. A. LUPAS: *Problem* 313. Mat. Vesnik. **12** (27) (1975), 122—123.

33. J. KARAMATA: *O prvom stavu srednjih vrednosti odredenih integrala.* Glas srpske kraljevske akademije CLIV Beograd (1933), 119—144.

34. G. V. MILOVANOVIĆ: *On some integral inequalities.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **498** — № **541** (1975), 119—124.

35. K. S. K. IYENGAR: *Note on an inequality.* Math. Student **6** (1938), 75—76.

36. G. S. MAHAJANI: *A note on an inequality.* Ibid. **6** (1938), 125—128.

37. S. ALJANČIĆ: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Beograd, 1968.

38. И. П. НАТАНСОН: *Теория функций вещественной переменной.* Москва, 1974.

39. G. V. MILOVANOVIĆ: *O nekim funkcionalnim nejednakostima* (Doktorska disertacija). Niš, 1976.

40. T. POPOVICIU: *Les fonctions convexes.* Actualités Sci. Ind. № 992. Paris, 1944.

41. M. A. KRASNOSEL'SKIĬ and YA. B. RUTICKIĬ: *Convex functions and Orlicz Spaces.* Groningen, 1961.

42. W. ROBERTS and D. E. VARBERG: *Convex function.* New York—London, 1973.

43. E. POPOVICIU-MOLDOVAN: *O definiciji konveksnih funkcija.* Matematička biblioteka, sv. 42, Beograd 1969, str. 25—40.

44. Lj. R. STANKOVIĆ: *On an inequality for convex functions of order k.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **461** — № **497** (1974), 47—50.

45. Lj. R. STANKOVIĆ: *Prilozi teoriji analitičkih nejednakosti* (Doktorska teza). Niš 1975.

46. I. B. LACKOVIĆ: *Neki novi rezultati za konveksne funkcije i za nejednakosti koje su u vezi sa njima* (Doktorska disertacija). Niš 1975.

47. I. B. LACKOVIĆ and M. S. STANKOVIĆ: *On Hadamard's integral inequality for convex functions.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **412** — № **460** (1973), 89—92.

48. P. M. VASIĆ and G. V. MILOVANOVIĆ: *On an inequality of Iyengar.* Ibid. № **544** — № **576** (1976), 18—24.

49. ANON: *Problem* E 2155. Amer. Math. Monthly **76** (1969), 188.

50. A. TORCHINSKY: *Solution of the Problem* E 2155. Ibid. **76** (1969), 1142—1143.

51. V. A. ZMOROVIČ: *On some inequalities* (na ruskom). Izv. Polytehn. Inst. Kiev **19** (1956), 91—107.

52. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA: *Ineqaulities.* Cambridge, 1934.

53. P. M. VASIĆ and J. D KEČKIĆ: *Some inequalities for complex numbers.* Math. Balkanica **1** (1971), 282—286.

54. P. S. BULLEN: *A note on a recent paper of P. M. Vasić and J. D. Kečkić.* Ibid. **2** (1972), 1—2.

55. R. Ž. ĐORĐEVIĆ and G. V. MILOVANOVIĆ: *On some generalization V. A. Zmorovič's inequality.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **544**—№ **576** (1976), 25—30.

56. G. W. Mackey: *The William Lowell Putnam Mathematical Competition.* Amer. Math. Monthly **54** (1947), 403.

57. В. И. Крылов: *Приближенное вычисление интегралов.* Москва, 1959.

58. R. Cooper: *The converses of the Cauchy—Hölder inequality and the solutions of the inequality* $g(x+y) \leqq g(x)+g(y)$. Proc. London Math. Soc. (2) **26** (1926), 415—432.

59. J. E. Wetzel: *On the functional inequality* $f(x+y) \geqq f(x) f(y)$. Amer. Math. Monthly **74** (1967), 1065—1068.

60. J. Aczél: *Problem* 3 *from Reports of Meetings.* Aequationes Math. **1** (1968), 300.

61. P. Fischer: *Sur l'inégalité* $\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i f(q_i)$. Ibid. **2** (1969), 363.

62. I. C. Hsu: *On some Functional Inequalities.* Ibid. **9** (1973), 129—135.

63. P. Fischer: *On the inequality* $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{f(p_i)}{f(q_i)} \leqq 1$. Canad. Math. Bull. **17** (1974), 193—199.

64. P. Fischer: *On the inequality* $\Sigma g(p_i) f(p_i) \geqq \Sigma g(p_i) f(q_i)$. Aequationes Math. **10** (1974), 23—33.

65. S. M. Nikol'skiĭ: *Quadrature Formulas* (na ruskom). Moskva 1974.

66. S. B. Stečkin: *Inequalities between the upper bounds of the derivatives of an arbitrary function on the half-line* (na ruskom). Mat. Zametki **1** (1967), 665—674.

67. R. Ž. Đorđević and G. V. Milovanović: *On a Malet-Hammond's functional equation* (Reports of Meetings). Aequationes Math. **14** (1976), 214—215.

SUMMARY

1.1. This paper consists of the following chapters:

1. Introduction;
2. On a MALET-HAMMOND's functional equation and a corresponding functional inequality;
3. On generalization of E. LANDAU's theorem;
4. Some integral inequalitics;
5. Some open problems and possibilities of further generalizations;
6. Bibliography.

Some of the chapters are devided into sections.

1.2. In Chapter 2 a general continuous solution was determined of a functional equation

$$\begin{vmatrix} F_0(x) & F_1(x) & \cdots & F_n(x) \\ a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & & a_n^{x_1} \\ \vdots & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_n^{x_n} \end{vmatrix} = 0,$$

under the following assumptions:

1° Unknown functions $F_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

2° $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$;

3° $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Using this result, for MALET-HAMMOND's functional equation ([3])

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) f(x_1 - 1, \ldots, x_n - 1)$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + 1, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

the solution of the following form was determined

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} G_0(x) & G_1(x) & \cdots & G_n(x) \\ a_0^{x_1} & a_1^{x_1} & & a_n^{x_1} \\ \vdots & & & \\ a_0^{x_n} & a_1^{x_n} & & a_n^{x_n} \end{vmatrix}.$$

Some more general equations were considered.

A set of two functional equations were also observed of which one is a MALET-HAMMOND's equation and the other a CAUCHY's equation

$$f(X+Y)=f(X)f(Y) \qquad (X,\ Y\in \mathbf{R}^n).$$

Some of these results are published in references [**1**] and [**4**].

In connection with functional equations there imposes a problem of considering the corresponding functional inequalities. Thus, for example, R. COOPER ([**58**]) has considered the functional inequality

$$g(x+y)\leqq g(x)+g(y),$$

which is in connection with CAUCHY's equality $g(x+y)=g(x)+g(y)$. J. E. WETZEL in [**59**] studies the inequality $f(x+y)\geqq f(x)f(y)$.

There is an increasing number of papers dealing with this problem in recent time ([**60**], [**61**], [**62**], [**63**], [**64**]). Some of these results also find their application in the theory of information.

Section 2.3. deals with a functional inequality

$$(1) \qquad Af(x_1, \ldots, x_n)\geqq Bf(x_1-1, \ldots, x_n-1) + \sum_{k=1}^{n} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k+1, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

where $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ and $A, B>0$.

Under condition that f satisfies the CAUCHY's equation

$$f(X+Y)=f(X)f(Y) \qquad (X,\ Y\in \mathbf{R}^n),$$

a general solution of inequality (1) was determined.

1.3. The well-known E. LANDAU's Theorem ([**8**]) has been generalized by many authors in different senses. This Chapter gives a generalization of this Theorem and it relates to the operators in BANACH space.

Based on Prof. P. R. BEESACK's (Canada) suggestion this result has been further generalized (Theorem 3).

Similarly, V. G. AVAKUMOVIĆ's and S. ALJANČIĆ's ([**26**]), result has been generalized by means of Theorem 2.

These results being rather general, a great number of particular results has been obtained by specification of the space and operators.

The last Section of this Chapter also gives some applications of the forementioned results to the operators in functional spaces.

1.4. The fourth Chapter has been dedicated to integral inequalities.

In the first Section, an A. OSTROWSKI's result ([**28**]), which is in connection with the results from the third Chapter was generalized for a weight arithmetic integral mean, and then the obtained results were transferred to a function with several variables. There were also given analogic results for a weight geometric integral mean.

The second Section discusses a K. S. K. IYENGAR's ([35]) inequality

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(b-a)\big(f(a)+f(b)\big)\right|\leqq\frac{M(b-a)^2}{4}-\frac{1}{4M}\big(f(b)-f(a)\big)^2, \tag{2}$$

which holds under condition that f is a differentiable function on $[a, b]$ and $|f'(x)|\leqq M$.

Then, first, the inequality (2) was generalized for the weight arithmetical integral mean wherein the conditions for f were weakened.

Supposing that $|f^{(n+1)}(x)|\leqq M$ $(n\geqq 1)$, IYENGAR's inequality was further generalized.

Section 4.4. gives some generalizations of V. A. ZMOROVIČ's inequality ([51])

$$\int_{a-h}^{a+h}(f''(x))^2\,\mathrm{d}x\geqq\frac{3}{2h^3}\big(f(a+h)-2f(a)+f(a-h)\big)^2,$$

which holds under condition that f is twice differentiable function on $[a-h, a+h]$.

Namely, under certain conditions for g and Φ, there were proved the inequalities of the form

$$\int_{a-h}^{a+h} g(x)\,|f''(x)|^r\,\mathrm{d}x\geqq C_r(g;\ h)\,|\Delta|^r \qquad (r>1),$$

$$\int_{a-h}^{a+h} g(x)\,\Phi\big(f''(x)\big)\,\mathrm{d}x\geqq D_m(g;\ h)\,\Phi(\Delta) \qquad (m>1),$$

where

$$\Delta=\frac{1}{h^2}\big(f(a+h)-2f(a)+f(a-h)\big).$$

At the end of this Chapter some applications of the obtained results were given and these are related to the estimation of the error in some formulae for numerical calculation of integrals.

1.5. The fifth Chapter states some problems which have been left open. Possible generalizations of the obtained results have been pointed out.

1.6. The sixth Chapter gives a list of the literature cited in the text or the one used as a general literature.

1.7. This paper represents an abridged version of the Ph. D. Thesis, defended at the Faculty of Electronic Engineering, Niš. The results separately published are cited without proofs.

SADRŽAJ